

Geometría Visual

las matemáticas que surgen
de cómo vemos al mundo

José Luis Abreu y Javier Bracho

19 de octubre de 2019

Índice general

I	Presentación	2
1	Perspectiva y movimientos	3
1.1	Cuadrículas en perspectiva	6
1.1.1	A partir de una loseta	7
1.1.2	Con horizonte fijo	11
1.1.3	Las recetas de Alberti	13
1.2	Movimientos	16
1.2.1	Traslaciones y transformaciones lineales	16
1.2.2	Movimientos rígidos	18
1.2.3	Movimientos hiperbólicos	20
1.3	Geometría proyectiva	26
1.3.1	Proyecciones	26

1.3.2	El otro lado del horizonte	28
1.3.3	Espacio (y Plano) Desarguesianos	31
1.3.4	Cubo en perspectiva	34
2	Armonía	38
2.1	Motivación y definición	39
2.1.1	Refinamiento de la cuadrícula	39
2.1.2	Construcción del cuarto armónico	41
2.2	Principios básicos	45
2.2.1	Teorema Armónico	45
2.2.2	Invarianza bajo proyecciones	48
2.2.3	Simetría de la armonía	50
2.2.4	Sucesiones armónicas	52
2.3	Reflexiones Armónicas	54
2.3.1	Definiciones	54
2.3.2	Líneas van en líneas	57
2.3.3	Configuración del cuadrángulo extendido (y grupos)	58
3	Curvas Armónicas y Reglados	65
3.1	Curvas Armónicas	67
3.1.1	Curvas armónicas y polaridad	67
3.1.2	Haces envolventes	71

3.1.3	La elipse de una loseta	74
3.1.4	Parábolas	76
3.1.5	Hipérbolas	78
3.2	Superficies regladas	80
3.2.1	Reglados	80
3.2.2	Construcción de Hilbert-CohnVossen	82
3.2.3	Axioma del Equipal	83
3.2.4	Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes	85
3.3	Polaridad	87
3.3.1	En reglados	87
3.3.2	Compatibilidad con la incidencia	92
3.3.3	En curvas armónicas	95
4	Las geometrías planas rígidas	98
4.0.1	El Plano Kleiniano	98
II	Formalización	103
5	Axiomas y dimensión	104
5.1	Axiomas de la Geometría Proyectiva	104

5.1.1	Revisión de armonía	108
5.1.2	Plano de Fano y planos proyectivos	110
5.1.3	Configuración 13-13 y la característica	112
5.2	Planos	116
5.2.1	Definición	116
5.2.2	Intersección en 3D	121
5.2.3	Teoremas de Desargues y de Armonía	123
5.2.4	Dualidad	123
5.3	Geometrías proyectivas de campos	123
5.3.1	La geometría proyectiva de un espacio vectorial	123
5.3.2	Planos pequeños y característica	128
5.3.3	El plano proyectivo real y ProGeo3D	134

Parte I

Presentación

Capítulo 1

Perspectiva y movimientos

Porque le pegó al clavo de cómo vemos al mundo, la **perspectiva** es una de las aportaciones culturales máspreciadas y características del Renacimiento. Entendámosla por el momento como una serie de técnicas que ayudan a los artistas a plasmar escenas tridimensionales en lienzos planos, con tal realismo que al estar frente a sus cuadros, nuestro cerebro reconstruye la escena original: nos hace sentir que estamos “ahí” al intuir o recuperar esa “profundidad” que, en principio y hasta antes de esa época, se perdía por eliminar a una dimen-

sión. Estas técnicas o recetas, que involucran a líneas (como *el horizonte*) y a puntos (como los *puntos de fuga*) abstractos –en el sentido simple de no ser parte de la “realidad inmediata”– se derivan de tener muy, muy claro *¿qué es pintar?* aderezado con algunos granitos de geometría elemental. Esto quedó plasmado en el libro icónico de la revolución pictórica renacentista, *Della pittura*, en el que su autor Leone Battista Alberti (1404-1472) explica y desarrolla en lenguaje vernáculo –cuando lo usual era aún escribir en latín– las ideas al respecto de

su maestro Filippo Brunelleschi (1377-1446) y de los gremios de arquitectos y artistas que florecen orgullosos en la Florencia del siglo XV.

Los pintores renacentistas –entre los que destacan el también florentino Leonardo (1452-1519) y el holandés Durero (1471-1528)– y aún en la actualidad los arquitectos y los pintores realistas, se basan en aquellas técnicas de la perspectiva para presentar sus proyectos o componer sus cuadros. Esas técnicas tienen como fundamento a la geometría euclidiana, que es la que explica métricamente a nuestro entorno inmediato. Así que en su libro, Alberti se apoya en la autoridad intelectual de “los matemáticos” para zanjar, o en ocasiones de plano esquivar, discusiones complicadas respecto a los *por-qué*s de las recetas que propone. Y es natural esa reticencia, pues al exponer los argumentos, surgen problemas filosóficos serios que ponen en duda la concepción común de lo que es la geometría. En particular, es ineludible mencionar al *infinito* –y en ese entonces ni los matemáticos se sentían seguros pisando ese resbaloso terreno–, o bien, a veces parece que se es-

tá cuestionando al Axioma de las Paralelas de Euclides –aún “sacrosanto” en aquella época. En fin, se ve que Alberti sentía complicada la argumentación precisa y deductiva. Y entonces, como sucede mucho en la enseñanza de las matemáticas, opta por dar recetas y aleccionar en procedimientos, más que en buscar el entendimiento de los razonamientos que los implican.

Así que pasa más de un siglo para que el matemático francés Girard Desargues (1591-1661) agarre a ese toro –el de la argumentación sistemática y formal de la perspectiva– por los cuernos. Se le considera el padre de la *Geometría Proyectiva* pues, además de su teorema seminal, propone ampliar, en abstracto, al Plano Euclidiano para que los horizontes y los puntos de fuga se incorporen con plenos derechos a la teoría geométrica; llamaremos a ese plano extendido el *Plano Desarguesiano*. Pero sucedió que su trabajo no tuvo eco inmediato entre los matemáticos –y aún no alcanza la presencia que le corresponde en la cultura científica general.

Pasan otros dos siglos para que las ideas de Gi-

rard Desargues reciban la atención de otros matemáticos y se afianzen como teoría geométrica. Una buena razón histórica para que sucediera así –para que pasara tanto tiempo– es que un paisano contemporáneo de Desargues, llamado René Descartes (1596-1650), coordinatiza al Plano Euclidiano. Surge –simultáneamente a la Proyectiva– la *Geometría Analítica* basada en el *Plano Cartesiano* (el que usa coordenadas) y da trabajo de sobra al gremio matemático: el interés general se concentra en esta vertiente de la geometría que se roba los reflectores de la historia. (Y con sobrada razón pues pronto, con Isaac Newton (1642-1726) y Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz (1646 -1716), surge el Cálculo para el cual el método de coordenadas es esencial, como también lo sería en la conquista de las muchas dimensiones).

Cuando, ya de regreso en el siglo XXI, se presentan los argumentos que explican las técnicas de la perspectiva con figuras interactivas o dinámicas, irrumpe en la escena un concepto que ha sido fundamental en la historia más reciente de las matemáticas: los **movimientos**. Las computadoras

han realizado el sueño de ilustrar teoremas o construcciones geométricas con figuras que no son una instancia única y estática de ellos congelada en el papel, sino que se mueven a voluntad en la pantalla y entonces, en principio, se puede transitar por todas las instancias a las que se refieren. Estas *figuras dinámicas* se acercan un poco más a la generalidad que pretende un razonamiento geométrico, o lo ilustran mejor. Pero, como pronto veremos, algo inesperado sucede con las construcciones en las que se basa la perspectiva renacentista. No sólo se mueve una figura geométrica plana y abstracta, sino que nuestro aparato perceptivo se involucra tercamente e interpreta mucho más: insiste en convencernos que algo se mueve en el espacio. Nos parece que se está moviendo caprichosamente todo un plano y, a la vez, que ese plano se está transformando internamente.

En el siglo XIX, las matemáticas ampliaron su abanico de objetos de interés; entre estos nuevos entes, destacan los *grupos* asociados al estudio de la *simetría*, y en particular los *grupos de*

Lie¹ que son los que acogen y agrupan –valga la redundancia– a los movimientos geométricos (los internos de un plano) de los que estamos hablando. En su famoso *Programa de Erlangen* que data de 1875, Christian Felix Klein (1849-1925) hace énfasis en que estos grupos de movimientos son los que le dan su carácter distintivo a las diversas geometrías que, para ese entonces, ya se habían descubierto; y además, que hay modelos de todas ellas dentro de la Geometría Proyectiva que inició Desargues. Lo que distingue a los modelos son los *subgrupos* de movimientos a considerar.

Darle un sentido vivencial y visual a esto que acabamos de describir históricamente es el objetivo del Capítulo 1, y lo desarrollaremos matemáticamente en los siguientes tres capítulos.

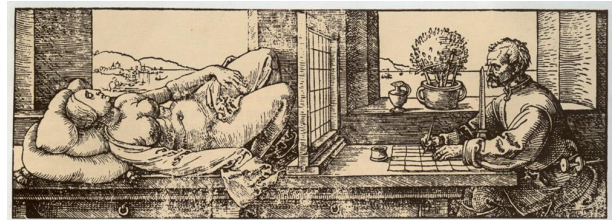
¹El nombre es en honor a Marius Sophus Lie (1842 – 1899), matemático Noruego que empezó su estudio.

1.1. Cuadrículas en perspectiva

Para los renacentistas, según el libro de Alberti:

Pintar es el arte de plasmar en un lienzo lo que ve –o debería ver– el pintor ante una escena real –o imaginaria.

Y para precisar qué va en cada punto del cuadro, basta fijar la escena, el plano del lienzo y el ojo del pintor.



Este grabado de Durero, ilustra con claridad esta intención y una técnica para lograrlo (con un cuadro de difícil perspectiva) en la que se usan cuadrículas, tanto en el plano que será el del lienzo como en el papel en el que se está dibujando un primer boceto.

Con escenas más abiertas, que incluyen personajes y objetos a distintas profundidades, se pueden usar otras técnicas. Para saber en qué lugar del lienzo y con qué escala hay que dibujar algo en la escena, es conveniente saber cómo se deben dibujar en perspectiva las cuadrículas. Pues los planos cuadriculados permiten situar con precisión a cualquier objeto en él –usando el método que hizo ilustre a Descartes: prefijar un cuadro como *origen* o “la base”, y determinar cuántos cuadrados en cada una de las dos direcciones de la cuadrícula hay que moverse desde la base para llegar al punto deseado.

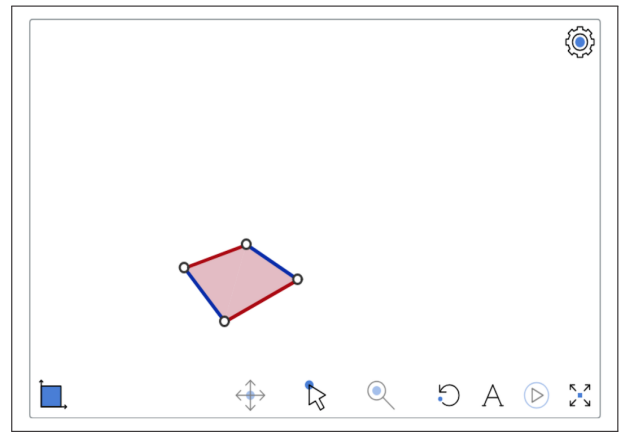
1.1.1. A partir de una loseta

Enfrentemos primero al “problema del pintor”. Consiste en que un pintor nos entrega en un lienzo, el dibujo –a ojo de buen pintor– de una de las losetas cuadradas de un mosaico en el piso (la *loseta básica*, llamémosla) y nos pregunta ¿cómo dibujar al resto del mosaico?

Un cuadrilátero dibujado en el lienzo, o pantalla,

consiste de cuatro segmentos que son sus *lados*. Hemos pintado de rojo a un par de lados opuestos y de azul al otro par. Nos dan las dos direcciones principales (o ejes) de la cuadrícula.

Al trazar las líneas que corresponden a los lados opuestos de la loseta básica, éstas se intersectan en dos nuevos puntos que hemos denotado H, de “infinito horizontal” y V de “infinito vertical”. Y por estos puntos hemos trazado una nueva línea que llamaremos *horizonte* y que depende de la loseta



básica.

Una de las diagonales del cuadrángulo corta al horizonte en un punto D , de “infinito diagonal”. Estos tres puntos en el horizonte que hemos bautizado “Infinito de Tal” son tres de los famosos “puntos de fuga”.

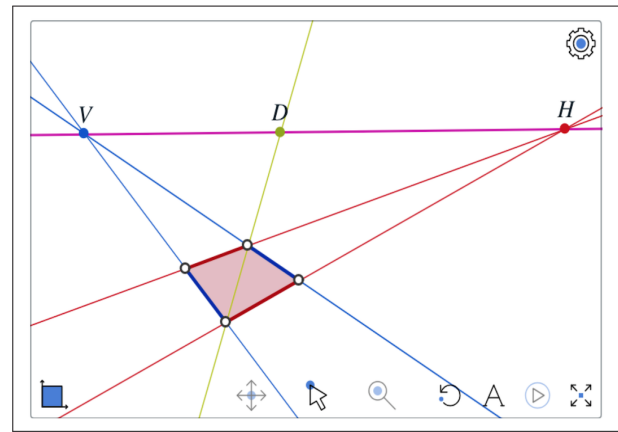
Pero de hecho:

cualquier punto de la línea al horizonte es un punto de fuga.

Para verlo, hagamos un experimento mental de esos que usaba Einstein. Supongamos que la loseta básica es el dibujo de una loseta en un piso infinito sobre el que estamos parados. Mandemos a una pareja, agarrada de la manita, a caminar en una dirección fija sobre el piso ¿Qué vemos? Por supuesto: que se hacen chiquitos. Ellos caminan tan campantes sobre líneas paralelas en el piso, pero en el lienzo tienden a convertirse en un punto del horizonte; y además, cualquier otra línea paralela a las suyas se dibuja como línea que también incide en ese punto (basta pensar en un tercer personaje viajando a su misma velocidad por esa otra

paralela: sus distancias “reales” se mantienen fijas, pero en el lienzo se encogen). Entonces los haces de líneas paralelas en el piso se ven (y por tanto se deben dibujar) como haces concurrentes en un punto de su línea horizonte; los puntos en ella corresponden a distintas direcciones: son sus puntos de fuga.

De este hecho se deduce un procedimiento para extender el dibujo de la loseta básica al de todo el mosaico, o cuadrícula, que determina.



La línea diagonal de la siguiente loseta (en dirección a H) tiene que ser la línea que va al punto D desde la esquina inferior (en esa dirección a H) de la loseta básica. Esto nos da al vértice superior de la loseta siguiente. Desde ahí debe dibujarse la siguiente línea vertical (a V); y entonces, su intersección con la otra diagonal es un nuevo punto desde el cual podemos trazar al otro infinito, el horizontal, H... y esto nos produce un nuevo punto para repetir el proceso.

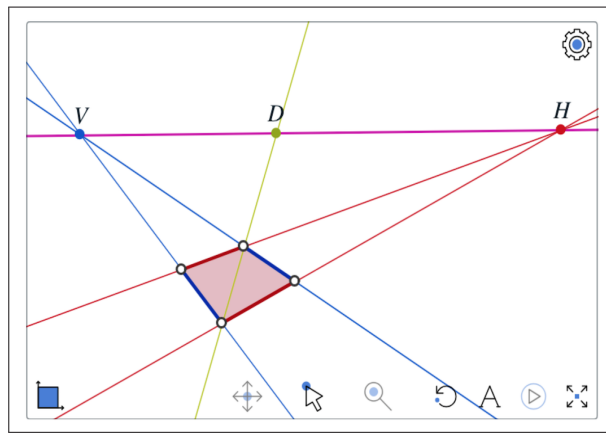
Se puede seguir así, en escalerita, trazando líneas hacia V y hacia H desde puntos que se alternan en las dos diagonales hasta donde sea necesario.

E inclusive, la técnica de la escalerita se puede implementar para extender la cuadrícula hacia atrás.

