Geometría visual

José Luis Abreu y Javier Bracho

1. Introducción

Aunque la geometría euclidiana sea una abstracción de nuestra realidad inmediata, es tan exitosa para explicarla y tan contundente para predecirla en términos macrométricos, que la confundimos con ella. Este empalme de abstracción-realidad nubla nuestra capacidad para apropiarnos de otras abstracciones geométricas y nos estorba para aceptar con naturalidad la existencia, simpleza y pertinencia de otras geometrías. Formalmente, y como gremio, los matemáticos lo logramos hacia el final del siglo XIX —-no sin grandes discusiones, exabruptos y desgarres que seguimos, como aquí, digiriendo—- aunque hubiera evidencias claras de esa posibilidad desde el principio del Renacimiento, pues hay que incluir dentro de esta misma neblina intelectual a la escuálida presencia en la cultura general actual (siglo XXI) de las técnicas de la perspectiva que se desarrollaron desde entonces (siglo XV). Se sabe que esas técnicas o procedimientos están ahí, que funcionan bien y que con base en ellas se producen imágenes planas que interpretamos con naturalidad como tridimensionales. Pero viven —-como si fueran trucos de magia—- tras un velo oscurantista de incomprensión, pues los matemáticos nos hemos desentendido de su simplificación, formalización y difusión. Le hemos dejado a los arquitectos o a los pintores explicarlas y malinterpretarlas, ya que nuestra tradición educativa corre por caminos que, al parecer, son menos espinosos —-hemos preferido transitar sobre los cómodos empedrados algebraicos con que Descartes pavimentó a la geometría euclidiana—-.

Nuestro cerebro —-como también lo hace el de todos los animales superiores—- crea una imagen nítida del espacio tridimensional que nos rodea. ¿Cómo lo logra? Con el mismo principio que los pintores renacentistas adoptaron para pintar sus cuadros: *proyectar* desde un punto a un plano. La evolución creó al ojo para seleccionar los rayos de luz que pasan por un punto (su foco) y hacerlos impactar en una pantalla sensible (la retina); el pintor los plasma por su color distintivo en el lienzo que antepone a la escena. La única diferencia es que la pantalla está detrás o antes del foco en el sentido en el que viaja la luz. Pero el principio es el mismo: intersectar los rayos (o líneas) que pasan por el foco con la pantalla (retina o lienzo); es el mismo principio que usan las cámaras fotográficas y los proyectores que amplifican esas imágenes planas. De aquí, que la evolución y la técnica usen el mismo principio de proyección, se sigue el «realismo tridimensional» que nuestro cerebro otorga a las pinturas con buena perspectiva o al cine, aunque no sean más que imágenes planas. Para tridimensionalizar nuestro entorno más cercano, el de los objetos que podemos tomar con las manos y un poco más allá, nuestro cerebro hace uso de las diferencias de posición que surgen al proyectar un mismo punto en los dos ojos. Pero a grandes rasgos y a mayor distancia, con una proyección basta (lo que ven ambos ojos ya casi no varía), y este es el hecho que explotaron los pintores (se desentienden de la binocularidad y nuestro cerebro interpreta una imagen como lo haría el de un tuerto).

¿Qué usamos en este somero análisis de cómo vemos al mundo? Puntos, líneas y planos. Tres abstracciones. Y otra más: que a veces se pueden intersectar y cómo es que se intersectan. Son entes (y verbo) geométricos clásicos y se puede hacer matemática con ellos. Algunos la llaman ahora *geometría de incidencia*, si bien tradicionalmente se le llama *geometría proyectiva*; nosotros preferimos presentarla como *geometría visual*, pues es la que explica lo que vemos y cómo interpretarlo; y también porque el término *proyectiva* carga con un estigma de dificultad, de no-realista o de «matemática avanzada» (efecto o cruda de aquella neblina euclidiana) que ahuyenta a muchos. Se le puede tratar justo como a la geometría que iniciaron los griegos, y por tanto se nutre de la misma intuición geométrica de nuestra vivencia cotidiana y de nuestros dibujos, pero sin usar el concepto de distancia. Para efectos de las construcciones con regla y compás: ¡hoy, se nos olvidó el compás!

¿Qué se puede decir y demostrar sin usar nociones métricas? Resulta que mucho, que no es muy complicado y que lo que se va obteniendo reverbera con, y como abstracción de, las imágenes que nos obsequia nuestro entorno cotidiano, profuso en segmentos de rectas y círculos. Aunque tiene una dificultad: para que tenga sentido, necesita de la tercera dimensión. Es muy natural aceptar como axioma formal que hay tres dimensiones. Sin embargo, la dificultad a la que nos referimos surge al intentar presentar argumentos geométricos con la contundencia que se logra, gráfica o visualmente, con las figuras planas (le tenemos miedo a la geometría de tres dimensiones: de ahí en adelante fue donde el parteaguas coordinatizador que estableció Descartes desató nuestra creatividad formal). Pero en esta época de imágenes movibles en pequeñas y grandes pantallas, ese problema de presentación es solventable; ya se puede trabajar con figuras cambiantes y/o tridimensionales.

Creemos que adentrarse en esta geometría apoyados en las figuras que hoy se pueden generar ayuda a familiarizarse con lo que es el pensamiento matemático, con lo que son las matemáticas: teorías abstractas que hay que cimentar y argumentar con cuidado y que a veces se refieren a aspectos de la realidad pero que nunca hay que confundir con ella. Además, esta geometría es pertinente y significativa, pues en la época de animaciones hiperrealistas y realidades virtuales, los principios de la perspectiva o, mejor dicho, de la geometría proyectiva, debían ser parte de nuestra cultura matemática mínima.

2. Perspectiva y movimientos

Empecemos con el «problema del pintor». Consiste en que un pintor (realista) nos entrega un cuadrángulo dibujado en un papel o lienzo. Nos asegura que es el dibujo, a ojo pero bien hecho, de una loseta en un piso con mosaico cuadrangular como los hay tantos. Y nos pregunta cómo trazar el resto del mosaico.

Las líneas que corresponden a lados opuestos de la loseta no se dibujan paralelas en el lienzo; es decir, se intersectan. Esto nos da dos puntos, que hemos denotado H y V como acrónimos de «infinito horizontal» e «infinito vertical» (las dos direcciones que define la loseta en el piso), y que, a su vez, determinan una línea en el lienzo: su *horizonte*. Además, una de las diagonales de la loseta corta al horizonte en un punto D, de «infinito diagonal».