¡Ahora sí! Es importante que el lector se involucre y juegue con la figura dinámica para percibir aquello que decíamos en la introducción sobre los movimientos. Los cuatro puntos iniciales son variables (se distinguen por estar pintados con círculitos más que con bolitas sólidas) y todo lo de-

más de la construcción (líneas, segmentos y puntos) depende de ellos, de su posición. Muévalos con el dedo o el ratón; basta *seleccionarlos* y *arrastrarlos*.

Se puede ampliar la imagen para abarcar toda la pantalla, pulsando al icono correspondiente y en cualquier momento, pulsando el icono de “retorno”, se puede regresar a la posición inicial –la que escogieron los autores y se puede llamar “el andamio constructivo de un piso” .



Es importante que el lector mueva la construcción para que sea el andamio constructivo de:

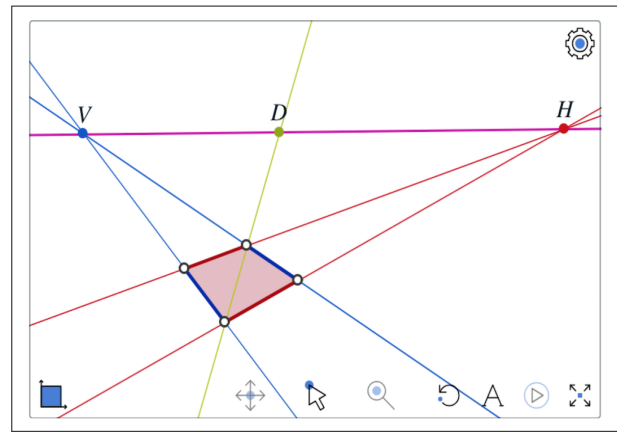
- a)** un techo;
- b)** una fachada (haciendo paralelos y verticales a dos de los lados opuestos), y pasar de la vista de ella en nuestro lado izquierdo a la vista de la fachada en el lado derecho moviendo tan solo a uno de los puntos libres, y en particular
- c)** una cuadrícula euclidiana (haciendo paralelos a ambos pares de lados opuestos y a estos, ortogonales).

También se le pueden añadir objetos geométricos a la construcción (e inclusive modificarla o reconstruirla paso a paso) pulsando al icono de “trabajo”, abajo a la izquierda. Al hacerlo, aparecen menús de herramientas a la derecha (para construcción) y abajo (de apariencia y navegación). Hasta ahora, solo hemos usado las tres herramientas constructivas de hasta abajo (para “crear puntos y líneas”, de “intersección” y de “segmentos”).

En este momento –que tenemos trazada una cuadrícula y podemos acceder a sus múltiples puntos de intersección– un buen ejercicio para fa-

miliarizarse con *ProGeo3D*, es trazar varias líneas con una misma “pendiente” por ejemplo la 2 : 1 (es decir, 2 cuadrados en la dirección horizontal –hacia H– y uno en la vertical –hacia V–) o bien la 1 : 2 para ver que efectivamente concurren, como argumentamos a la Einstein, en el horizonte.

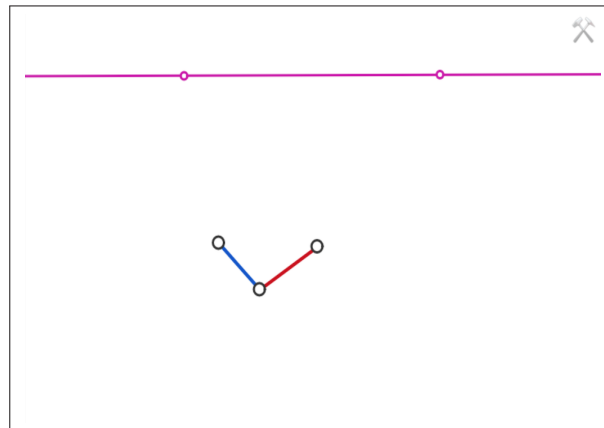
Toda la construcción se mueve siguiendo el movimiento de uno de los puntos libres y, como decíamos en la introducción al capítulo, sentimos que un plano se bambolea en el espacio a la vez que la



cuadrícula dibujada en él se deforma. No es fácil controlarlo, pues no es obvio o intuitivo predecir qué pasará con la imagen; sentimos cierta torpeza pues sólo podemos mover un punto a la vez. De hecho, son ocho los grados de libertad –dos por cada punto libre en la pantalla– que hay para moverse dentro de estas figuras (o grupo de movimientos) y ahí, solo se nos permite movernos en direcciones muy rígidas, sin fluidez, como si en un plano solo se nos permitieran movimientos horizontales o verticales y en tramos grandes; en esas condiciones, podríamos trazar solo escaleras y garabatos llenos de esquinas. Sin embargo, aunque los movimientos de las figuras difícilmente correspondan a una vivencia real, es innegable que nuestro cerebro nos hace sentir tridimensionalidad; interpreta –y quiere que veamos– que un plano cuadrículado se mueve en el espacio.

1.1.2. Con horizonte fijo

Para ganar control sobre los movimientos, podemos cambiar a uno de los cuatro puntos varia-



bles de la loseta básica por su horizonte.

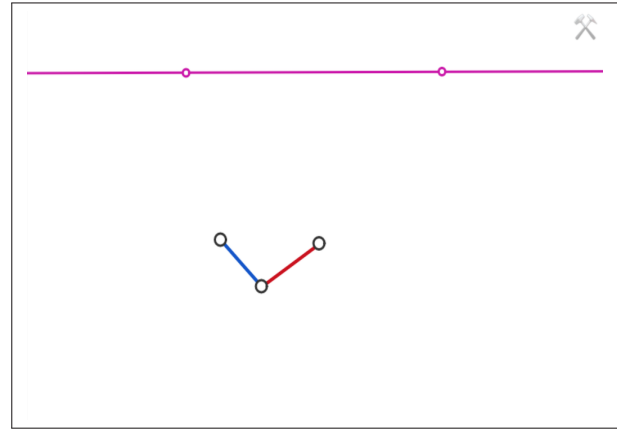
Consideremos una línea (controlada por dos puntos, pero dejémosla fija): asumirá el papel de *horizonte*. Para determinar cómo se ve una cuadrícula en el piso (el horizonte debe estar horizontal), nos basta ahora con tres de los puntos de la loseta básica. Uno de ellos ya es una esquina y jugará el papel de *origen* de dos *vectores* o segmentos dirigidos.

Las líneas del origen a los otros dos vértices, cor-

tan al horizonte en los puntos H y V que, como antes, serán los puntos de fuga de las dos direcciones básicas de la cuadrícula. De ellos, podemos trazar líneas al otro punto (así se deben dibujar en el lienzo esas rectas que son paralelas en el piso), y su intersección nos da al cuarto vértice de la loseta básica.

De aquí, procedemos como antes (encontrando al “infinito diagonal” D, trazando otra diagonal a él, y luego dibujando líneas alternadamente a H y V en escalerita) para extender la cuadrícula hasta el tamaño que queramos.

Ahora, se distinguen con más claridad los movimientos internos del plano (cambios en la cuadrícula), de lo que nuestro cerebro interpreta como movimientos **del** plano como un todo en el espacio. Para ver a los primeros, hay que mover a los puntos libres (con seis grados de libertad). Y para ver los segundos hay que mover al horizonte (que absorbe los otros dos grados de libertad originales): sentimos entonces que, siguiendo a esa línea, se mueve un plano en el espacio; aunque su cuadrícula también se deforma internamente pues

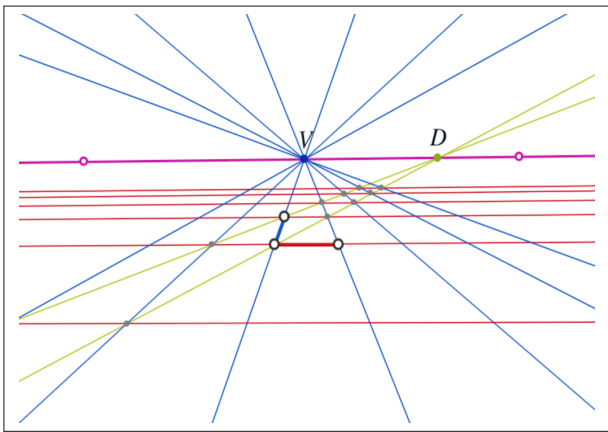


cambia la posición relativa de sus puntos básicos –se incomoda nuestra intuición del mundo real ya que, a diferencia de lo que vemos cotidianamente, el plano no parece moverse de manera rígida.

Vale la pena volver a llevar la construcción a que parezca una fachada vertical (hay que hacer vertical al horizonte y a una de las direcciones básicas) y entonces, moviendo a uno solo de los puntos libres, se puede experimentar con la altura relativa del observador (desde qué piso se está viendo al

edificio).

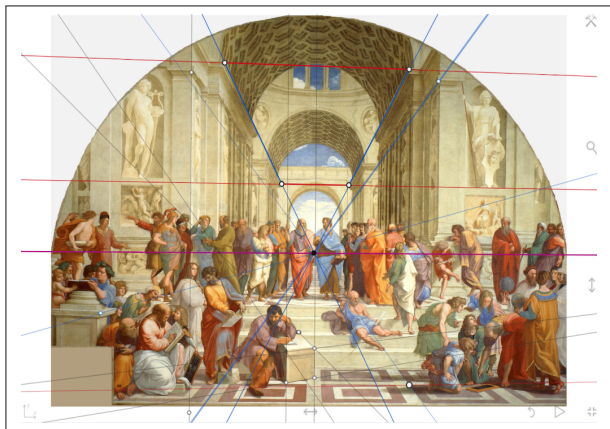
Lo que no se puede lograr es que la cuadrícula se haga euclidiana, como lo hicimos en la construcción anterior, pues ahora el horizonte siempre está en la pantalla (o cerca de ella si acaso se le expulsa con el efecto “zoom” o “lupa”).



1.1.3. Las recetas de Alberti

Ésta última construcción es muy cercana a las recetas para pintar con buena perspectiva que proponía Alberti en *Della Pittura*. Él decía que lo primero que hay que hacer para preparar un cuadro, es trazar en el lienzo una línea “horizontal a la altura de los ojos” (que es la que hemos llamado horizonte) y luego, dibujar bajo ella a una cuadrícula (que llamaba pavimento) para determinar la profundidad.

En nuestro caso, se logra poniendo también horizontal la dirección al punto H (entonces H sale de la pantalla y se va, literalmente, al infinito) y situando a V en el centro del horizonte, justo frente al ojo teórico del pintor-lector. Con base en esta cuadrícula, ya se pueden deducir las escalas que se deben usar en el cuadro para las distintas profundidades en la escena. Por supuesto, esta preparación del lienzo casi nunca aparece en la versión final del cuadro; es auxiliar para la composición, por lo cual la estamos llamando *andamio constructivo*.



Sin embargo, hay cuadros famosos como *La escuela de Atenas de Rafael*, en los que el cuadro mismo se acerca mucho a la receta de Alberti. Véanse los cuadrados en el piso. Es interesante jugar con líneas sobre este cuadro; y para eso, hemos añadido a varias rectas movibles.

Cada porción de plano en la escena (por ejemplo, una pared, un piso, un techo o una puerta entreabierta) genera a un plano –su continuación en todas sus direcciones, abstracta e infinita– y como

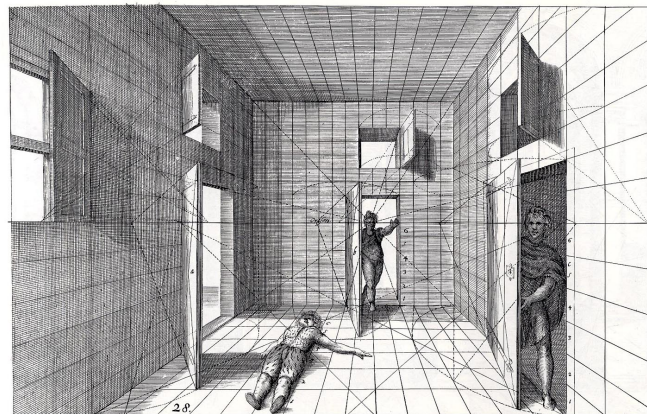
tal define su *línea horizonte* en el lienzo. Es donde lo interseca el plano paralelo que pasa por el ojo del pintor; justo ahí donde veríamos que se “acaba el plano” si en realidad fuera infinito, ya que al girar la vista un poquitito más dejaríamos de verlo pues el rayo “de atención” que sale de nuestro ojo ya no le pega.

Pero más aún, el punto de fuga de cualquier línea (y conviene insistir otra vez, no es que haya líneas en la escena real pero sí hay muchos segmentos que generan, cada uno, su línea abstracta) es donde interseca al lienzo la línea paralela (y también abstracta) trazada por el ojo; ahí dónde estaríamos enfocando al infinito (hipotético) de la línea –justo ahí dónde debemos voltear cuando se nos señala una estrella: el índice y el ojo del que señala definen una línea, pretende que enfoquemos y pongamos atención en la dirección paralela.

Así, el horizonte que traza Alberti es la línea correcta (horizontal y a la altura de los ojos). Es la línea horizonte del plano que define el piso, pero también lo es del techo y de cualquier otra porción de plano horizontal que aparezca en la esce-

na –una mesa o un escalón, por ejemplo. Y el centro de esa línea (donde habíamos puesto nuestro punto V) es el punto de fuga de todas las líneas perpendiculares al lienzo (las de la dirección de la profundidad) cuando suponemos que el lienzo es vertical y que el ojo del pintor está frente al centro del cuadro.

En el grabado atribuido a Alberti que reproducimos aquí, se muestra que tenían claro, al menos él y su maestro Brunelleschi, cómo es que las líneas paralelas (de las puertas y ventanas entreabiertas) deben dibujarse convergiendo a puntos de la línea horizonte que comparten el piso (del cuarto) y el techo, y que al pasar por los ojos de dos personajes implica que el pintor está a su altura. Pero además, también sabían cómo se deben trazar los círculos y podían deducir proporciones de personajes no verticales. Sin embargo, hay un error de perspectiva: el piso que se ve tras dos de las puertas entreabiertas debía de concluir a la altura de los ojos de los personajes, pues es el horizonte.



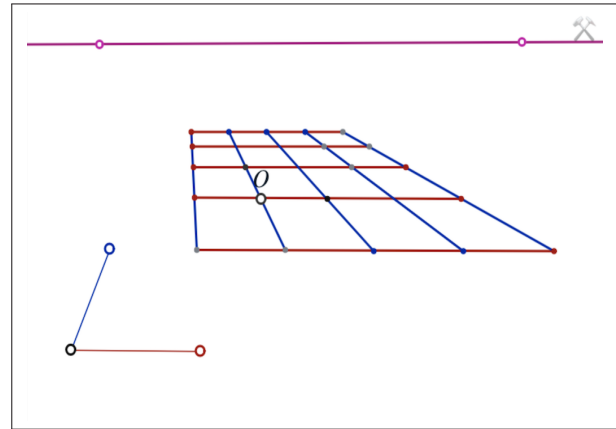
1.2. Movimientos

Dejando por un rato a la perspectiva, regresemos a los movimientos.

Si el lector hizo su tarea, deambulamos ya dentro de dos grupos al mover las escenas anteriores. En la primera escena, que depende de cuatro puntos libres (la loseta básica), viajábamos por los *movimientos proyectivos* o *projectividades* que tienen dimensión 8. Y en la siguiente escena, con el horizonte fijo, deambulábamos por su *subgrupo* de los *movimientos afines* o *afinidades*, que tiene dimensión 6. Se pueden pensar a estos como movimientos de un plano euclidiano (el piso), pero vistos, o dibujados, en perspectiva. Veremos ahora que este último grupo se puede descomponer en dos.

1.2.1. Traslaciones y transformaciones lineales

En esta construcción, al mover al punto O vemos que se traslada un rectángulo dentro de un



plano horizontal visto en perspectiva; nos movemos ahora dentro del *grupo de traslaciones* del plano que tiene dimensión 2. Y este grupo sí que está registrado en nuestra experiencia visual, y desde nuestra más tierna infancia; piénsese, por ejemplo, en empujar un libro sobre una mesa.

Por otro lado, al mover los puntos rojo y azul en la esquina inferior izquierda, se deforma la geometría del rectángulo –que, más precisamente, es un paralelogramo–, y siguiéndolo a él cambia la geo-

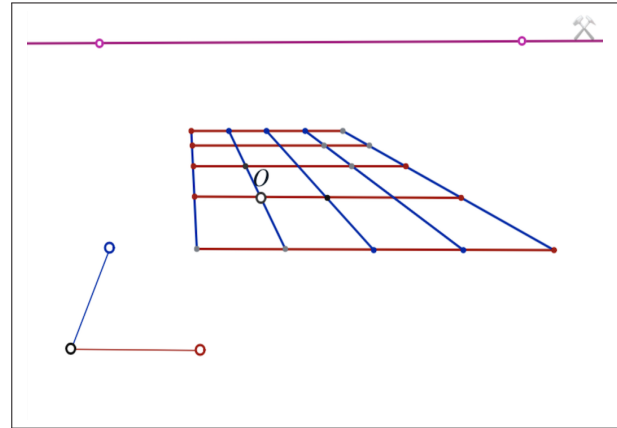
metría de todo el plano. Tenemos 4 grados de libertad y, pensando que el punto O es el origen del plano, este grupo de movimientos es conocido como las *transformaciones lineales*. Así que las transformaciones afines (las de la escena anterior) son las lineales compuestas con las traslaciones, pues lo único que ha cambiado es la manera de controlar estos movimientos.

¿Cómo se logra esta construcción?

El punto clave es que con el horizonte fijo, podemos trasladar. Los segmentos dirigidos (o *vectores abstractos*) que rigen la geometría del plano se pueden trasladar a cualquier punto O en el plano, pues, como ya vimos,

las paralelas del piso se dibujan como líneas que se intersectan en el horizonte.

Así que se traza la línea del “origen abstracto” a O y del punto de fuga de esta línea, o dirección, se trazan líneas a los extremos de los dos vectores. La dirección de los vectores trasladados se obtiene, de nuevo, de sus dos puntos de fuga en el horizonte, y entonces, los puntos de intersección co-



respondientes nos dan los extremos de los vectores trasladados.

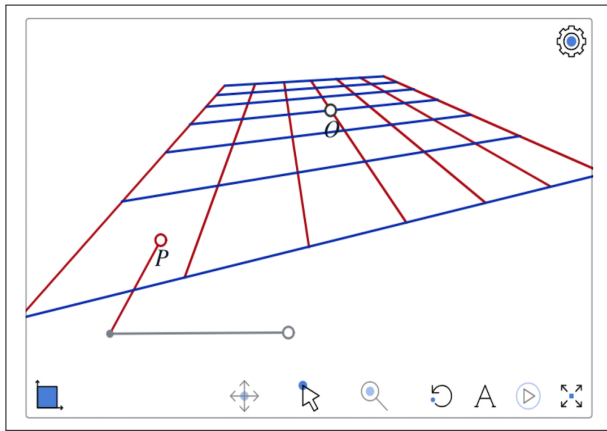
Ya tenemos los tres puntos de la loseta básica y el horizonte, así que de aquí en adelante se traza la cuadrícula en escalerita como antes.

Finalmente, se trazaron segmentos en vez de las líneas del andamio constructivo y se ocultaron los colores de las construcciones auxiliares, para dar la sensación de movimientos reales con las traslaciones. (En el menú de colores, los colores que

tienen tache están ocultos y se les puede pintar, u ocultar, volviendo a pulsar el color –y teniendo activa la herramienta “explorar”.)

1.2.2. Movimientos rígidos

Los movimientos que nutren nuestra basta experiencia geométrico-espacial, son los rígidos. Los que no cambian distancias entre puntos. Mover cualquier objeto involucra a uno de ellos. Pues to-



dos sus puntos pasan a otro lugar en el espacio, y lo común es que en los sólidos no se alteren las distancias entre sus componentes, y de aquí el uso de la palabra “rígido” para estos movimientos.

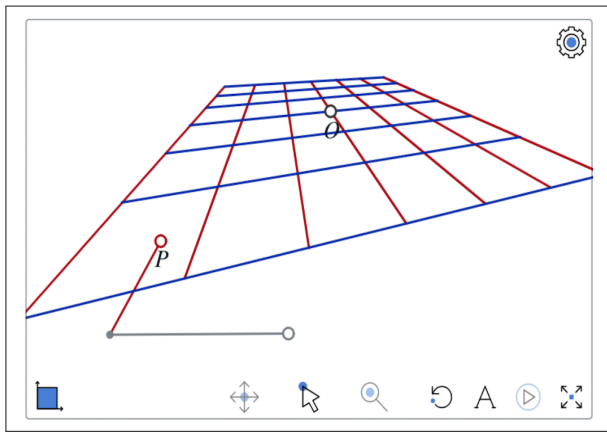
A sus análogos abstractos en el plano también los llamamos movimientos rígidos. Las traslaciones son un ejemplo que ya vimos y el otro ejemplo básico son las rotaciones: fijar un punto (que trabaje como tachuela) y girar al plano a su alrededor un cierto ángulo. Mover, por ejemplo, un libro sobre una mesa, generalmente involucra a ambos tipos de movimientos. Y más aún, cualquier movimiento rígido en el plano queda especificado con estos dos datos (ángulo de rotación y vector de traslación)².

En esta escena se controlan los movimientos rígidos de un plano visto en perspectiva con dos puntos: uno llamado O (y negro como en la escena anterior) que da las traslaciones de un cuadrado, y otro, P (rojo), que hace girar una línea alrededor

²Donde –hay que especificar para los que saben– estamos suponiendo que los movimientos preservan orientación

de un punto fijo y con ello, controla a la rotación alrededor de O .

Hay un tercer punto de control, el gris, que se mueve en una línea horizontal y actúa como *homotésia*, es decir, “zoom” o amplificación-disminución alrededor de O . Tiene el efecto de hacernos sentir que el cuadrado se acerca o se aleja paralelo a sí mismo y con el punto O en trayectoria directa a nosotros (al ojo). Ésta es la interpretación visual más plausible conforme a nuestra experiencia per-



ceptiva. Pero también podemos interpretar a este movimiento como algo que sucede dentro del mismo plano: el cuadrado crece o decrece (que hoy día ya también nos es familiar por la manipulación de fotografías en los teléfonos celulares).

Esta escena concluye como antes, con una construcción en escalerita a partir de tres puntos y un horizonte. Lo difícil es construir los dos vectores que giren como lo harían dos perpendiculares que mantienen su tamaño.

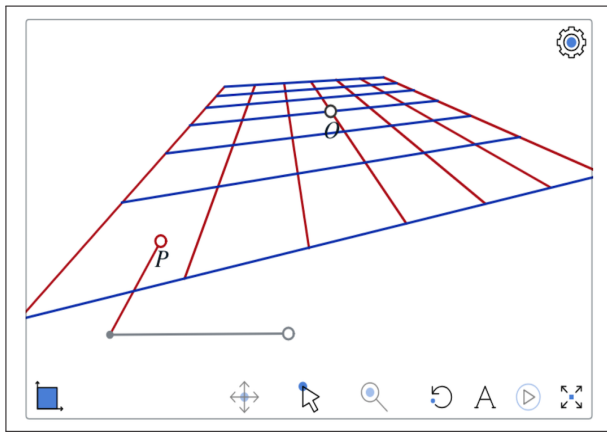
El giro de un vector de tamaño fijo produce un círculo y los círculos se ven como *elipses*.

Sí: nuestro mundo visual está lleno de elipses. Los platos, las tazas, las ruedas de los coches, etc. Aunque sepamos que son círculos, lo que vemos son elipses. Levante la vista: casi seguro que hay elipses en su entorno, y si no, vaya por un vaso de agua y observe su boca.

El meollo de esta construcción es trazar la elipse que veríamos si un cuadrado y el círculo que pasa por sus vértices están en el piso y el pintor nos entrega el dibujo del cuadrado, es decir, un cuadrilátero. Resulta que con estos datos se define una

única elipse y que se puede trazar usando solo las herramientas de incidencia (trazo de líneas e intersección de ellas). Esto lo veremos con cuidado en los siguientes capítulos en los que desarrollamos el concepto de *armonía* y el de *curvas armónicas* (de las cuales, esta elipse con su cuarteta armónica es un ejemplo).

Por lo pronto, para ver cómo es que el cuadrilátero rosa define la geometría rígida del plano, ponga al punto O en el centro del cuadrilátero y ajuste



el tamaño de la cuadrícula para que alguno de sus vértices caiga en la elipse. Al girar, ese vértice y los otros tres que hacen un cuadrado con centro en O se mantienen siempre en la elipse, y esta rotación es justo lo que veríamos si estuviera sucediendo rígidamente.

Observemos, por último, que si no cambiamos de escala, el grupo de movimientos que se obtiene (los *rígidos*) es de dimensión 3: dos grados de libertad por las traslaciones y uno más por las rotaciones; y en cada punto tenemos un subgrupo de estas rotaciones, llamado su *estabilizador*, que podemos pensar como un *círculo de movimientos* –las rotaciones con ese punto como centro. Por supuesto, al incluir las homotecias (o zooms), el grupo crece a uno de dimensión 4: el de las llamadas *semejanzas*.

1.2.3. Movimientos hiperbólicos

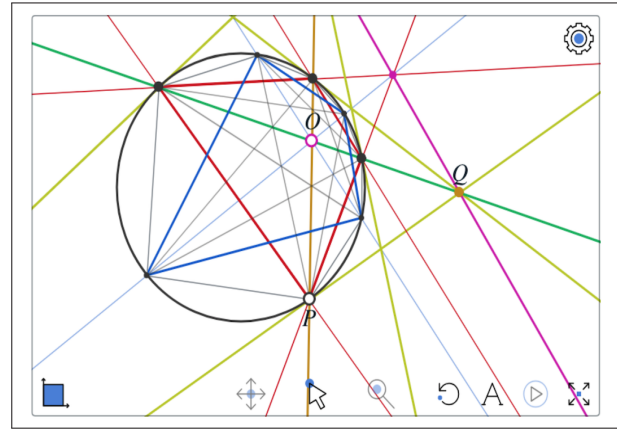
Consideraremos ahora a una curva armónica fija. Y un círculo es el ejemplo ideal. Los únicos movimientos euclidianos (o rígidos) que dejan a un

círculo en su lugar son las rotaciones alrededor de su centro, pero hay muchos más movimientos proyectivos que lo dejan invariante, es decir, en su lugar. Estos son los que construiremos a continuación y dan pie a una nueva noción de “rigidez”.

Por primera y última vez en este libro, usaremos unas pocas herramientas euclidianas (las que aparecen en el bloque de arriba de herramientas en *ProGeo3D*) llamadas así porque usan nociones de distancia, ángulo o paralelismo. Por ejemplo, para trazar un círculo con centro en el punto gris –que pronto ocultaremos– se necesita distancia.

Además de este círculo que se mantendrá fijo, \mathcal{C} llamémoslo, sean O un punto en el interior del círculo y P un punto en él ($P \in \mathcal{C}$, léase “ P en \mathcal{C} ”). Estos son los datos iniciales. Tenemos entonces 3 grados de libertad –dos que da O y uno más de P .

La línea OP intersecta a \mathcal{C} en otro punto además de P . Trazamos las tangentes al círculo en estos dos puntos –usando la herramienta de trazo de líneas perpendiculares. (Este es nuestro último uso de las herramientas euclidianas; a partir de aquí ya sólo usaremos las proyectivas o de incidencia.) La



intersección de las dos tangentes da un punto Q afuera del círculo \mathcal{C} .

La línea OQ intersecta al círculo en dos nuevos puntos, que junto con los dos que ya teníamos definen un cuadrilátero (en rojo) inscrito en \mathcal{C} ; pero más que eso, es una *cuarteta armónica* en \mathcal{C} en el sentido en que se usó –aunque sin definir– en el apartado anterior.

Resulta entonces –y en su momento habremos de probarlo– que el horizonte del cuadrilátero rojo

contiene a Q .

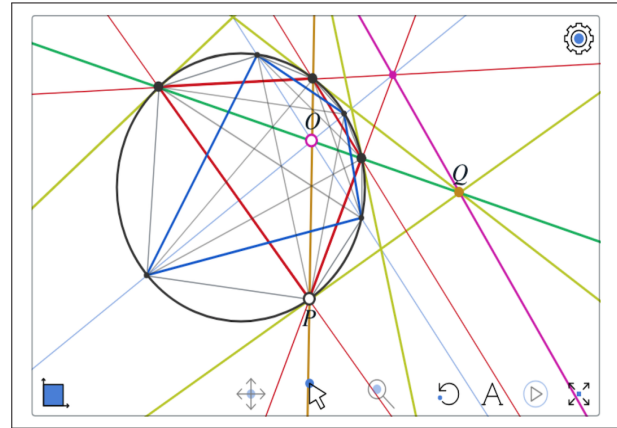
Podríamos construirle su cuadrícula a este cuadrilátero, pero ahora nos interesa ver qué pasa dentro del círculo más que lo que sucede afuera.

Para ello, trazamos desde los dos puntos básicos en el horizonte, líneas a O , y obtenemos otros cuatro puntos en el círculo \mathcal{C} con su correspondiente cuadrilátero (azul).

El resto de la construcción consta de trazar segmentos del octágono que tenemos definido en el círculo \mathcal{C} , y un par de tangentes más (en amarillo) –pero ahora las podemos trazar por incidencia: usando al punto que se sentía solito en el horizonte (quizá haya que mover a P en el paso anterior para hayarlo).

Disfrute por un momento de estos movimientos pues hay algo orgánico en ellos; no nos son totalmente ajenos o nuevos, nuestro aparato perceptivo intenta darles sentido... producen sensación de *déja-vu*.

Se puede mover a O por todo el interior del círculo (al que llamaremos *el disco* en el entendido de que es *abierto*, de que no incluye a los pun-

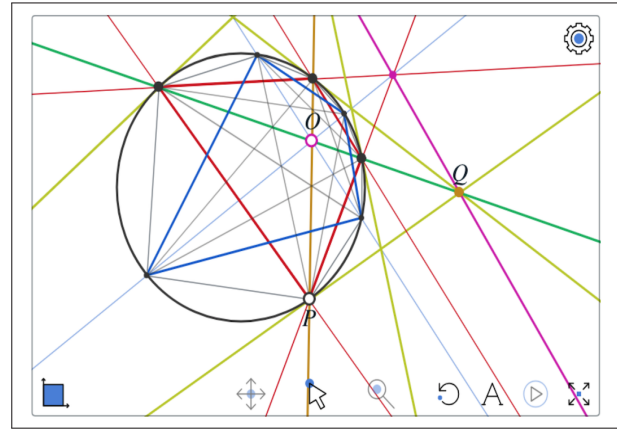


tos de \mathcal{C} , su límite que también será llamado el *círculo al infinito*). Aunque nos interesan los movimientos del disco en sí mismo, hay que notar que O acarrea consigo no sólo al disco, sino a todo el plano (a toda la pantalla y más allá), pero siempre partido nítidamente en tres pedazos: lo de afuera, el disco y lo que los separa, su frontera común, el círculo.

Si ahora movemos a P , todo gira agradable y coordinadamente alrededor de O –donde quiera

del disco que éste. (Es bonito animarlo al seleccionar a P y oprimir el botón de “play”, para que P de la vuelta a lo largo de su carril que es el círculo \mathcal{C}); y este giro, visto afuera del disco se describe mejor como “empujar” o “trasladar” a lo largo del horizonte. Observe que entre más cerca del centro del disco esté O, el horizonte se aleja, y estas rotaciones se van pareciendo más a las euclidianas. Y además, en el centro coinciden, son justo las rotaciones euclidianas. Ahí también (O en el centro de \mathcal{C}), los tres cuadriláteros –dos inscritos y uno circunscrito– se cuadran (se vuelven cuadrados).

Lo que queremos resaltar es la enorme similitud de este grupo de movimientos con la de los movimientos rígidos (euclidianos) de la escena anterior (sin considerar las homotесias). No solo por las tres dimensiones que tienen ambos grupos, sino por cómo se obtienen éstas. Un punto (O en ambas escenas) se mueve con dos grados de libertad en lo que podemos llamar un *plano*, arrastrándolo consigo; y al dejarlo fijo en cualquier lugar, el otro punto de control, P, hace que todo gire a su alrededor.