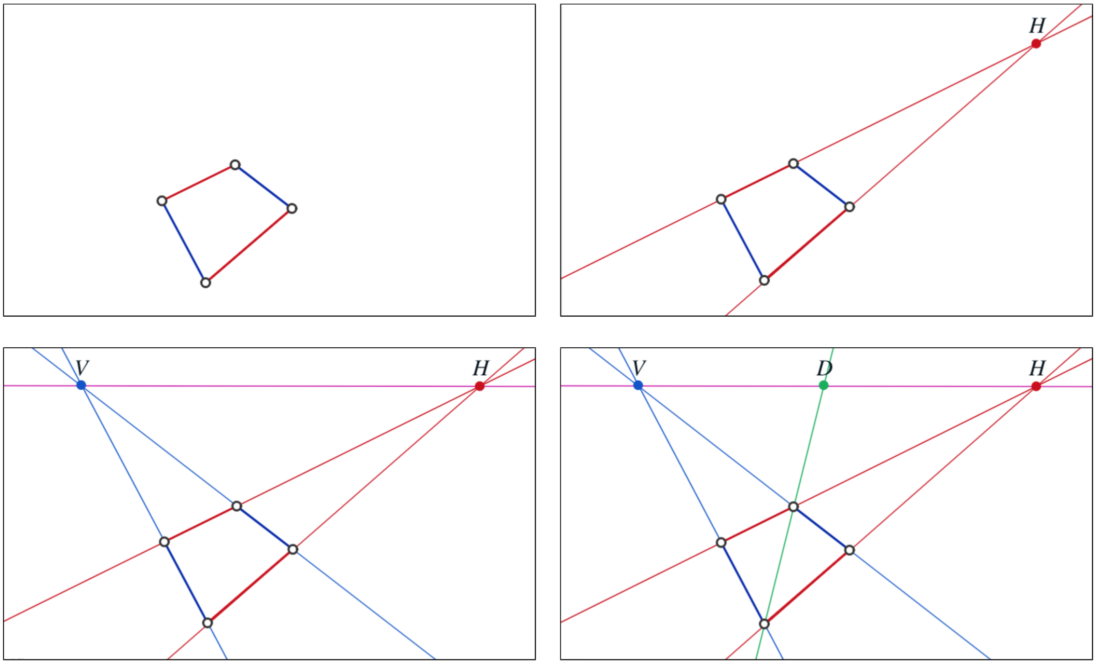

Figura 1: *Loseta básica y su horizonte con tres «puntos de fuga».*

Estos tres puntos que hemos bautizado como «Infinito de Tal» son los famosos «puntos de fuga». Algunos arquitectos que enseñan perspectiva clasifican las técnicas según cuántos puntos de fuga se utilicen, y entre más, «más chiquitiguau». Pero esto conduce a una terrible confusión. Hay tantos puntos de fuga para un plano, como puntos hay en su horizonte. Para verlo, conviene hacer un experimento mental de esos que le encantaban a Einstein. Mandemos a una pareja, agarrada de la manita, a caminar en una dirección fija sobre el piso: ¿qué vemos? Por supuesto, vemos que se hacen chiquitos. Ellos caminan tan campantes sobre líneas paralelas en el piso, pero en el lienzo tienden a convertirse en un punto del horizonte, y además, cualquier otra línea paralela se dibuja como línea que también incide en ese punto (basta pensar en un tercer personaje viajando a su misma velocidad por esa otra paralela: sus distancias «reales» se mantienen fijas, pero en el lienzo se encogen). Entonces, los haces de líneas paralelas en el piso se ven (y, por tanto, se deben dibujar) como haces concurrentes en un punto de su línea horizonte; los puntos en ella corresponden a distintas direcciones: son sus puntos de fuga. ¿Qué tantos puntos de fuga hay? Esto no depende de la técnica que se use —-con disculpas al arquitecto ducho—- sino de qué tantas direcciones con varias líneas paralelas tiene la escena.

El hecho anterior da un procedimiento para el problema de extender el dibujo de la loseta básica al mosaico que determina (Figura 2). Se traza la línea diagonal (a D) desde la esquina donde empieza la siguiente loseta (hacia H) y esto da el vértice donde debe dibujarse la siguiente vertical (a V); entonces se obtiene un nuevo punto para trazar al otro infinito, H... y se puede seguir así, en escalerita, trazando líneas hacia V y hacia H desde puntos que se alternan en las dos diagonales hasta donde el pintor lo necesite. Inclusive, se puede crecer hacia atrás, usando a la otra diagonal.

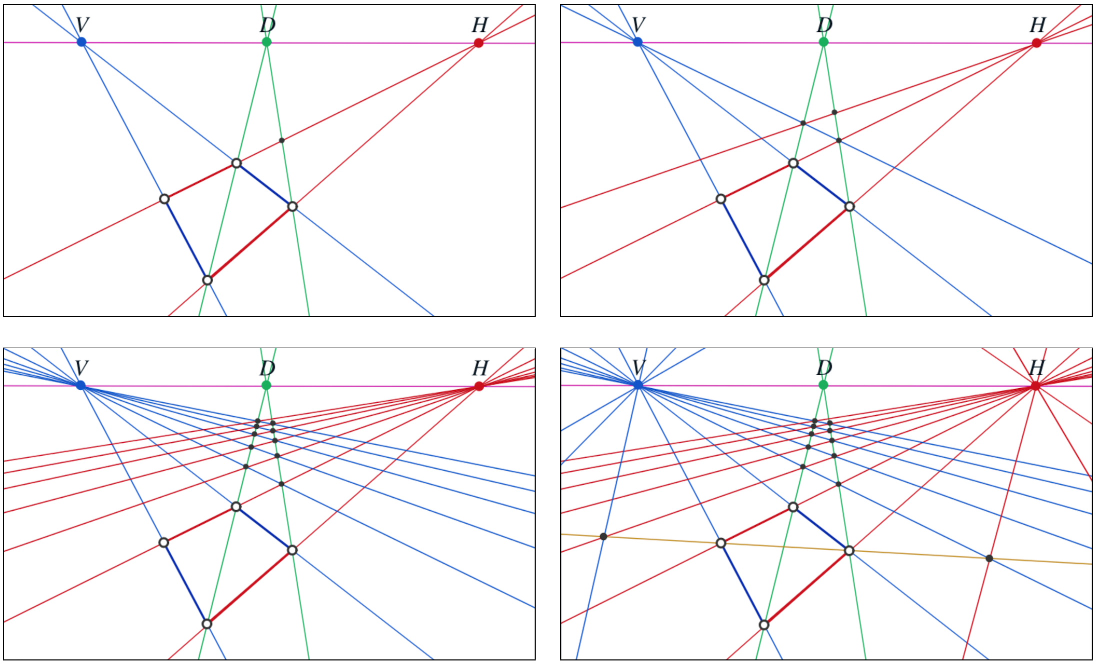

Figura 2: *Construcción de una cuadrícula en perspectiva a partir de una loseta.*

Lo único que se usó es que las líneas se proyectan en líneas, lo que se sigue de que los planos se intersectan en líneas: una línea en el piso genera un plano junto con el foco de la proyección (el ojo del pintor), y este plano intersecta al lienzo (otro plano) en la línea que será su imagen. El horizonte (de la loseta o de su plano) es la intersección con el lienzo del plano paralelo al piso que pasa por el ojo, y, en general, el punto de fuga de una línea es donde corta al lienzo su paralela trazada por el foco.