Este es el grupo de *movimientos hiperbólicos*. Se llama así porque son los movimientos rígidos (que preservan distancia) de la *geometría hiperbólica*:

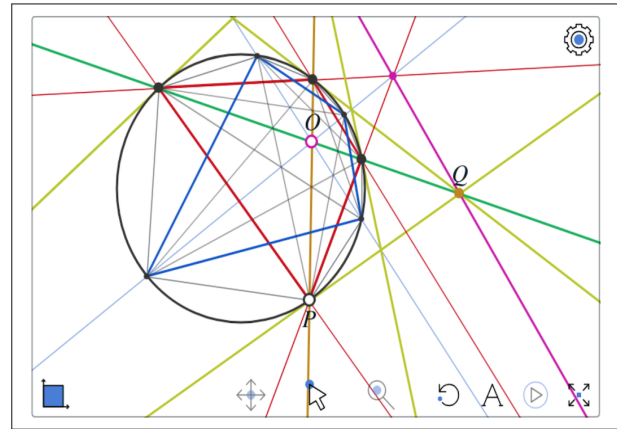
Si consideramos al disco (recuérdese, el interior del círculo sin incluirlo) como **los puntos**, a los segmentos de recta que lo cortan como **las líneas** y a todo esto como un plano geométrico en sí mismo, llamado **el plano hiperbólico** (o *Plano Kleiniano*); se cumple que por cada par de puntos pasa una única línea, el axioma básico de la geometría des-

de Euclides. Lo que **no** cumple este plano es el Axioma de las Paralelas: en el plano hiperbólico por un punto fuera de una línea pasa una infinidad de líneas que no la tocan y no una única que es lo que estipula el quinto postulado de Euclides.

Usando al grupo de movimientos podríamos, en principio, definir distancias en el plano hiperbólico como lo hacemos en el mundo real. Pues si determinamos que dos puntos están a distancia **1**, si decretamos que ellos son **la** vara de medir, podemos moverla a cualquier lugar y medir ahí con ella.

Además, también podemos medir ángulos. Puesto que en el centro del disco las rotaciones corresponden a las euclidianas, dos rectas que se intersecten las podemos llevar ahí para medir su ángulo. En particular, los pares de rectas perpendiculares son exactamente las que vemos resaltadas (en naranja y verde, cruzándose en O) y corresponderán a las “cuartetos armónicas” en la “curva armónica” que es el círculo al infinito.

El primero que hizo el trabajo para obtener fórmulas explícitas para estas distancias y ángulos



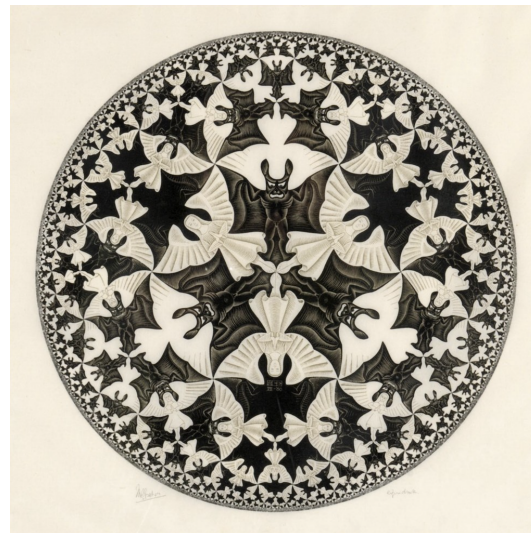
usando coordenadas, fue el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835–1900). Se encontraban así, modelos analíticos (es decir, dados por medio de coordenadas y fórmulas explícitas) de una geometría no euclidiana.

Sin embargo, ésta geometría ya se había empezado a estudiar en abstracto, como sistema axiomático en la mejor tradición de Euclides. En este terreno, hay que destacar los trabajos independientes y casi simultáneos de János Bolyai (hun-

garo: 1802–1860) y Nikolai Ivanovich Lobachevsky (ruso: 1792–1856). Pero en la comunidad matemática se seguía dudando de la pertinencia de sus estudios, de la *existencia* de esta geometría, pues contradecía al postulado de las paralelas.

Con éste modelo de Beltrami, y otros que viven dentro de la geometría euclidiana –la *geometría oficial*, podríamos decir–, se saldaba una discusión filosófica profunda, apasionada y larga sobre la posibilidad de geometrías donde el postulado de las paralelas no fuera válido: ¡sí existían esas *geometrías no euclidianas*! Acabamos de movernos dentro de una de ellas.

De manera independiente y casi simultánea al trabajo de Beltrami, Felix Klein en su programa de Erlangen que ya mencionamos, también propone este modelo del plano hiperbólico, haciendo énfasis en que vive dentro del plano proyectivo (o Plano Desarguesiano, que pronto definiremos) y en que el grupo de movimientos es una pieza de información fundamental (equivalente, o casi, a dar la métrica, como ya lo intentamos argumentar con varitas de medir). Por esta razón, a este modelo se

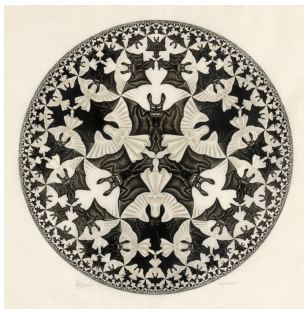


le conoce como modelo de Beltrami-Klein, o modelo proyectivo y a veces se usa solo el nombre de Klein para él.

Pero hay otros modelos del plano hiperbólico, y cabe destacar al de Poincaré³ porque es el que ha

³Nombre en honor de su autor, el matemático francés Jules Henri Poincaré (1854 –1912).

tenido más roce social... los artistas lo conocen. En él se basó Escher para su famoso mosaico *Angeles y Demonios*. Este modelo tiene a los mismos puntos que el de Klein, el interior de un círculo –o un disco abierto–, pero las líneas son ahora arcos de círculos que intersectan ortogonalmente a la frontera –no segmentos de línea como en el de Klein, por lo que las fórmulas explícitas para la distancia difieren. Pero tiene el encanto de ser *conforme*, es decir, los ángulos sí corresponden a lo que vemos aunque, por supuesto, las distancias no (todos los ángeles y todos los demonios son, hiperbólicamente, iguales).



1.3. Geometría proyectiva

Una manera común (aunque poco descriptiva) de definir a la geometría proyectiva es como aquella geometría que es invariante bajo proyecciones. Ya hemos usado este término, tiene un uso cotidiano muy claro y hemos visto múltiples ejemplos con las cuadrículas, pero tenemos que precisarlo.

1.3.1. Proyecciones

Un cuadro con buena perspectiva nos hace sentir la tridimensionalidad de una escena pues para reconstruir en la mente al mundo que nos rodea, nuestro sistema o aparato perceptivo usa el mismo *principio de proyección* que adoptaron los pintores renacentistas para pintar sus cuadros.

Proyectar es asociar a cada punto en la escena (llamada también *dominio* o *fuentes* de la proyección), el punto en el lienzo (o *rango* de la proyección) en que corta al lienzo la línea que une al punto-fuente con el *foco* de la proyección. Es decir, el *principio de proyección* es que un punto fuente

–en la escena–, su punto imagen –en el lienzo– y el foco, siempre están alineados.

Puesto que la luz viaja en líneas, la evolución implementó una muy buena aproximación de este principio en nuestro ojo, cuyo diseño compartimos con todos los animales superiores.

La pupila (el hoyito por el que pasan los rayos de luz) y el cristalino (el pequeño lente que atraviesan) seleccionan a los rayos lumínicos que pasarían por un punto que es el foco de la proyección, y la retina juega el papel del lienzo o rango. Los “puntos”, “píxeles” o células de la retina son sensibles a la intensidad y el color del rayo que les pega; mandan esta información al cerebro y éste compagina y procesa las imágenes de los dos ojos para acabar de armar la idea del mundo tridimensional que nos rodea.

Por supuesto, la cámara fotográfica se basa en este mismo principio de proyección –un sistema óptico que simula al foco y como lienzo una película o detector bidimensional fotosensible– y produce entonces el “cuadro ideal” al que aspiraban los pintores renacentistas para escenas reales. No

es de extrañar que el paradigma de lo que es pintar haya tenido que cambiar; hoy traemos todos en el bolsillo proyecciones perfectas de escenas reales. Y efectivamente, reconocemos todos que las fotos reflejan bien cómo vemos al mundo.

La única diferencia entre una “proyección de pintor” y una de “ojo o cámara fotográfica” está en el orden de los tres elementos involucrados: el lienzo (rango) del pintor está colocado entre el objeto (fuente) y el foco, mientras que la película sensible de la cámara (o la retina) está después del foco en el sentido en el que viaja la luz en las líneas –está atrás del foco.

Sin embargo, en nuestras construcciones de cuadrículas en perspectiva de la Sección 1, nunca hubo consideración alguna sobre la dirección en las líneas. Simplemente se les trazaba o se les intersectaba. Y efectivamente, como veremos en seguida, cuando consideramos a esas construcciones como provenientes de una proyección se incluye a ambos casos, pues sólo se basan en que

las líneas se proyectan en líneas,

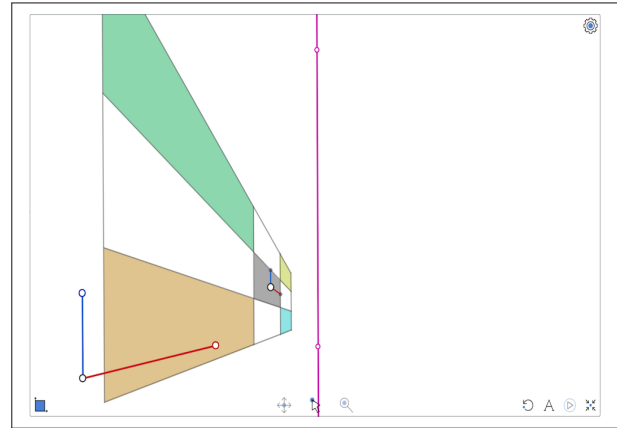
y en que a las líneas, dos de sus puntos bastan para definirlas.

1.3.2. El otro lado del horizonte

Consideremos a una variante de la construcción de movimientos afines determinados por dos vectores y un centro de traslación. Pero ahora tenemos al horizonte vertical en el centro del lienzo y una cuadrícula simple de tres por tres coloreada.

Para fijar ideas, consideremos a la imagen como el boceto (con perspectiva perfecta) de un edificio a nuestra izquierda y que estamos viendo fijo hacia adelante a mitad de su calle, con el lienzo enfrente de nosotros (vertical, a nuestra altura, y perpendicular al edificio); es simple la situación y la fachada, pero suficiente para nuestros fines. Mover poco al centro del edificio, traslada al rectángulo dentro de un plano a nuestra izquierda, llamémos Π a ese plano abstracto y fijo.

Llevémos ahora el centro del edificio, despacio, al otro lado del horizonte. Nuestro aparato perceptivo nos asegura que el edificio se fue, bien alinea-



do en su plano Π y acelerando, hasta esconderse detrás de un punto cerca del horizonte, pero que regresó tan campante por el otro lado de la calle hasta posarse como un edificio gemelo, justo enfrente del original.

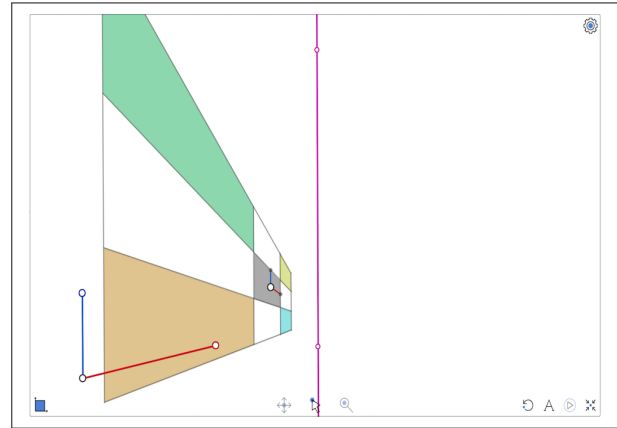
Sin embargo, lo que está pasando es otra cosa. Nuestro aparato perceptivo nos hace creer lo que para él, parece verosímil.

Repita la operación y observe la posición de los colores. O, más drástico aún, siga moviendo al cen-

tro hacía la derecha hasta que por la izquierda aparezca la esquina delantera del edificio: y observe que ahí sí, los colores de arriba y abajo coinciden con el original.

Para explicar lo que está pasando, regresemos al centro del edificio al lado izquierdo y sigamos moviéndolo hacia la izquierda (en el lienzo). Esto equivale a trasladar al edificio hacia atrás en su plano Π , que sigue impávido a nuestra izquierda y perpendicular al lienzo. Hay un momento en el que algo aparece por el extremo derecho de la pantalla. Es cuando el rectángulo de la fachada ha llegado lo suficientemente atrás de nosotros como para que las líneas que van de él a nuestra cabeza (donde está el foco de la proyección) vuelvan a tocar al lienzo-pantalla. Lo que estamos viendo es la proyección al estilo ojo-cámara (con el lienzo detrás del foco) que enfoca justo hacia atrás de nosotros. Pero entonces lo que se obtiene es el “negativo”: lo de arriba, abajo; lo de abajo, arriba y la derecha intercambiada con la izquierda.

En los viejos tiempos de la fotografía por medios físico-químicos, no digitales, en la película fo-



tosensible se imprimía lo que se llamaba el “negativo de la foto”; luego, había que pasar al positivo volviendo a proyectar con una fuente de luz y haciendo un proceso químico equivalente sobre el papel final. Ese proceso de volver a invertir la imagen lo hacen las cámaras de hoy (y nuestro cerebro) con un simple algoritmo.

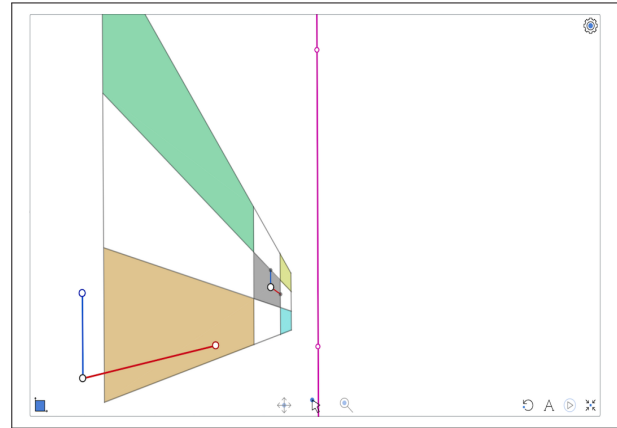
En resumen, el lado derecho del horizonte corresponde a (es la proyección –tipo cámara– de) la parte trasera del plano Π y, por tanto, lo que se ve

en la pantalla es su negativo; en el lado izquierdo vemos la proyección tipo pintor.

El punto de control, obligado a vivir en la pantalla, da los centros de rectángulos en Π tan al frente de nosotros, o tan atrás de nosotros, como queramos (izquierda o derecha del horizonte y qué tan lejos el rectángulo corresponde a qué tan cerca del horizonte esté el control). A donde sí no se puede llegar es a centros cerca de la dirección de la oreja izquierda, o en general en direcciones perpendiculares a nuestra vista (recuérdese, se mantiene fija al frente) pues el lienzo (la pantalla) sigue fijo enfrente y es chiquito.

Lo que sí hemos logrado en la configuración inicial de esta escena es tener rectángulos que aparecen en ambos lados y la razón es simple: el control que da el largo (o profundidad) de los rectángulos está puesto generosamente. Esto implica que pueden tener la esquina de adelante muy adelante y la de atrás, lo suficientemente atrás, para que simultáneamente puedan “salir en la foto”, o dicho más precisamente, en la proyección.

Aunque físicamente se pueden diferenciar los



dos procesos de proyección pues la luz viaja en las líneas con una dirección fija; en nuestras construcciones geométricas este elemento de dirección en las líneas nunca se tomó en cuenta. Se trazaron líneas y se intersectaron, punto. Se amalgaman entonces, teóricamente, ambos procesos físicos en un solo ente matemático: la proyección de un plano en otro. Aunque se hayan deducido las construcciones de las cuadrículas en perspectiva pensando en el problema del pintor, éstas abar-

can más de lo que se pretendía con ellas: siguen funcionando del otro lado del horizonte; incluyen a la cámara, y más aún, compaginan lógicamente a ambos casos. Este es un fenómeno recurrente en matemáticas. Alguna construcción o proceso diseñado para un problema específico: funciona, es aplicable o ayuda a entender mucho más de lo que se tenía en mente; sentimos que cobra vida propia.

1.3.3. Espacio (y Plano) Desarguesianos

Lo que Girard Desargues propone para hacer sentido preciso de lo que las técnicas de la perspectiva indicaban, y que más adelante se habría de llamar Geometría Proyectiva, es ampliar el Plano y el Espacio Euclidianos. Añadirles, en abstracto, nuevos puntos, que llamaremos *ideales*, y que se deben situar en el infinito. Esto último parece causar serios problemas existenciales si se concibe que el Espacio Euclídiano es este mismo espacio en el que vivimos y entonces sentimos que ya no hay lugar para añadir nada más. Pero **NO**: éste en el que vivimos es el Espacio Físico y el otro, el Eucli-

diano, es una construcción abstracta –cimentada en axiomas– que nos ha ayudado mucho a entender al Espacio Físico, pues surge de nuestra experiencia cotidiana de vivir en él y de nuestro afán por dominarlo que involucra entenderlo; pero están muy, muy lejos de ser lo mismo.

Para cada clase de paralelismo de líneas en el Espacio Euclídiano, Desargues añade un nuevo punto, un punto *ideal* y que pensamos en el infinito, por el que todas estas líneas pasan (justo lo que hemos visto en lontananza de los planos: que cualquier conjunto de líneas paralelas en él concurre en un punto de su línea horizonte y que además, líneas paralelas a ellas –aunque ya no estén en ese mismo plano– también van y concurren ahí). Se les da identidad a los puntos de fuga más allá de su aparición utilísima en los lienzos. Puesto que ya aparecen en los dibujos, Desargues les confiere existencia abstracta para incorporarlos a la teoría.

En consecuencia, a cada línea euclidiana hay que añadirle un nuevo punto: el ideal correspondiente a su clase de paralelismo.

Como el elemento básico de la geometría son las líneas, tenemos que extender este concepto:

Se decreta que los puntos ideales que corresponden a las líneas en un plano forman una nueva línea (en el infinito, y que se ve como su horizonte). Y se deduce entonces que todos los planos paralelos a él, también contienen a esa línea. (De nuevo, lo que ya habíamos observado: planos paralelos comparten horizonte.) Y por último, aparece un nuevo plano, en el infinito: el que está formado por todos los puntos ideales.

En el Espacio Desarguesiano se cumple entonces la propiedad básica y primordial de la geometría, esa de que *por cualquier par de puntos pasa una única línea*:

- Si los dos puntos son euclidianos, la línea es la euclidiana correspondiente (con todo y su flamante punto ideal).
- Si un punto es euclidiano y el otro ideal, la línea es la de la clase de paralelismo que indica el punto ideal y que pasa por el punto

euclidiano (única según el quinto postulado de Euclides).

- Si los dos puntos son ideales: tómesese cualquier punto euclidiano; por él pasan líneas que van a los dos ideales; estas dos líneas generan un plano pues se intersectan, y ese plano define en el infinito a la línea de puntos ideales que los contiene.

Desargues se adelanta a su tiempo en la osadía de definir entes abstractos y le pega justo al clavo de la geometría y la perspectiva; de cómo vemos al mundo. Tan es así que todos los dibujos y construcciones que hemos visto aquí, así como las imágenes de la bouyante industria de la animación por computadora, se basan en su concepción de cómo extender a la geometría euclidiana para que las proyecciones se comporten con la elegancia matemática que les corresponde. Pues en el Espacio Desarguesiano, la proyección de un plano en otro ya es uno a uno, se vuelve una correspondencia biunívoca; lo que antes era una línea en el lienzo pero no en la fuente, el celeberrimo y multicitado

horizonte que ha sido el héroe de todas nuestras construcciones, es ahora la imagen de la nueva línea al infinito (la que ésta armada por los puntos ideales de ese plano fuente). Y al verla y trabajarla en los dibujos, debe quedar claro que es una línea que se comporta como cualquier otra.

Pero los añadidos de Desargues sí implican una fuerte ruptura con la geometría euclidiana clásica (y quizá esto es lo que necesitó mucho tiempo para digerirse) sobretodo en el tema del paralelismo. *En el Plano Desarguesiano* (cualquier plano del Espacio Desarguesiano con su línea al infinito hecha de puntos ideales) se elimina de tajo esa suerte de compadrazgo; *cualquier par de rectas se intersecta en un punto*:

- Si vienen de líneas euclidianas y éstas se intersectaban: ahí ésta ya el punto. Y si no se intersectaban es que eran paralelas, pero entonces, ahora comparten su punto ideal.
- Si una es euclidiana y la otra es la del infinito, también comparten un punto ideal.

Dentro de un Plano Desarguesiano se logra una democracia total: *cualesquiera dos puntos generan una línea y cualesquiera dos líneas se cortan en un punto*. Este simple hecho, como observación abstracta y lógica empieza un nuevo coqueteo con una simetría que, con el tiempo, acabó por llamarse **“dualidad”**: hay puntos y hay líneas relacionados por algo que hemos llamado “incidencia” para que se pueda aplicar en dos sentidos –un punto incide (“está”) en una línea si y sólo si esa línea incide en el punto (lo contiene); y hay dos operaciones “generar” o “trazar” –dícese de la línea que pasa por (o incide en) dos puntos–, y la de “cortar” o “intersectar” que de dos líneas produce un punto... este nuevo fenómeno de *dualidad* que aparece en el Plano Desarguesiano, habremos de manejarlo con cuidado, pues a los matemáticos les llevó siglos familiarizarse con él, pero debemos mantenerlo presente.

Y, regresando al Espacio Desarguesiano (de 3 dimensiones), también ahí se termina con los casos especiales: *dos planos distintos siempre se intersectan en una línea*; y *un plano y una línea no con-*

tenida en él se cortan en un punto. No es difícil argumentarlo con detalle.

Y no es que se haya eliminado sin piedad al paralelismo. Se le cambió por el concepto más mundano y flexible de tocarse en un cierto lugar.

1.3.4. Cubo en perspectiva

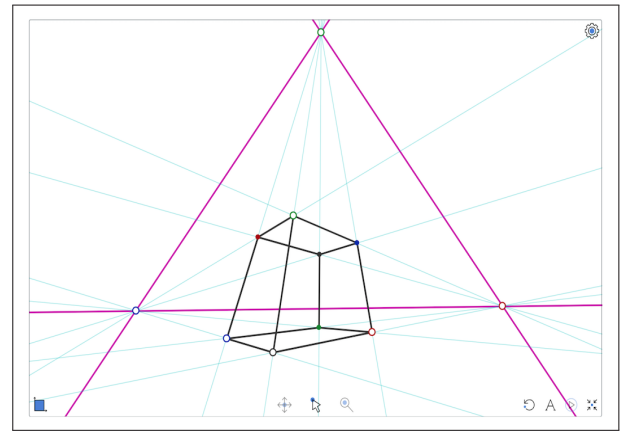
Hasta aquí, solo hemos pretendido proyectar planos en planos. Daremos ahora un salto conceptual para afianzar el uso de los términos e ideas que acabamos de presentar. Vamos a dibujar con buena perspectiva a un cubo sólido; pero sin preocuparnos por la exactitud en sus dimensiones, más bien será una caja o edificio de tamaños variables, aunque le sigamos llamando cubo. Suponemos que el cubo está en el Espacio Euclidiano, y algunos de los nuevos puntos que introdujo Desargues intervendrán para ayudarnos a dibujarlo.

La clave es que las aristas y las caras de un cubo tienen relaciones de paralelismo muy íntimas y claras. Sus 12 aristas se agrupan en tres cuartetas de segmentos paralelos; entonces, sus corres-

pondientes líneas determinan a tres puntos ideales, que son los de las “perspectivas de tres puntos de fuga”.

Empezamos con ellos. Con el triángulo que definen (que vive en el plano al infinito pero se proyecta al lienzo), y además, con un punto que llamaremos origen como esquina del cubo (y a éste sí lo pensaremos como la proyección de un punto euclidiano).

Con puntos variables en los tres “ejes”, que de-



finan el tamaño de las tres aristas en el origen ya se determina al cubo.

Pues cada par de segmentos, junto con su horizonte correspondiente, define (por su nuevo vértice) a una de las tres caras del cubo en el origen.

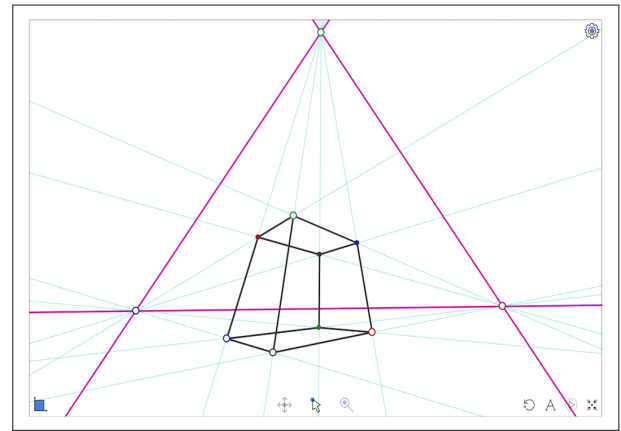
Y el vértice del cubo que falta (el opuesto al origen) es donde concurren las tres líneas de los nuevos vértices a los puntos de fuga que les faltan. Y que estas tres líneas concurren no es coincidencia, se desprende de que cada cara del cubo es paralela a su opuesta (estos pares de caras comparten horizonte como cuadriláteros).

Es interesante jugar con esta figura. Además, es ilustrativo de cómo vemos al mundo, pues se puede lograr, en principio y si pudiéramos sacar a los tres puntos de fuga del lienzo, a cualquier vista de cualquier paralelepípedo. Se lo dejamos como tarea formativa y lúdica al lector; quizá haya que empezar la construcción con otros datos para lograr todas las vistas.

A partir de la figura que tenemos ahora (si se le movió, quizá convenga recargarla para tenerla en la posición inicial mientras hablamos de ella), po-

driamos construir cuadrículas en los tres planos básicos que compaginarían bien para “cubicular” al espacio y así poder situar con precisión a cualquier objeto en la escena tridimensional respecto al cubo. Pero preferimos observar algo simple y elegante que después nos será útil.

Los tres puntos ideales de las diagonales de las caras (que habíamos llamado “infinito diagonal” y que se habrían usado para cuadricular) tienen una propiedad muy especial que llamaremos ser



una *configuración de Ceva* (pues hay que asociar-la al nombre del matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734) por la hipótesis de su famoso teorema –cuya conclusión, ahorita no viene al caso).

A saber, ser una configuración de Ceva es que *las líneas al vértice opuesto son concurrentes*. Donde estamos usando que los tres infinitos diagonales están en los lados del triángulo de horizontes.

La demostración de este hecho, consiste en observar que las líneas descritas (de un infinito diagonal al vértice opuesto en el triángulo de horizontes) son los horizontes de los planos diagonales que cortan al cubo en dos mitades simétricas:

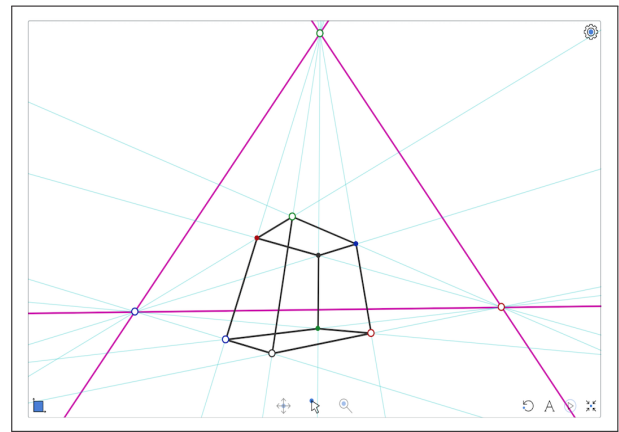
hay un plano rojo,
otro pintado de azul
y el tercero es verde.

Estos tres planos comparten a la “tri-diagonal”: la línea (gris) que va del origen al vértice opuesto. Por tanto su punto ideal, de fuga o en el infinito, tiene que estar en los tres horizontes: es el punto deseado (el de Ceva).

EJERCICIO. Conociendo al punto de fuga (o ideal) de la

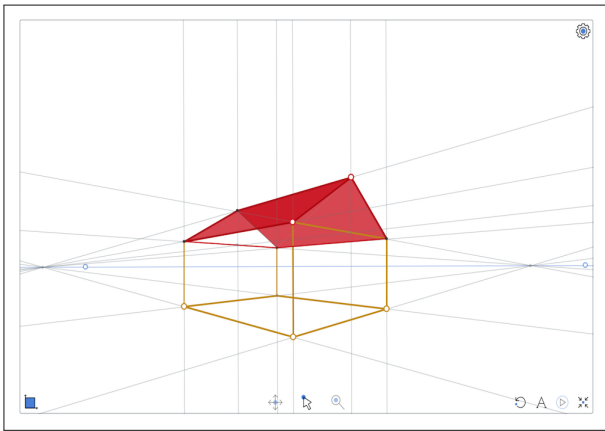
tridiagonal del cubo, ¿se podrá construir directamente (sin usar los otros puntos diagonales infinitos) al cubo que le sigue en esa línea?

Concluimos este capítulo con una construcción de una casita en perspectiva que es una variante de la construcción anterior. La línea horizonte (del piso) está fija y el punto de fuga de la dirección vertical está en el infinito; en el punto ideal del plano desarguesiano del lienzo que corresponde a esa dirección (la vertical), así que todas las verticales



deben dibujarse paralelas.

La herramienta de *ProGeo3D* que permite trazar líneas por puntos ideales o al infinito es la de trazo de paralelas en la sección de Geometría Euclidiana (o, como en este caso, la de trazo de perpendiculares). Lo que quedará claro en el capítulo siguiente es cómo se escogió al punto medio de un segmento para subir ahí al techo (es buen momento para pensarlo por sí mismo pues conduce a la armonía).



Capítulo 2

Armonía

La *armonía* es un concepto elegante y profundo que, como pretendemos presentar en este libro, es capaz de hilvanar a una buena parte de la geometría proyectiva elemental a su alrededor. Y, como es usual con conceptos fundamentales de las matemáticas, surge de distintas fuentes.

El nombre tiene que ver con la música. Históricamente, las cuartetos armónicas son puntos colineales, cuyas distancias cumplen una cierta relación. Y cuando se considera a la cuerda vibrante (como lo hicieron los Pitagóricos): que las notas sean “armónicas” en el sentido musical tiene todo

que ver con que ciertos puntos asociados a ellas en la línea-cuerda sean “armónicos” en el sentido geométrico; esto lo veremos con cuidado en un Apéndice.

Sin embargo, resulta que esta “armonía” definida originalmente por distancias, también se puede definir en términos puramente geométricos y sin referencia alguna a nociones métricas. De hecho, es algo que está íntimamente relacionado con las cuadrículas con que hemos estado trabajando. Así que empezamos este capítulo con una última construcción relacionada con las cuadrículas, y bá-

sica como herramienta para el pintor, para motivar la construcción del cuarto armónico y la definición de armonía.