Hacer esta construcción con un programa de geometría dinámica permite mover los cuatro puntos libres que la generan. Entonces, nuestro cerebro hace su trabajo de interpretar lo que vemos, y nos produce la sensación de que un plano se mueve en el espacio. Podemos convertir continuamente a la imagen en el andamio constructivo de una fachada (Figura 3), al hacer paralelas las dos líneas que definen a V y así mandarlo, literalmente, al infinito. Si se trazan otros haces de líneas paralelas sobre los vértices de la cuadrícula (e.g., las otras diagonales de las losetas que ahora parecen rectángulos), se aprecia el fenómeno de que concurren en el horizonte (e.g., en D') además de que pasan justo sobre los puntos por los que deberían.

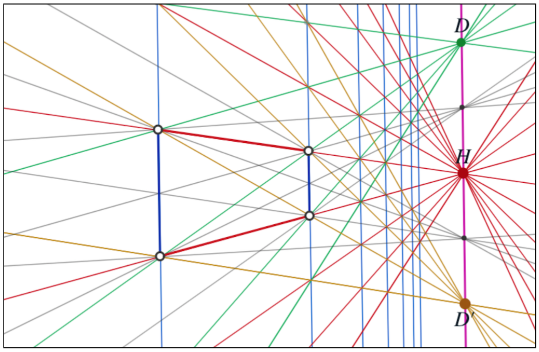

Figura 3: *Andamio constructivo para una fachada con seis familias de líneas paralelas.*

En una perspectiva más compleja donde aparecen varios planos, cada uno de ellos da lugar a un horizonte, aunque planos paralelos los comparten. Estas líneas y sus puntos de fuga asociados a familias de segmentos en la escena son abstracciones que se materializan en el lienzo para permitir situar ahí, con precisión y en su respectiva escala, a los diversos objetos o personajes en el cuadro. Nunca vemos en la realidad estos andamios abstractos que infirieron los pintores renacentistas para componer sus cuadros: sólo vemos sus insinuaciones. Pero debe ser claro que detrás de ellos hay geometría, que debe haber una teoría que sustente a la técnica y dé sentido a esas líneas y puntos que surgen de mirar, con detenimiento racional, al infinito.

El primero que se enfrenta, como matemático y con éxito formal, al problema de un infinito visible (pero no asequible según la geometría euclidiana), es Girard Desargues, contemporáneo de Descartes y considerado el padre de la geometría proyectiva. Extiende al plano (euclidiano) añadiéndole puntos virtuales. Adjunta, en abstracto, un nuevo punto *virtual* o «al infinito» para cada haz de líneas paralelas y decreta que en él todas ellas concurren. Y además, declara que todos estos puntos virtuales forman una nueva línea: el *horizonte* o la línea al infinito del plano en cuestión.

Desargues le da sentido formal a lo que surge de los andamios constructivos en las perspectivas. Es una abstracción que también se puede pensar como una simple manera de hablar, por ejemplo, trazar una línea por un punto virtual y otro en la pantalla es trazar la paralela correspondiente. Sin embargo, este lenguaje funciona tan bien que se vuelve natural, adquiere una lógica propia y da lugar a una nueva geometría: en la que estamos trabajando y en la que tenemos que hacer estos dibujos para que se muevan con naturalidad; ya en la computadora, esto no es un lujo intelectual abstracto, no es un simple lenguaje o una manera de hablar: es una necesidad para los cálculos y para la continuidad de las imágenes. Quizás, debiéramos llamar *plano desarguesiano* a este plano euclidiano extendido (así como llamamos plano cartesiano al euclidiano coordinatizado), pero lo llamamos *plano proyectivo* porque —humildemente— se acopla bien y ayuda a trabajar con las proyecciones.

Con el plano desarguesiano en mente, podemos reinterpretar a los movimientos dinámicos de las Figuras 2 y 3 ya no como un plano moviéndose en el espacio, sino como un plano moviéndose en sí mismo y expresándose este movimiento como deformaciones continuas de la cuadrícula euclidiana canónica (el timbiriche de toda la vida, cuyo horizonte es la línea de puntos virtuales al infinito y que podemos traer a la pantalla y al centro de la escena).

Hacía el final del siglo XIX, en 1872, Felix Klein hace notar en su *Programa de Erlangen* que estos movimientos son suficientemente ricos para entender, y comprehender, a las otras geometrías planas. Demuestra que al restringirse a ciertos subgrupos de movimientos y ciertos subconjuntos se obtienen las geometrías planas que se conocían hasta ese momento. Pero hablar de ello sin mostrar los movimientos es como narrar una película. Mejor pasemos a otra cosa, a lo que podría ser el desarrollo teórico de esta geometría y a ejemplos explícitos de teoremas, sus porqués y sus demostraciones.

3. Armonía

Veremos una **construcción** que da lugar a una definición y a un teorema. Es, quizá, el concepto proyectivo más elemental e importante y, como se verá primero en las figuras y luego explícitamente, se relaciona íntimamente con las cuadrículas que acabamos de ver.

Dados tres puntos colineales A, B y X con $A \neq B$, construiremos otro punto en esa misma línea llamado *su cuarto armónico* o, más precisamente, *el armónico de X respecto a A y B*. Para ello, se consideran dos puntos auxiliares O y P tales que O, P y X estén alineados. Luego, se trazan las líneas de A y B a los puntos O y P. Esto produce dos nuevos puntos como intersecciones de líneas; a saber:

$$Q = AO \cap BP$$
$$R = AP \cap BO\,,$$

donde denotamos por AB a la línea que pasa por A y B, y por $\cap$ a la intersección.

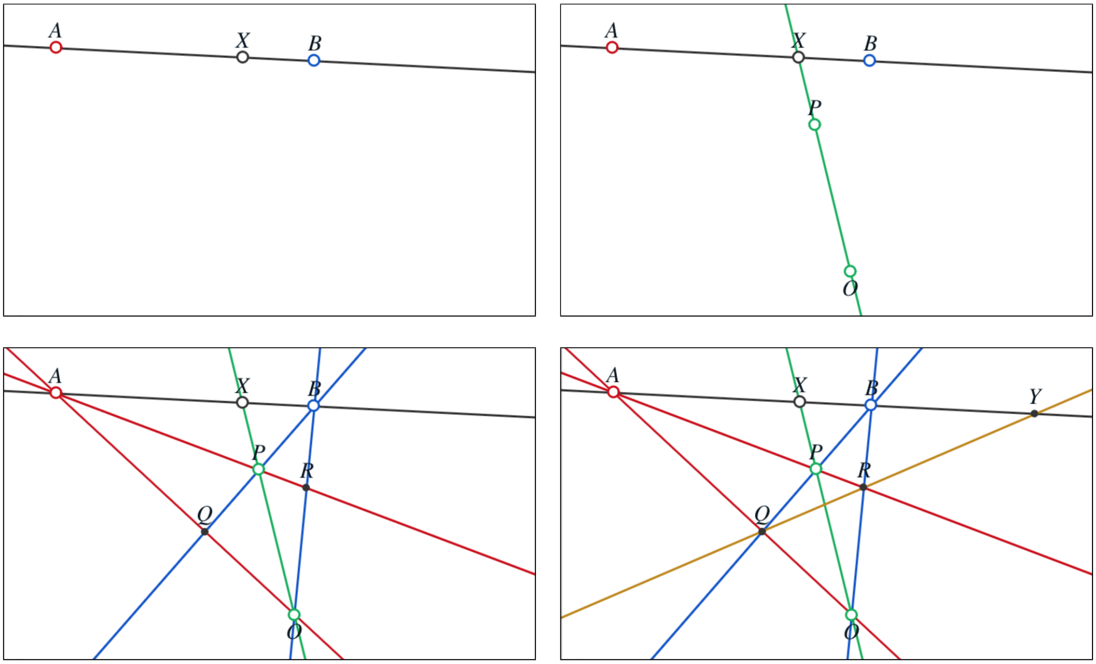

Figura 4: *Con dos puntos auxiliares se construye al cuarto armónico.*

Por estos dos nuevos puntos se puede trazar una línea cuya intersección con la línea original da al *armónico de X respecto a A y B*, que llamaremos Y:

$$Y = AB \cap QR\,.$$

Que esta sea una buena definición es lo que llamaremos el **Teorema Armónico**. Para ver que tal teorema debiera existir, basta mover a los puntos auxiliares O y P y observar que Y no cambia aunque los cuatro puntos externos a la recta AB sí lo hagan. La tecnología ya nos permite dar ese salto y maravillarnos de la naturalidad con que se mueve esta figura en una pantalla. También nos ayudaría a ver con figuras en 3D por qué es que la definición es buena. Para probarlo, hay que tomar dos construcciones (digamos que la anterior y una nueva en la que los puntos protagonistas traen primas) y demostrar que se llega a lo mismo. Naturalmente hay dos casos.

El primero es cuando los puntos auxiliares O y O' están en planos distintos respecto a la línea AB, es decir, cuando los planos ABO y ABO' son diferentes. Y resulta ser el caso sencillo, pues entonces aparece agazapado en el espacio un «voyeur», V, que ve lo mismo, que no distingue a las construcciones o que prendiendo una luz ahí, hace que una sea sombra de la otra.

Puesto que las líneas OP y $O'P'$ se intersectan en X, se tiene que los cuatro puntos O, P, O', P' son coplanares, y entonces $V = OO' \cap PP'$ está bien definido y no distingue a O de O' ni a P de P'. De aquí se sigue que V no va a distinguir a Q de

Q' (pues se le confunden los trazos que los definen) y, análogamente, V tampoco distingue a R de R'; así que ambas construcciones llegan a que Y es el punto de intersección del plano $VQR = VQ'R'$ con la recta AB.

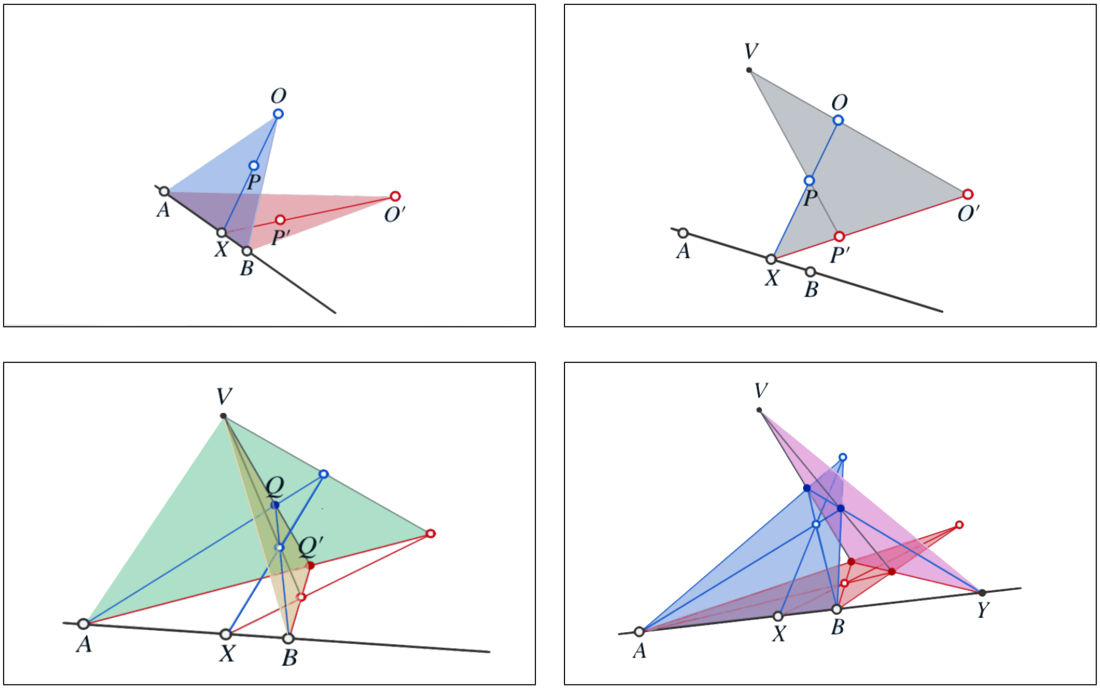

Figura 5: *Se necesitan tres dimensiones para demostrar el Teorema Armónico.*

El caso en que A, B, O y O' son coplanares se sigue inmediatamente del anterior, suponiendo que ese plano vive en un espacio de tres dimensiones y tomando un punto auxiliar O'' fuera de él. $\square$

El ejemplo paradigmático de una cuarteta armónica viene del horizonte que define una loseta, los puntos «diagonales» D y D' son armónicos de H y V (los nombres vienen de la sección anterior), y si las diagonales concurren en D' en la Figura 3, se puede demostrar como consecuencia del Teorema Armónico. Varias observaciones sobre el concepto de armonía son pertinentes.

Las proyecciones preservan armonía. Una demostración muy similar a la del Teorema Armónico (usando tres dimensiones pero ahora con V dado) prueba que la proyección de una cuarteta armónica también es una cuarteta armónica.