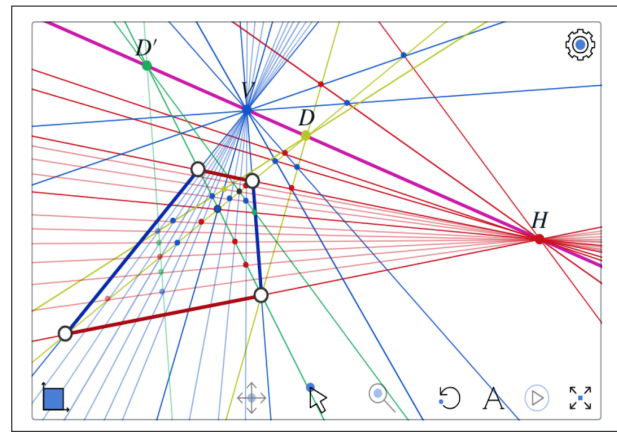
En la siguiente sección, demostramos las propiedades básicas de este concepto. Y damos importancia al espíritu matemático de demostrar las afirmaciones; pues ya no basta con observar lo bien que se comportan las construcciones, queremos entender por qué funcionan.

Cerramos el capítulo con una generalización natural del concepto de armonía a más dimensiones. Será la herramienta de trabajo básica para el siguiente capítulo.

2.1. Motivación y definición

2.1.1. Refinamiento de la cuadrícula

Regresemos un momento a un problema típico de pintor. Sabemos construir cuadrículas tan extensas como queramos, el problema ahora es refinarla hacia lo pequeño. Un pintor quiere transcribir con detalle algo de la realidad (un cuadro en una pared, digamos) al lienzo, y nos pide hacer una



cuadrícula más chica o fina en esa zona de la proyección.

Supongamos que tenemos ya los tres infinitos en el horizonte del cuadrilátero o loseta básica y que ahí es donde queremos refinar.

Es muy fácil, se traza la otra diagonal que nos da un nuevo punto de fuga D' en el horizonte y que pudo haberse utilizado para extender la cuadrícula. Pero este trazo también nos da el centro de la loseta.

De ahí, se trazan nuevas líneas “horizontal” y “vertical” (a H y a V) que parten al cuadrilátero en sus cuatro semejantes de la mitad del tamaño.

Se puede refinar aún más trazando una nueva diagonal para encontrar otro punto central, y de él dos nuevas líneas del siguiente nivel de refinamiento de la cuadrícula.

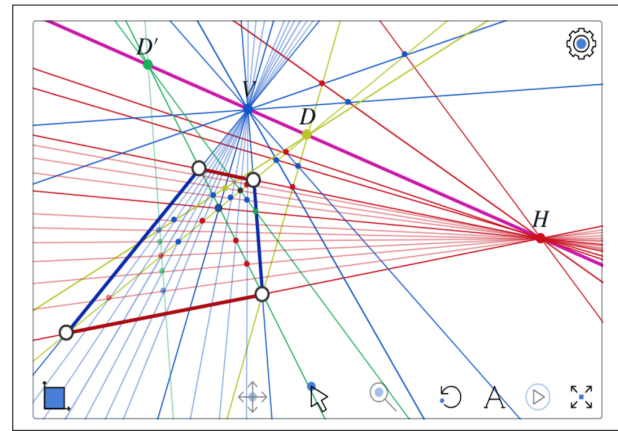
Con esto, se obtienen nuevos puntos de intersección que permiten extender este nivel.

Y se puede usar a cualquiera de los dos tipos de diagonales para acceder a nuevos niveles de refinamiento.

Queda claro, entonces, que se puede refinar la

cuadrícula tanto como se quiera en cualquier región del plano.

Pero lo que queremos remarcar es que el ancho de paralelas (o *cuadrícula*) para el dibujo se puede hacer tan extenso y tan preciso como se quiera, mientras que en la línea horizonte lo único que aparece o hemos usado son cuatro puntos. Lo que llamaremos una cuarteta armónica.



2.1.2. Construcción del cuarto armónico

Antes de dar la construcción, conviene establecer **notación** que nos permita hacer mucho más precisos y claros nuestros argumentos, que respete aquel esbozo de dualidad en el Plano Desarguesiano que señalamos en (§1.3.3) y que, a la vez, sea natural de generalizar. Por lo pronto, será muy importante para el ejercicio con el que cerramos este apartado y que “dualizará” la noción de armonía a líneas concurrentes.

Hasta ahora hemos denotado con letras mayúsculas a los puntos: mantendremos esta práctica. Cuando haya que dar nombre a una línea, usaremos letras minúsculas como $a, b, c, \dots, \ell, \dots, x, y, z$. Para la relación de incidencia, vamos a usar el símbolo \in , que se lee “está en”, así que $A \in \ell$ significa que el punto A está en la línea ℓ . Para los planos, usaremos letras griegas; π es la de batalla.

Tenemos además dos operaciones. La de “generar” o de “trazar por” que de puntos nos da líneas y la de “cortar” o “tomar la intersección” que de

líneas nos da puntos. Para ser parejos, las denotaremos

$$\vee \text{ y } \wedge$$

respectivamente; “cuña” y “pico” se les puede llamar a los símbolos, que se parecen mucho a los de “unión” e “intersección” (\cup y \cap), pero no es lo mismo “la unión” que “la línea generada por” aunque estén relacionados. Así que de dos puntos A, B siempre se obtiene una línea

$$A \vee B,$$

y de dos líneas a y b cuando están en un mismo plano se obtiene un punto

$$a \wedge b.$$

Si nos ponemos necios, hay que especificar que así sucede cuando son distintos los ingredientes; y si por alguna razón resultan ser iguales, el resultado de la operación es él mismo (e.g, $A \vee A = A$).

Y ahora sí, pasemos a lo barrido:

Construcción del cuarto armónico.

Consideremos tres puntos colineales. Sean A y B los dos de ellos que controlan la recta en cuestión y sea X el tercer punto, variable en la línea. El punto *armónico* de X respecto a A, B (que llamaremos Y , y que también vive en la línea $A \vee B$) se construye de la siguiente manera:

Paso 1. Sea O un punto cualquiera fuera de la línea $A \vee B$; y sea P un tercer punto en la línea $O \vee X$.

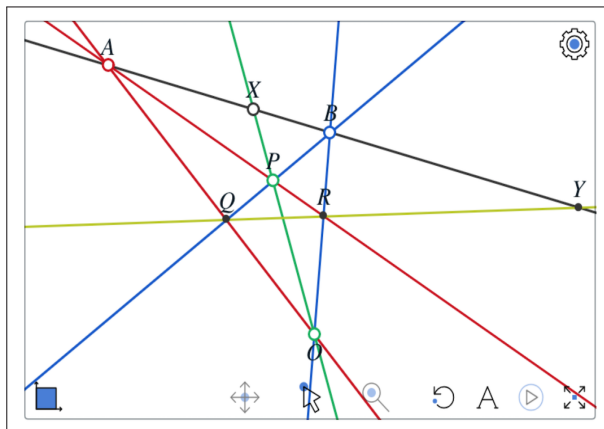
Paso 2. Por los puntos que tenemos se pueden trazar cuatro nuevas líneas, y sus intersecciones definen dos nuevos puntos. A saber,

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P)$$
$$\text{y } R = (A \vee P) \wedge (B \vee O).$$

Paso 3. Se traza la línea $Q \vee R$ que, al interseccionarla con la recta original $A \vee B$, da al *cuarto armónico*:

$$Y = (A \vee B) \wedge (Q \vee R).$$

En otras palabras, una cuarteta de puntos en una línea es una *cuarteta armónica*, si afuera existe un cuadrángulo (o loseta) que tiene a la línea como



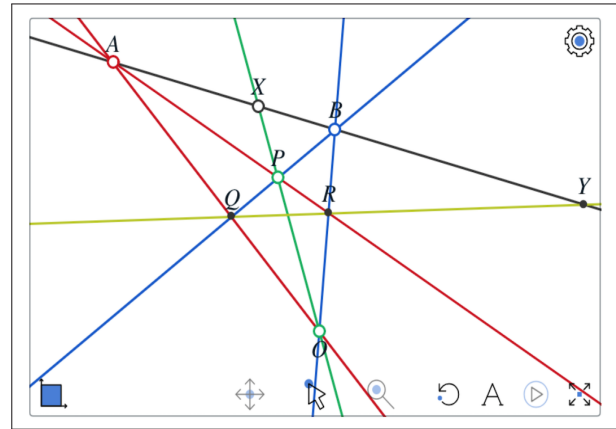
horizonte y con la cuarteta de puntos como sus puntos básicos (en dos de ellos concurren pares de lados opuestos de la loseta y los otros dos están en dónde la cortan las diagonales). Lo que acabamos de ver es que dados tres de los puntos, se puede construir a un *cuadrángulo exterior* para encontrar así al cuarto armónico; el que completa a la terna para hacer una cuarteta armónica.

Para alguien que ve esta construcción sin las experiencias visuales del Capítulo 1, resulta sorpren-

dente que al mover a O y a P : el punto Y se quede quietesito en su lugar. Lo que nos indican aquellas construcciones y la del refinamiento, es que los puntos auxiliares O y P solo definen el tamaño y la posición específicos de un cuadrado dentro de una cuadrícula (cuyas direcciones básicas ya están definidas en el horizonte); y entonces, como las proporciones se mantienen, la segunda diagonal (que da al cuarto armónico) no debe moverse.

Pero también se puede argumentar al revés. Que las construcciones de cuadrículas hayan funcionado tan fácil, tan bien y sin ambigüedades (que las líneas que se van trazando siempre pasan puntuales por los puntos por donde deben pasar); se debe a que hay una buena noción de armonía. Eso es lo que, sin recurrir a las cuadrículas, demostraremos en la siguiente sección: que la construcción del cuarto armónico no depende de los puntos auxiliares; y por lo tanto, que al fijar un horizonte sí existe una buena noción de semejanza de paralelepipedos; entonces, mover a O y a P es como viajar entre ellos.

Lo que sí debemos señalar antes de pasar a esa



demostración básica, es que la definición del cuarto armónico se extiende bien para X en toda la recta. Cuando X se mueve, Y se mueve (y “armónicamente”, vale ahora el calificativo) en la dirección opuesta y se cruzan puntuales en A y en B . Es decir: A, B, B, B y A, A, B, A son cuartetos armónicos pues ahí (cuando $X = B$ o $X = A$), la construcción se colapsa correctamente (en el sentido de que algunos puntos y rectas se identifican, pero las definiciones funcionan bien). Y también hay

que remarcar que la noción de armonía necesita al Plano Desarguesiano para expresarse con plena nitidez:

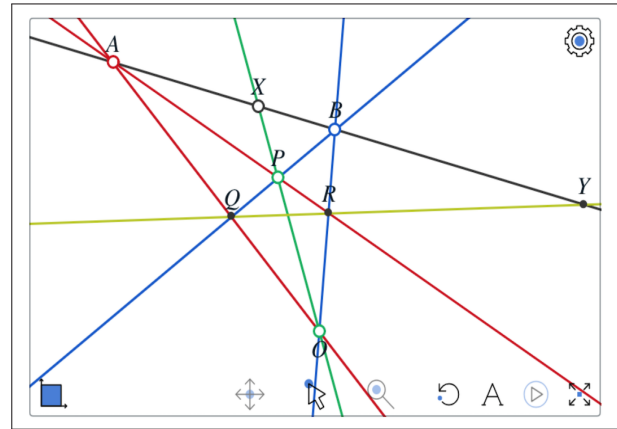
Al mover a X de estar cerca de B a estar cerca de A (al recorrer el segmento de B a A), su armónico Y recorre lo de afuera en la línea $A \vee B$ y en algún momento cambia de lado: ahí es cuando usa al punto ideal de la recta. Más precisamente:

Cuando X es el punto medio entre A y B , su armónico Y está en el punto ideal o al infinito de la recta $A \vee B$.

EJERCICIO. Haz una construcción del cuarto armónico en el que los puntos auxiliares con los que se empieza no son colineales con X sino con A o equivalentemente, con B .

EJERCICIO. Adecua la construcción del cuarto armónico (usando al ejercicio anterior) para construir la paralela a la recta $A \vee B$ que pasa por un punto Q fuera de ella, usando la herramienta euclidiana que da el punto medio.

EJERCICIO. Y al revés, construye al punto medio de dos



puntos dados, usando la herramienta de paralelas y la construcción del cuarto armónico.

EJERCICIO. Desarrolla la construcción *dual* a la del cuarto armónico. Se empieza con tres líneas concurrentes (en vez de tres puntos colineales), α , b y x . (Como en *ProGeo3D* las líneas se definen con dos puntos libres, podemos llamar A , B , X a los tres puntos que definen a las tres rectas junto con un punto L , que sería el dual de la línea $\ell = A \vee B$, como en la figura siguiente). Después, sigue paso a paso la construcción del cuarto ar-

mónico, cambiando en cada fórmula mayúsculas (puntos) por minúsculas (líneas); \vee (cuñas) por \wedge (picos) y “ser colineales” por “ser concurrentes”. El resultado de la construcción debe ser una línea y que pasa por L. Juega con la construcción y observa las propiedades duales del cuarto armónico.

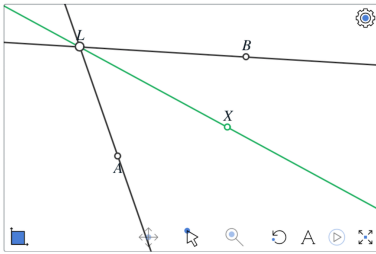


Figura 2.1: El principio de la construcción.

Así que también hay una noción de armonía para líneas concurrentes.

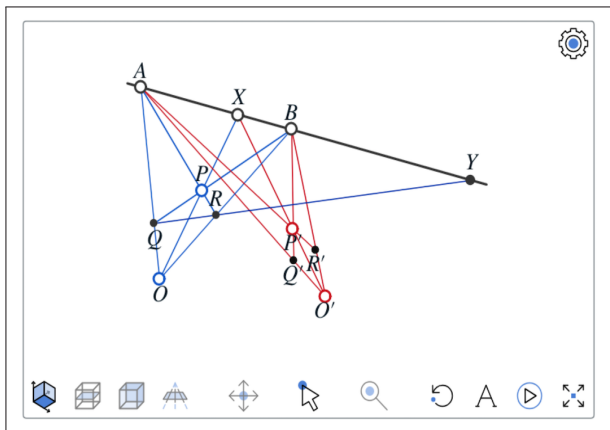
2.2. Principios básicos

El objetivo de esta sección es demostrar los principios básicos que sustentan a la armonía. Al primero de ellos lo llamaremos “Teorema Armónico” pues establece que la noción de armonía está bien definida. El segundo, señala que su relación con las proyecciones es entrañable; las dos demostraciones son como hermanas. El tercero, es la elegante simetría que ostenta la armonía; y para cerrar la sección vemos una aplicación que la incorpora a nuestro entorno cotidiano.

2.2.1. Teorema Armónico

Teorema 1 (Armónico) *La construcción del cuarto armónico no depende de los puntos auxiliares.*

Demostración. Consideremos una construcción del cuarto armónico con los mismos elementos y la misma notación de la sección anterior, pero ahora, pintada toda de azul.



Debemos demostrar que si hacemos otra construcción, con distintos datos (ahora con nombres primados y de color rojo), llegamos al mismo punto Y en la recta $A \vee B$.

Lo haremos en dos casos.

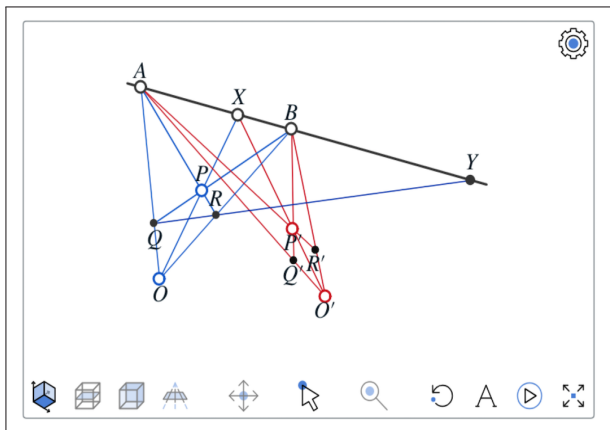
El primer caso y que es el principal, es cuando el punto O' con el que empezamos la segunda construcción está en un plano diferente del que podemos llamar el plano azul en donde se hizo la primera construcción.

Ésta es la primera vez que usamos una escena tridimensional; y aunque muchas veces nos hemos referido al espacio, todas las figuras que hemos usado han sido planas.