La armonía es simétrica. Supongamos que Y es el cuarto armónico de X respecto a A y B. De la misma Figura 4-d que implica esto, se sigue que X es el armónico de Y respecto a A y B, tomando a Q y R como puntos auxiliares. Para demostrar que, además, A y B son armónicos respecto a X y Y, bastan unos cuantos trazos más (en amarillo, rojo y naranja —en ese orden— en la Figura 6) que se obtienen a partir de definir $Z = OP \cap QR$. Se usa al Teorema Armónico para demostrar que las líneas naranjas —definidas por parejas de puntos rojos— pasan por X o por Y, ya que, por ejemplo, se puede encontrar al armónico de X respecto a A, B usando a O y Z —o a Z y P— como puntos auxiliares, en vez de a O y P. Así que los cuatro papalotitos en que se parte el papalote original se necesitan para ver que las líneas naranjas y amarillas dan la armonía que queríamos demostrar. $\square$

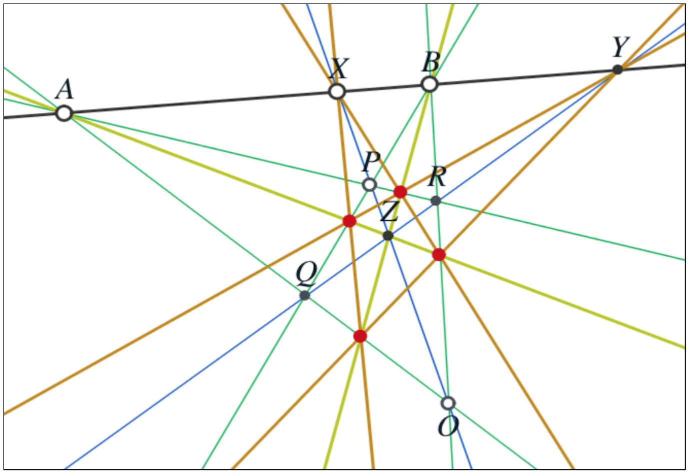

Figura 6: *La armonía es simétrica.*

El armónico del punto medio. Cuando X se mueve dentro del segmento entre A y B, su armónico Y se mueve afuera de él y con dirección contraria, así que para pasar de adentro a afuera, X y Y coinciden e intercambian lugares en el extremo correspondiente (A o B) del segmento. X no puede salir de la pantalla, pues es un punto definido como tal, pero su armónico Y, que se define como intersección de rectas, sí; de hecho, cambia de lado. El momento en que lo hace (en que Y es el punto virtual o al infinito de la recta AB) es cuando X es el punto medio del segmento. A través de la armonía, trazar paralelas equivale a encontrar puntos medios.

Sucesiones y redes armónicas. Si tomamos tres puntos en una recta y los llamamos $0, 1$ e ∞ (piénseseles como simples nombres por un momentito), la armonía indica dónde deben colocarse todos los números naturales en esa recta cuando esos tres puntos asuman de lleno su papel, empezando con qué punto debe asumir el papel de 2. Puesto que 1 es el punto medio entre 0 y 2, la simetría de la armonía y la observación anterior implican que 2 debe de ser el armónico de 0 respecto a 1 e ∞. Análogamente, el 3 debe de ser el armónico del 1 respecto a 2 e ∞; y en general, el $n+1$ tiene que ser el armónico de $n-1$ respecto a n e ∞. Esto define en la recta una *sucesión armónica* (e infinita en ambas direcciones); nuestro mundo visual está lleno de ellas (o de pedazos finitos de ellas). El ejemplo paradigmático son los durmientes en una vía de tren en el desierto, pero también están los postes en una avenida, las ventanas de un edificio, los barrotes de una reja, etcétera... las hay

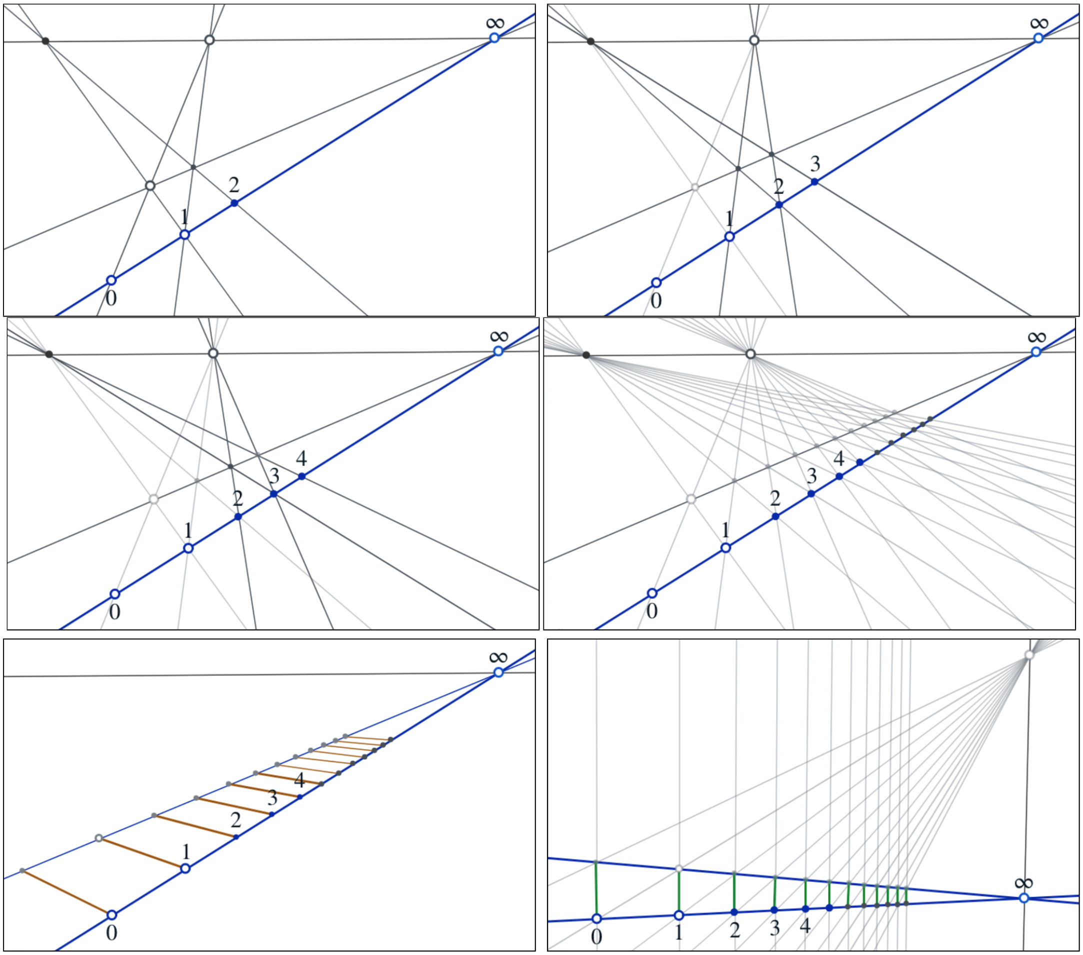

Figura 7: *Construcción de una sucesión armónica y dos instancias «realistas» de ellas.*

para donde volteemos en una ciudad, pues la proyección de una recta con marcas en intervalos constantes es una sucesión armónica, y, por supuesto, la construcción de una cuadrícula de la sección anterior está llena de ellas.

No es difícil ver que una vez que metimos a los números enteros en una línea a partir de tres puntos con base en la armonía, también deben entrar todos los números racionales al jugar con el cuarto armónico de otras ternas de estos mismos puntos. Por ejemplo, si en la construcción anterior el 0 y el ∞ deciden intercambiar sus papeles, se presenta entonces la «sucesión de inversos» $\{1/n\}$. A esta «cerradura armónica» se le llama la *red armónica* de la terna original.