ProGeo3D también tiene la posibilidad de trabajar en 3 dimensiones. Y para ver que algo dibujado en una pantalla está en 3D se necesitan dos cosas: que esté con buena perspectiva (una proyección al lienzo desde un punto, llamado la cámara) y que se mueva rígidamente lo suficiente. Pues si se está moviendo, nuestro cerebro sabe muy bien interpretar los cambios relativos en las imágenes como si fueran causados por la tridimensionalidad del objeto. “No es que la distancia de A a B esté cambiando” –presupone de acuerdo a su experiencia– “es que ambos están girando rígidamente junto con todo lo demás, y entonces uno se mueve detrás del otro”, concluye. Y de hecho nuestro cerebro nos hace, y casi nos obliga a, verlos así.

...aquí sigue un “tutorial” ¿quizá video? de las particularidades 3D de ProGeo3D.

Regresando a nuestra demostración, teníamos como primer caso que los planos $(A \vee B \vee O)$



y $(A \vee B \vee O')$ son distintos. Donde denotamos al plano que generan tres puntos, con cuñas, \vee , en concordancia con cómo ahora denotamos a las rectas (“lo que generan ...” es lo que significa \vee).

La idea de la demostración es encontrar a un punto desde el cual no se distinguen las construcciones; descubrir por ahí a un “voyeur tuerto” que las confunda.

Puesto que las líneas auxiliares $O \vee P$ y $O' \vee P'$ se intersectan en el punto X , son coplanares. En-

tonces, las líneas $O \vee O'$ y $P \vee P'$ se tienen que intersectar: ese es nuestro “voyeur”. Sea

$$V = (O \vee O') \wedge (P \vee P');$$

es tal que no distingue a O de O' ni a P de P' .

Falta ver que V no distingue a la construcción azul de la roja; que la proyección del plano azul en el plano rojo desde el punto V , manda a una construcción en la otra; o bien, que prendiendo un foco en V una es la sombra de la otra.

Consideremos los planos

$$A \vee O \vee O' \quad \text{y} \quad B \vee P \vee P'.$$

Ambos contienen a V pues está en las rectas

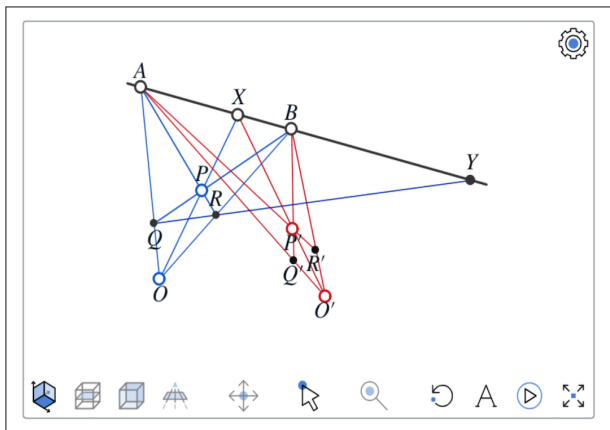
$$O \vee O' \quad \text{y} \quad P \vee P'.$$

Ambos contienen a Q , pues

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P);$$

y también contienen a

$$Q' = (A \vee O') \wedge (B \vee P').$$



Por lo tanto, estos tres puntos (V , Q y Q') están en la línea de intersección de los dos planos; y entonces V tampoco distingue a Q de Q' . De manera análoga se prueba que V , R y R' están alineados.

Así que a los últimos trazos en los planos azul y rojo, V los ve como idénticos; ambas construcciones concluyen con que el cuarto armónico de X respecto a A, B es la intersección de la línea $A \vee B$ con el plano

$$V \vee Q \vee R = V \vee Q' \vee R'.$$

Queda el caso en que los puntos auxiliares O y O' son coplanares. Pero se sigue fácilmente tomando un tercer punto O'' fuera de ese plano y por el caso anterior, la construcción coincidirá con ambas. \square

2.2.2. Invarianza bajo proyecciones

Una ligera variante de esta demostración, da que:

La proyección de una cuarteta armónica es también una cuarteta armónica.

Para verlo, consideremos a una terna colineal de puntos

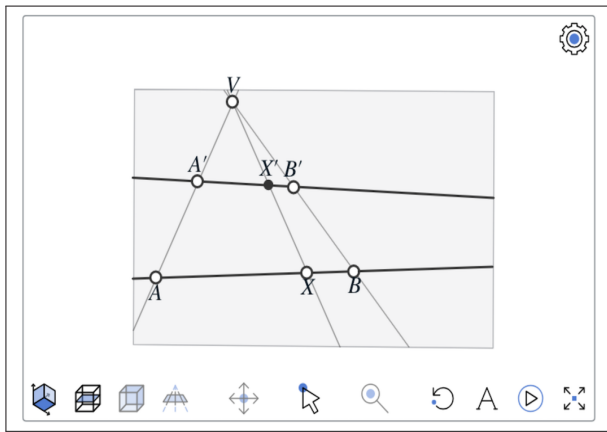
$$A, X, B$$

y a su proyección desde un punto V en una línea-lienzo en donde sus imágenes serán primadas; es decir, se proyectan respectivamente en los puntos

$$A', X', B'.$$

Y todo esto sucede en un plano que llamaremos π . Queremos demostrar que el cuarto armónico Y en la línea-fuente se proyecta desde V también en el cuarto armónico Y' de sus primados en la línea-lienzo.

A diferencia del caso anterior, el *voyeur* es ahora un invitado distinguido entre los datos. Pero la idea es la misma, utilizar la tercera dimensión, aunque lo que ahora debememos escoger con cuidado es a los puntos auxiliares para que V vuelva



a confundir las construcciones.

Sea O cualquier punto fuera de π y entonces escogemos a O' en la línea $V \vee O$. Y para un punto $P \in O \vee X$ (recuérdese, \in es “ser elemento de”) ya tenemos que definir

$$P' = (V \vee P) \wedge (O' \vee X').$$

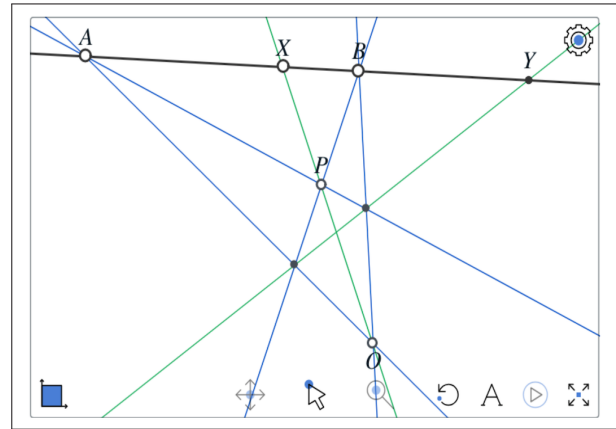
Entonces, e igualito que en la escena anterior, usando a dos planos se demuestra que cada punto que se construye en un “piso”, queda en *perspectiva* desde V (es decir, alineado con V) con el análogo del otro piso.

Así que, de nuevo, el último trazo de ambas construcciones quedá dentro de un plano por V . Y su intersección con el plano π es la línea que debíamos exhibir. \square

Al final del capítulo anterior, en la escena de la casita, dejamos en el aire a la pregunta de cómo se encontró el punto medio de uno de sus lados para subir ahí el techo. Se puede hacer con trazos de líneas diagonales, pero con la teoría que ya tenemos, podemos contestar que debe de ser el

armónico del punto de fuga respecto a los extremos de ese lado de la casita. Pues se trata de una proyección, éstas preservan armonía y en el “mundo real” el punto medio es armónico del punto al infinito que se proyecta en el punto de fuga.

EJERCICIO. Divide en cuatro partes iguales al otro lado de la casita. Puedes usar la herramienta “Armonía” con la que primero seleccionas a un punto (con un click) y después a una pareja (arrastrando al primer punto hacia el segundo) para obtener al cuarto armónico.



2.2.3. Simetría de la armonía

Aunque a veces hablemos de “cuartetos armónicas” a la ligera, debe quedar claro que se trata de una simplificación; de economía en el lenguaje. Pues en realidad, la noción de armonía se refiere a dos parejas –y lo que se sobreentiende es que la cuarteta ya viene partida en dos mitades.

En los ejemplos anteriores (que respetan la notación de la primera construcción) A y B son una pareja mientras que X y Y forman la otra. Esto sí

queda bien explícito al decir “ Y es el armónico de X respecto a A y B ”. En esta frase, como en la construcción del cuarto armónico (que tenemos en pantalla) es claro que el papel que juegan A y B es simétrico; es decir, si cambiamos el nombre a los puntos y seguimos a ciegas la receta, llegamos a lo mismo (aunque en el camino algunos nombres auxiliares se intercambien). Pero en la otra pareja no es así: X fue dato y su armónico Y salió como resultado. Sin embargo, es fácil ver que al dar a Y

como dato, escogiendo adecuadamente a los puntos auxiliares, el mismo cuadrilátero externo de la construcción, nos regresa a X . Así que dentro de esa pareja también hay simetría; y es correcto decir “ X y Y son armónicos respecto a A y B ”, sin que en ninguna de las parejas haya un orden preestablecido.

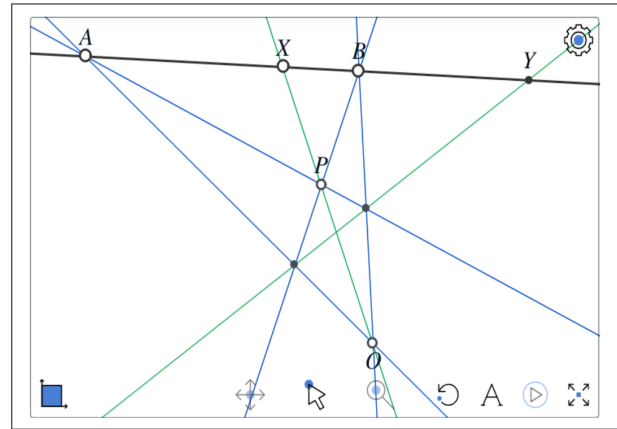
Lo que no se sigue de la construcción, y vamos a demostrar ahora, es que la armonía también es simétrica respecto a las parejas. Es decir, que:

Si X y Y son armónicos respecto a A y B , entonces A y B son armónicos respecto a X y Y .

Demostración. Consideremos una construcción del cuarto armónico Y , de X respecto a A y B .

Sea C el punto de intersección de las dos diagonales (verdes).

De C podemos trazar líneas a A y a B , las amarillas. Que, al cortarse con las líneas del cuadrilátero exterior (las azules), nos dan cuatro nuevos puntos: los colorados.



Al dibujar las cuatro líneas (moradas) que quedan por trazar entre los puntos colorados, resulta que van y le pegan por parejas a X y a Y . Estas alineaciones de tres puntos, o co-incidencias, no son casualidad o cuestión del dibujo: son consecuencia del Teorema Armónico. Por ejemplo, la línea morada de arriba que pasa por Y , hace precisamente eso pues el pequeño papalote del que es diagonal es el que surge de la construcción del cuarto armónico al arrancarla con C y P como au-

xiliares en vez de con O y P como se hizo originalmente.

De manera análoga, se obtienen las otras tres co-incidencias usando a los otros tres papalotitos en que se partió el papalote original.

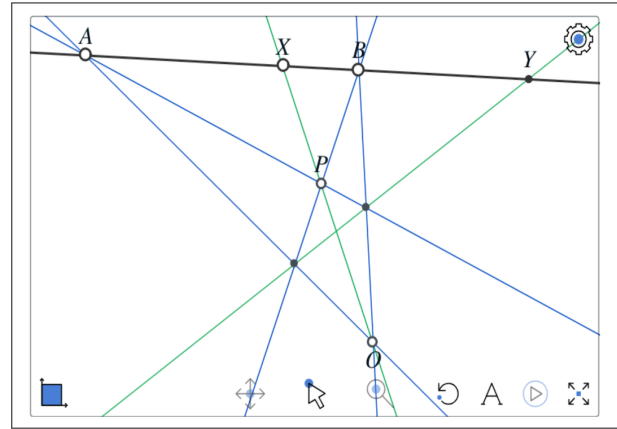
Al borrar las primeras líneas (azules y verdes), la configuración demuestra que A y B son armónicos respecto a X y Y como queríamos. \square

A esta configuración completa ya la habíamos visto en la escena de movimientos hiperbólicos (§1.2.3) y la volveremos a ver. La llamaremos la *configuración 13-13* pues tiene 13 puntos y 13 líneas y mucha simetría.

2.2.4. Sucesiones armónicas

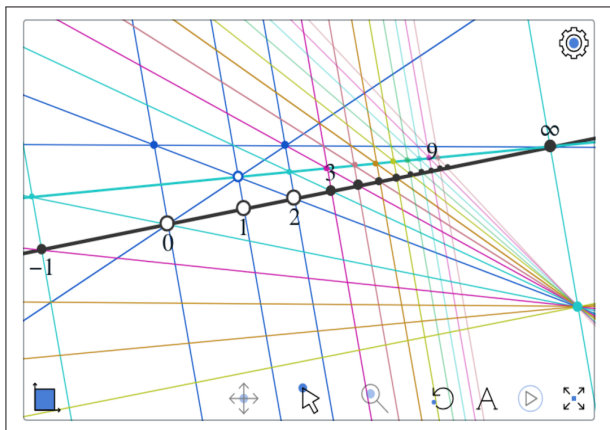
Para terminar esta sección de principios básicos, queremos subrayar que los efectos de la armonía están muy presentes en nuestro mundo visual cotidiano.

Llamaremos *sucesión armónica* a la proyección de una sucesión de puntos equidistantes en una



línea y el nombre que hemos usado quedará claro en la construcción. Pero esto implica que nuestro mundo visual está lleno de ejemplos: cómo vemos los postes en una avenida, las ventanas en un edificio, los barrotes en una reja y, por supuesto, el ejemplo paradigmático: los durmientes de una vía de tren en el desierto.

Si un pintor nos da una línea con tres marcas, digamos que son 0 , 1 y 2 , que están en donde se ven tres puntos equidistantes en una línea, enton-



ces con la armonía y las propiedades que hemos deducido de ella, se determina en dónde, en qué puntos, se deben dibujar el resto de los números enteros; y es una sucesión armónica.

Primero, el infinito (o punto de fuga de la proyección de esa línea), ∞ , debe ser el armónico del 1 respecto al 0 y el 2. Pues el 1 es el punto medio entre el 0 y el 2 y las proyecciones preservan armonía. Nótese que en la escena se usó como punto auxiliar para la construcción del cuarto armónico

al punto ideal en la dirección perpendicular a la recta (nos garantiza que está afuera y lejos).

Con el infinito ya determinado en la línea; el 3 debe ser el armónico del 1 respecto a 2 e ∞ , pues el 2 es el punto medio entre el 1 y el 3.

La sucesión se puede prolongar tanto como se quiera en las dos direcciones pues

$$n - 1, n, n + 1, \infty$$

es una cuarteta armónica para cualquier entero n .

Hay que notar que las cuadrículas del capítulo anterior están llenas de tramos de sucesiones armónicas, así como el mundo moderno que nos rodea también lo está.

2.3. Reflexiones Armónicas

Terminamos este capítulo acercándonos de nuevo al tema de los movimientos geométricos. Se puede pensar al efecto final de un movimiento como una transformación de un cierto conjunto (o espacio) en sí mismo. Y aunque no se pueda llegar a ella por un movimiento continuo, sino que su efecto está allí de golpe y porrazo; el ejemplo más común y mundano es la reflexión en un espejo. Resultó además que la generalización matemática de estas transformaciones geométricas adquirieron en el siglo XX una gran importancia teórica. En esta última sección veremos que se puede considerar a la armonía como la versión unidimensional de una reflexión en ese sentido abstracto y que, a la vez, generaliza muy limpia y nítidamente a las reflexiones de nuestro mundo, o euclidianas.

2.3.1. Definiciones

En el mundo real, llamamos *reflexión* al efecto de un espejo:

“Un plano que actúa sobre los puntos del espacio mandándolos del otro lado (de ese plano) de tal manera que un punto y su imagen están siempre a la misma distancia del espejo.”