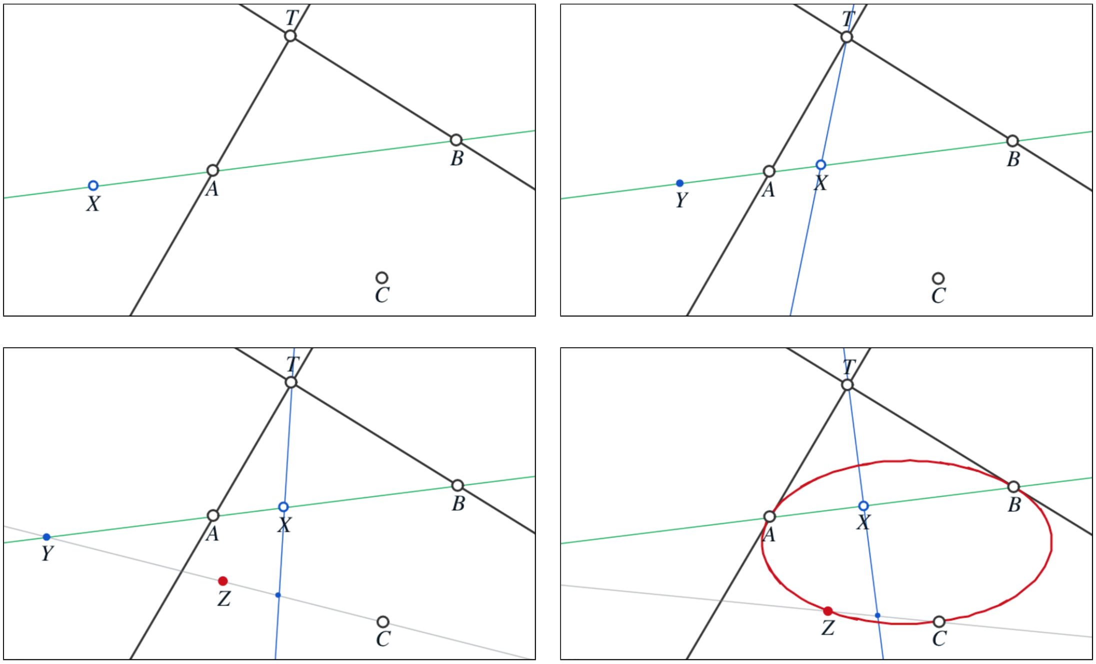

Figura 8: *Construcción de una curva armónica.*

4. Curvas armónicas y reglados

Parecería que si sólo tenemos rectas (si no hay distancias, coordenadas o compás) sólo se pueden dibujar composiciones rectilíneas, pero no es así. Podemos parametrizar una curva $\mathcal{C}$, que llamaremos *curva armónica* con un punto X variable dentro de una recta AB, usando dos veces a la armonía como herramienta. Primero, necesitamos establecer más datos para definir a $\mathcal{C}$. Uno de estos datos es otro punto C, por el cual deberá pasar la curva, y el último dato es un punto T, cuya gracia es que las líneas TA y TB serán *tangentes* a $\mathcal{C}$ en A y en B (Figura 8).

Sea Y el armónico de X respecto a A y B, y sea Z la *reflexión armónica* de C respecto a Y y la línea TX; es decir, Z es el armónico de C respecto a Y y $TX \cap CY$ en la línea CY. El punto Z dibuja a la *curva armónica* $\mathcal{C}$, parametrizada por X variando en la línea AB.

De nuevo, el encanto de esta construcción, además de su simpleza, no consiste en contemplar una instancia de ella, sino en poder moverla. Vemos en $\mathcal{C}$ a algo íntimo y nada nuevo para nuestra experiencia perceptiva, algo que vemos todos los días y a todas horas: elipses (aunque la figura también se puede deformar a hipérbolas). Pues resulta que $\mathcal{C}$ es una cónica. Pero aquí sí hay mucho por demostrar. En particular, hay otras definiciones para estas curvas que llamamos *armónicas* para no presuponer que son las cónicas y poder presentar este hecho como un teorema.

La siguiente definición de curva armónica está inspirada en una construcción con la que Hilbert y Cohn-Vossen empiezan su libro *Geometría e Imaginación* [2] y en un artículo de Germinal Pierre Dandelin [3] sobre el Teorema de Pascal, que es donde, además, introduce a sus famosas esferas.

Consideremos tres líneas rojas a, b, c en el espacio y tales que dos a dos no se toquen. Para cualquier punto A en la línea a ($A \in a$), el plano que generan A junto con la línea b corta a la línea c en un punto, digamos C. Entonces, la línea azul AC toca a las tres líneas rojas dadas.

Como podemos cambiar el orden en la construcción, esto implica que hay tantas líneas transversales a a, b y c como puntos hay en cada una de estas líneas. Si las consideramos a todas, dan una *superficie reglada* $\mathcal{S}$, cuyas *reglas* son las líneas (azules) transversales a las tres rojas. Definimos ahora a una *curva armónica* $\mathcal{C}$ como la intersección o *sección* de un plano π (verde) con la superficie reglada. Tenemos entonces que $\mathcal{C}$ está parametrizada por los puntos en cualquiera de las tres líneas rojas originales tomando la intersección X de cada regla con el plano.

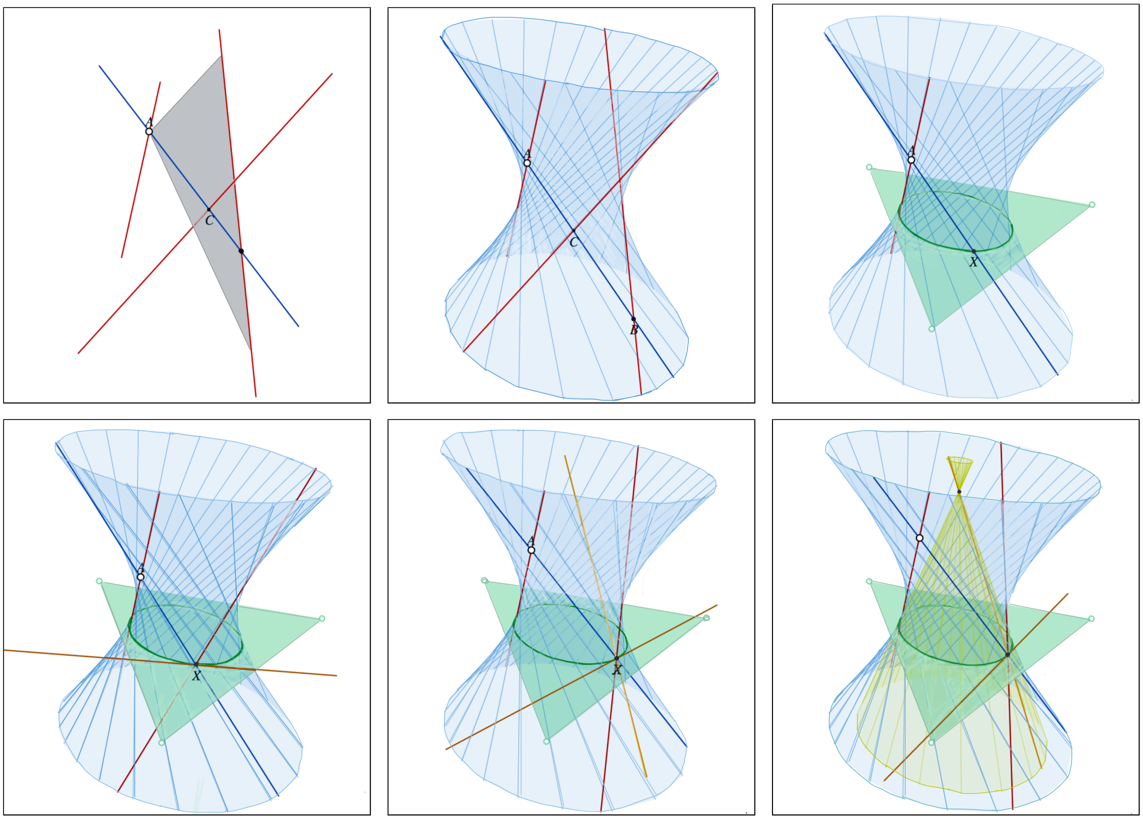

Figura 9: *Construcción de una superficie reglada, de una curva armónica como su sección por un plano, y de la polaridad plano-punto que determina.*

Pero además, también se pueden definir las líneas tangentes a las curvas armónicas, pues las superficies regladas están doblemente regladas. Tomando cualquier terna de reglas azules, sus transversales (que ahora pintamos de rojo) extienden a las tres originales y generan la misma superficie. Así que para cada punto $X \in \mathcal{C}$, tenemos una regla azul y una regla roja que definen un plano, el *plano tangente* a la superficie $\mathcal{S}$ en el punto X; su intersección con π determina la *línea tangente* a $\mathcal{C}$ en el punto X.

En el plano tangente a $\mathcal{S}$ en X, hemos dibujado tres líneas concurrentes (en el punto X). Así como hay una noción de armonía para puntos en una línea, también la hay para líneas concurrentes en un plano. Si se considera a la línea armónica a la tangente respecto a las dos reglas, para todo $X \in \mathcal{C}$ se obtienen líneas que concurren en un punto, llamado el *punto polar* del plano π respecto a la superficie $\mathcal{S}$. Desde el punto polar a π, se ve a $\mathcal{C}$ como si fuera el contorno de la superficie $\mathcal{S}$; la polaridad hace que las secciones se correspondan con los contornos, y que los cortes y lo que se ve como borde de la superficie sean las mismas curvas armónicas.

Se tiene además que bajo la reflexión armónica respecto a un plano y su punto polar, la superficie reglada se queda en su lugar, ya que se intercambian los reglados azul y rojo (con el plano verde como espejo). Esto tiene fuertes consecuencias para las curvas armónicas: además de venir asociadas a familias de rectas tangentes (sus *haces tangentes o envolventes*), heredan una noción de *polaridad* que asocia líneas con puntos y que se puede y se debe considerar como una generalización natural de la armonía. Es con base en estas ideas como se demuestra que la primera construcción de curvas armónicas que dimos y otras parecidas coinciden con la nueva.

Para definir, según el programa de Klein, a las geometrías euclidiana e hiperbólica dentro de la geometría proyectiva, las curvas armónicas (o cónicas) resultan ser esenciales. Aquí solo queríamos dejar sentado que sin métrica y sin álgebra también se les puede definir y trabajar; y que, enfocadas así, vienen con mucha tela de donde cortar.

5. Axiomas

Hemos dado ejemplos de razonamientos, construcciones y teoremas que sólo usan las nociones de incidencia con el ánimo de mostrar que no se apartan mucho de los argumentos geométricos clásicos, que hay cosas interesantes qué decir y que no necesitan herramientas sofisticadas. De hecho, en algún momento introdujimos al plano desarguesiano como extensión del plano euclidiano clásico para dar un crédito histórico importante y a la vez para dar la idea de que estamos trabajando dentro de esa misma tradición. ¿Qué tan distinta es esta geometría de la clásica? ¿Por qué nos da miedo introducirla a niveles preuniversitarios?

Desde Euclides, se acostumbra aclarar cuáles principios básicos se están usando, y esto es aún más necesario cuando se están violando los postulados clásicos. Así que concluimos con una somera discusión de la axiomática de la geometría proyectiva.

¿Qué es lo que hemos usado? Que hay *puntos*, que hay *líneas* (ciertos subconjuntos distinguidos de puntos) y que hay *planos*. Que al intersectar líneas coplanares se obtienen puntos y que los planos se intersectan en líneas. Y básicamente es todo. Veremos que los planos se puede definir con base en las líneas, y que no hay necesidad de incorporarlos a una definición axiomática.

Así que —en el mejor espíritu de Euclides— la ***Geometría*** en la que hemos estado trabajando se puede definir como un conjunto a cuyos elementos llamamos *puntos*, con una familia distinguida de subconjuntos llamados *líneas* o *rectas* que cumplen:

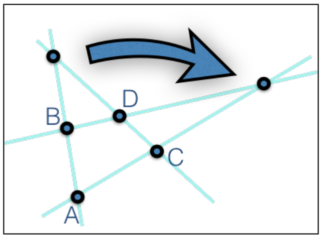

Figura 10: *El Axioma II da puntos como intersección de ciertas líneas.*

Axioma I. Por dos puntos distintos A y B pasa una única línea AB.

Axioma II. Dados cuatro puntos distintos A, B, C, D, si las líneas AB y CD se intersectan, también se intersectan las líneas AC y BD.

Axioma III. Existen dos líneas que no se intersectan.

Axioma IV. Cada línea tiene al menos tres puntos.

Este último axioma se plantea para evitar el caso en que las líneas consten de dos puntos, pues entonces cualquier conjunto (con al menos 4 elementos) con todas sus parejas declaradas como líneas calificaría como Geometría con el Axioma II, siendo cierto por triste vacuidad (no habría a quién aplicárselo). Pero este ejemplo no califica para asociarse al vocablo de gran abolengo: «geometría».

El Axioma III —y como consecuencia de los dos primeros axiomas que son los de batalla— es una manera elegante de decir, usando únicamente al concepto de línea, que hay al menos tres dimensiones.

El Axioma I es una forma concisa de escribir en un solo enunciado los dos primeros postulados de Euclides. El primero de ellos, aunque hable de líneas (y que literalmente es nuestro Axioma I), se refiere por el contexto a lo que ahora conocemos como segmento, ya que, en su segundo postulado, Euclides aclara que las «líneas» se pueden extender «tanto como se quiera» en las dos direcciones.

Nuestro Axioma II tiene el mismo propósito de encontrar puntos como intersección de dos líneas que el Quinto Postulado en el enunciado original de Euclides. Pero el criterio que se usa aquí, en vez de usar ángulos, es de simple incidencia. Que dos líneas se intersecten (hipótesis del Axioma II) equivale a que estén en un plano (aunque este concepto no esté aún definido formalmente) y entonces dice en el fondo que *«dos líneas en un plano siempre se intersectan»*. Elimina de tajo al paralelismo. Esto es lo que parece chocar con nuestra intuición, o mejor dicho, con lo que imponemos generación tras generación como lo que debe ser «nuestra intuición». Es tan válido este Axioma como el Quinto Postulado, ambos hablan de lo que debe suceder lejos de la pantalla (es una abstracción) y el nuestro es el que concuerda con cómo hay que dibujar los planos en perspectiva. Y además, si se fija a una línea (llámesele «el horizonte»), se recupera el concepto de paralelismo declarando «paralelas» a otras dos líneas cuando su intersección está en el horizonte.

Veamos ahora **¿qué es un plano?** La propiedad básica que los define es que un plano es *cerrado* bajo la operación de trazar líneas, es decir, que cuando tomamos dos puntos en él, toda la línea que definen también está contenida en él. Pero esto también lo cumple una línea o el mismo espacio (e inclusive un sólo punto, por vacuidad). Lo que diferencia a un plano de una línea es que tiene algo más, y lo que lo hace respecto al espacio tridimensional, es que éste también tiene algo más. Son parte de una jerarquía.

Si tenemos una línea ℓ y un punto P fuera de ella, el Axioma II implica (y para ello hay que usarlo dos veces) que la unión de todas las líneas que van de P a un punto en ℓ es cerrado bajo el trazo de líneas. (Obsérvese que esto no es cierto para el plano euclidiano: ahí, esta unión deja como hueco a la paralela a ℓ por P, sin P.) Así que podemos definir a un *plano* como un conjunto de la forma

$$\pi := \ell \vee P := \bigcup_{A \in \ell} (A \vee P),$$

donde $A \vee P$ es una nueva notación[1] para la línea AP, pues, por hipótesis, $A \neq P$. Resulta que cualesquiera tres puntos no colineales en el plano π lo definen como el mínimo cerrado que los contiene (y por tanto, tiene sentido escribir $\pi = A \vee B \vee C$). Resulta también que cualquier par de líneas en un plano se intersectan, y que cuando tomamos un punto fuera de un plano, de nuevo se cumple que la unión de las líneas del punto a puntos de ese plano es cerrado, y entonces lo debemos llamar un subespacio de dimensión 3. Los Axiomas I y II dan lugar al concepto de *dimensión* y al concepto asociado de *independencia geométrica* de puntos. De esta manera, el Axioma III dice que hay cuatro puntos (dos por cada línea) geométricamente independientes y, por tanto, que hay algo más que un plano.

[1] *Léase al símbolo «∨», como «cuña»: denota al* operador cerradura *para la operación de trazar líneas. Es el mínimo conjunto cerrado bajo trazo de líneas que contiene a la «unión».*

Con este tipo de ideas (que aparecen en muchas ramas de las matemáticas modernas), no es difícil demostrar que dentro de un espacio de dimensión 3, dos planos cualesquiera se intersectan en una línea y que una línea y un plano que no la contiene se intersectan siempre en un punto. Esto se usó en el Teorema Armónico y en la construcción de las superficies regladas.

Hemos trabajado con dibujos como se haría en la secundaria, como apoyo gráfico a las ideas. Es ese el sentido que se le da a enseñar geometría, que los razonamientos abstractos cobren concreción en los dibujos. Pero estas figuras, hechas en el plano o espacio desarguesiano, a veces llevan a suponer de más, y se vuelve un interesante ejercicio crítico detectar cuándo.

Un ejemplo de ello es el último dibujo de la Figura 4, el cual hace suponer implícitamente que el cuarto armónico Y es distinto de X. Sin embargo, eso es algo que no se puede demostrar con los axiomas. Si $Y = X$ se obtiene, de esa misma figura, un plano con 7 puntos y 7 líneas (ya no es posible dibujar derechita, como recta clásica, a la última) llamado el plano de Fano, que cumple con los cuatro axiomas. Igualmente, tampoco se puede demostrar que una sucesión armónica sea infinita: la *característica* de una geometría se define como el tamaño de estas sucesiones o se declara *cero* si sí son infinitas. Además, hay geometrías (en particular las geometrías finitas que han resultado importantes para la criptografía), de característica distinta de cero: la de Fano tiene característica 2, y las curvas armónicas, como las tratamos aquí, tienen sentido para característica distinta de 2, y la geometría proyectiva real (o desarguesiana) tiene característica 0 (de ahí que en los dibujos entran bien los enteros y los racionales en las rectas).

El otro momento donde se debe suponer algo más que los cuatro axiomas es cuando se da como un hecho que las superficies regladas son doblemente regladas. Esto no es demostrable en característica 0; tiene que ser asumido como nuevo axioma que llamamos:

Axioma V (del equipal). Tres rectas en posición general (que no se intersectan por pares) son parte de un único reglado.

Si es así, al tomar tres rectas cualesquiera (azules) del reglado transversal a tres rectas en posición general (rojas), el reglado que se obtiene es único (pues contiene a las rojas). Por tanto, una superficie reglada es doblemente reglada. Resulta que este axioma es equivalente al famoso Teorema de Pappus (cuyo enunciado es plano).

En el cambio de siglo del XIX al XX, cuando aún estaba viva la ilusión (pre-Gödeliana) de que la matemática encontraría un sistema axiomático único y completo, David Hilbert publicó su librito *The Foundations of Geometry*, [1], en el que presenta un sistema de veinte axiomas para la geometría euclidiana (los 5 axiomas de Euclides «chuparon faros»), pero hay que aclarar que de aquellos veinte, sólo ocho eran de incidencia; los otros doce axiomas se referían al orden y a la continuidad en las rectas, con lo cual se les modelaba para ser copias de la recta real. En ese trabajo, el afán manifiesto de Hilbert era aritmetizar la geometría para llevarla cuanto antes a sus cauces algebraicos establecidos y, efectivamente, lo logra con veinte axiomas. Nunca toma en cuenta que, hacía ya un cuarto de siglo, Felix Klein había publicado su programa de Erlangen, en el que unifica a *las geometrías* dentro de la geometría proyectiva, ni tampoco los avances sobre la fundamentación axiomática de ésta. Como Hilbert era, y sigue siendo, Hilbert, ese trabajo mata en buena medida a esas tendencias. Quizá esté llegando el momento de revivirlas, revalorarlas y regodearse con ellas (antes de aritmetizar), para acercar más la percepción colectiva de las matemáticas hacia sus venas geométricas, artísticas y gráficas tradicionales.

Referencias

[1] David Hilbert, *The Foundations of Geometry*, (1899) en alemán. Primera traducción al inglés por The Open Court Publishing Company (1902).

[2] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination* (1922). (2nd ed: Providence, R.I.: AMS Chelsea Pub (1999))

[3] Germinal Pierre Dandelin, *Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon*. Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, T. III., (1826).