Por supuesto, esto no es estrictamente cierto. Estamos claros que lo que hace un espejo real es simplemente reflejar los rayos de luz. Pero lo hace con tal orden y exactitud que nuestro aparato perceptivo reconstruye objetos perfectamente plausibles y coherentes, aunque inexistentes más que como imágenes. Sabemos que no actúa sobre todo el espacio sino sobre un sólo lado del espejo y además, apenas sobre un subconjunto pequeñito (típicamente un baño). Sin embargo, la abstracción matemática de una reflexión, lo que entenderemos de aquí en adelante por *reflexión*, sí actúa sobre todo el Espacio Euclidiano y de la misma manera: preservando distancias, se intercambian los dos lados de un *espejo*, que ahora es un plano en toda su extensión y magnitud.

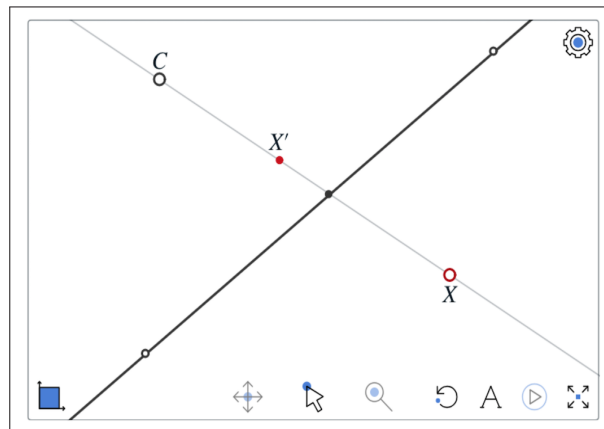
Otra manera de describir el efecto de una refle-

ción es considerar al haz de líneas perpendiculares al espejo: cada una de ellas se voltea, se refleja, en su punto de intersección con el espejo. Si nos reincorporamos al Espacio Desarguesiano, este haz de líneas es el haz concurrente en un punto ideal y en cada una de éstas líneas, la transformación es el apareamiento de armonía respecto a ese punto ideal (en el infinito) y el punto en el que corta al espejo; pues el punto medio entre cada punto-fuente y su punto-imagen está en el espejo.

Llamaremos **reflexión armónica** a la generalización natural de esta idea:

Dado un plano π , que llamaremos el *espejo*, y un punto C fuera de π , que llamaremos el *centro*, la *reflexión armónica* que determinan π y C es la transformación que a cada punto X le asocia el punto X' que es armónico de X respecto a C y el punto en que la línea $(C \vee X)$ intersecta a π .

Por supuesto, esta definición también tiene sentido en un plano cuando el espejo es una línea e



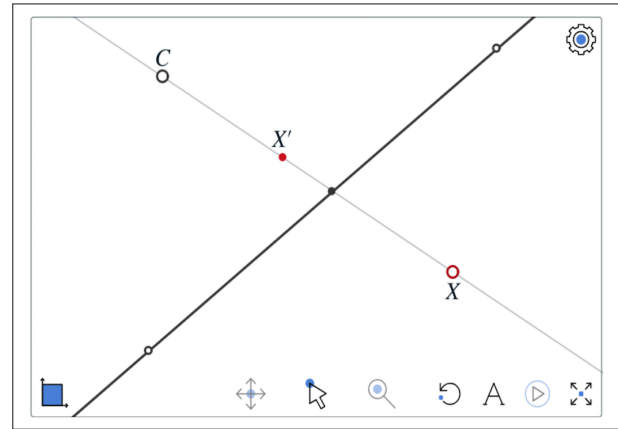
que no contiene al centro C –es lo que tenemos en la figura, con el espejo e en negro. (La cuarteta $C, X, (C \vee X) \wedge e, X'$ es armónica para cualquier X). Además, una reflexión armónica en el espacio se restringe a la correspondiente reflexión armónica en los planos que pasan por el centro con espejo en la línea de intersección. Y en las líneas que pasan por el centro es el apareamiento de armonía, pensado ahora como transformación de una línea en sí misma: fija dos puntos e intercambia

los dos segmentos en que éstos la parten; típicamente, uno de ellos tiene al punto medio y el otro al punto ideal.

Las reflexiones euclidianas son entonces las reflexiones armónicas (en la extensión Desarguesiana correspondiente) respecto a un espejo (línea o plano dependiendo del ambiente considerado) y cuyo centro es el punto ideal asociado a (o al infinito en) su dirección perpendicular. Así, el espejo se vuelve la *mediatriz* entre cualquier objeto y su imagen.

Por otro lado, si en el plano tomamos como espejo a la línea al infinito, la reflexión armónica es la rotación de media vuelta (180 grados) alrededor del centro; y, en el espacio de 3 dimensiones, con el espejo en el plano al infinito se obtiene la inversión antipoda (o central) en el centro.

En general, una reflexión armónica cualquiera se ve como estos dos ejemplos bien acoplados. Cerca del espejo se ve como una reflexión y cerca del centro como una inversión central (juegue con X en la figura para observar este comportamiento); en particular, deja fijos (en su lugar, sin mover) a



cada uno de los puntos del espejo y al centro.

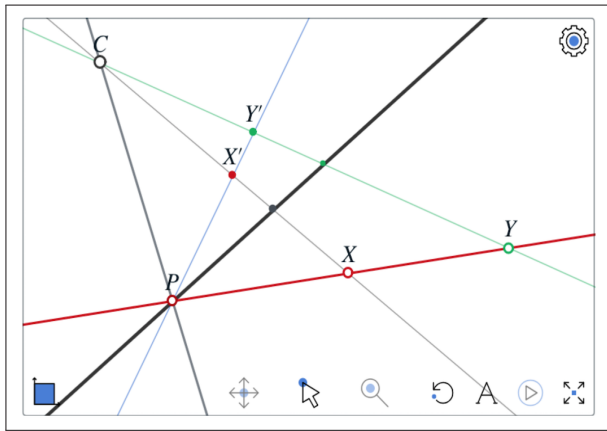
La simetría de la armonía implica que si aplicamos una reflexión armónica dos veces todo regresa a su lugar. Como función es su propia inversa que es lo que se llama una *involución*. Y además, veremos a continuación que cumple la propiedad básica que las transformaciones geométricas deben cumplir.

2.3.2. Líneas van en líneas

Proposición 1 Una reflexión armónica manda líneas en líneas.

Demostración. Consideremos a la reflexión armónica en un plano con centro C y espejo e .

Puesto que será un personaje central, conviene ponerle nombre a la transformación, la llamaremos ρ (léase “rho”). Y sea ℓ una línea cualquiera. Queremos demostrar que la imagen de ℓ bajo ρ ,



que denotaremos $\ell \cdot \rho$ (se puede leer “ ℓ punto ρ ” o “ ℓ bajo ρ ”), que es el conjunto de todas las imágenes de puntos en ℓ bajo ρ , también es una línea.

Si la línea ℓ es el espejo e , se queda fija punto a punto y no hay nada que demostrar ($e = e \cdot \rho$). Supongamos entonces que

$$P = e \wedge \ell$$

es un punto y podemos considerar a un nuevo punto $X \in \ell$, de tal manera que $\ell = P \vee X$.

Sea X' la imagen de X bajo ρ , esto es,

$$X' = X \cdot \rho.$$

Vamos a probar que si definimos $\ell' = P \vee X'$, entonces

$$\ell' = \ell \cdot \rho$$

para concluir con la demostración (a la línea ℓ , ρ la manda en la línea ℓ').

Esto es fácil de ver, pues si consideramos cualquier otro punto $Y \in \ell$ y definimos

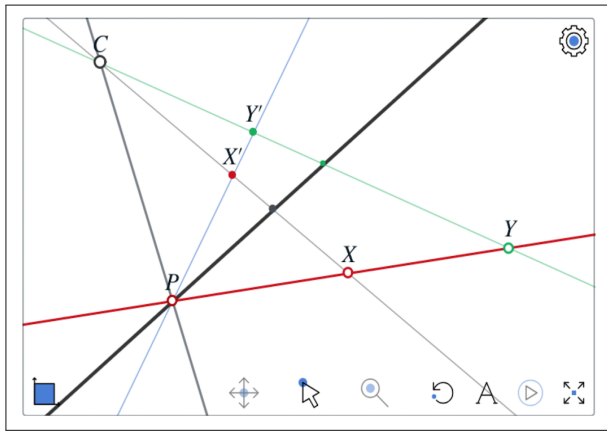
$$Y' = (C \vee Y) \wedge (P \vee X') = (C \vee Y) \wedge \ell',$$

obtenemos dos cuartetitas alineadas y en perspectiva desde P ; es decir, P proyecta a una en la otra. Por la definición de ρ , una de ellas es armónica $(C, X, e \wedge (C \vee X), X')$, y por lo tanto la otra (asociada a Y) también lo es. Y esto implica que

$$Y' = Y \cdot \rho \in \ell \cdot \rho;$$

así que $\ell' = \ell \cdot \rho$.

De hecho, y esto será usado después, obsérvese que ρ actúa como la proyección desde el centro C



entre la línea ℓ y su imagen ℓ' .

También hay que remarcar que la cuartetita de líneas $C \vee P, \ell, e, \ell'$ es una cuartetita armónica de líneas concurrentes en $P = e \wedge \ell$ según la definición del Ejercicio xxx.

Hemos supuesto –implícitamente por las figuras– que $C \notin \ell$, pero en el caso en que $C \in \ell$, la recta se queda fija como recta, pues ρ es una reflexión armónica ahí.

Finalmente, para el caso de una reflexión armónica en dimensión 3, la argumentación se restringe al plano $C \vee \ell$ con espejo en la línea de intersección con el espejo, y este es el caso que acabamos de ver. \square

2.3.3. Configuración del cuadrángulo extendido (y grupos)

Las reflexiones armónicas son cruciales para explicar la existencia de las curvas armónicas. Muy en particular, lo serán los ejemplos que surgen de la configuración del cuadrángulo extendido, que

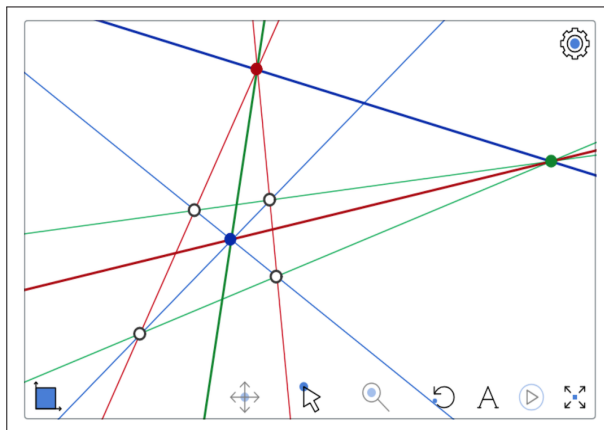
aunque ya hemos visto en diversos contextos, nos conviene tratarla con más precisión y en sí misma.

Un *cuadrángulo* son cuatro puntos coplanares en posición general (es decir, ningunos tres de ellos colineales) y que a veces llamaremos *esquinas*. Entre ellos, se pueden trazar seis líneas. Éstas se dividen naturalmente en tres parejas, que llamaremos *opuestas*, y que tocan a las cuatro esquinas. Pintando a las seis líneas con tres colores, este apareamiento queda muy claro; por cada punto original pasan líneas de los tres colores.

Cada par de líneas opuestas se corta en un nuevo punto, que resulta natural pintar con el color correspondiente. Y estos tres puntos definen un triángulo a cuyos lados conviene asignar el color del vértice opuesto.

Así, tenemos un nuevo triángulo que llamaremos el *triángulo derivado*. Con él, se completa una configuración que tiene 7 puntos y 9 líneas: la que denominamos *configuración del cuadrángulo extendido*.

Antes de seguir adelante, conviene abrir un paréntesis de terminología. En la primera construc-

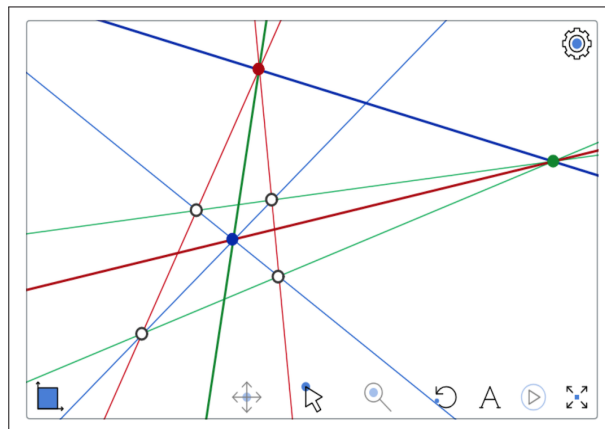


ción del libro arrancamos con lo que llamamos una *loseta*, que ahora podemos definir como un cuadrángulo junto con un punto distinguido en su triángulo derivado. Esto es lo que determina que *su horizonte* esté bien definido como el lado opuesto en el triángulo derivado. Y, en ese entonces, representamos a la selección de este punto con algo mundano como “colorear la loseta”, pues hubiera sido imposible abordar estos detalles técnicos en aquel momento.

Los tres puntos del triángulo derivado corresponden a los posibles ordenes cíclicos de la cuarteta de puntos. También, hemos sido un poco ambiguos en el uso de los términos “cuadrángulo”, “cuadrilátero” y “loseta”. Pero ahora ya podemos precisar: un *cuadrángulo* son cuatro puntos en posición general; un *cuadrilátero* son cuatro líneas en posición general (ninguna terna concurrente). Y entonces una loseta son los dos juntos: cuatro puntos y cuatro líneas que dan un orden cíclico (en puntos y líneas) y que dejan fuera a un par de líneas opuestas del cuadrángulo (las *diagonales* de la loseta que se cortan en el punto escogido).

Regresemos a la configuración del cuadrángulo extendido. Obsérvese que cada línea derivada corta a las dos líneas originales de su mismo color en dos nuevos puntos que naturalmente heredan color –les llamaremos “puntitos” para distinguirlos de los “originales” y los “derivados”. No es difícil comprobar –y sin necesidad de ningún trazo nuevo– que cada una de las nueve líneas tiene ahora a una cuarteta armónica de puntos.

Si el lector pensó en ese “no es difícil compro-



bar que...”, y se convenció rápido, seguro que uso un argumento de simetría: no hay que ver nueve casos sino únicamente dos. Pues hay dos tipos de líneas, las “derivadas” (3) y las “originales” (6). Lo que queremos describir ahora es que esa simetría lógica (en qué paso de la construcción apareció), también se expresa de manera geométrica.

Consideremos a las reflexiones armónicas con centro en un vértice del triángulo derivado y espejo en su lado opuesto, que identificaremos con un

color.

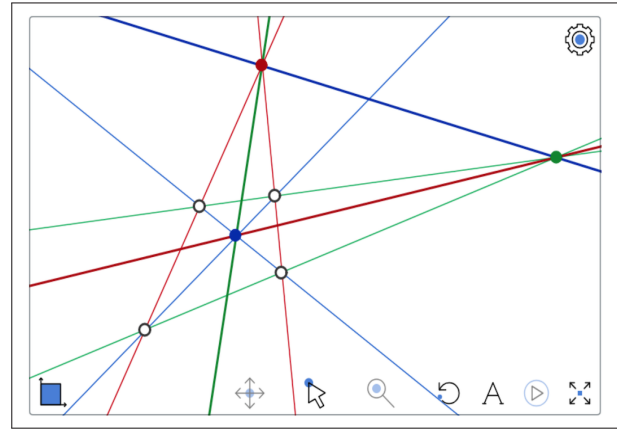
Para experimentar con el efecto de estas tres transformaciones, hemos incorporado a un punto libre X (en gris) y a sus tres reflejados armónicos con el color (tenue) correspondiente; y además los unimos con segmentos a X para identificar visualmente su procedencia.

Al llevar X a los cuatro puntos-esquina, se ve que las tres reflexiones los permutan: intercambian –o transponen– a las dos parejas en las líneas del color correspondiente (pues las cuartetos en esas líneas son armónicas).

Y se puede observar algo más:

La composición de dos de las reflexiones da a la tercera; por ejemplo, primero aplicar la roja a X para después aplicarle la verde al resultado, da lo mismo que aplicarle la azul a X . Esto es cierto para las cuatro esquinas del cuadrángulo aunque es cierto en general y lo demostraremos después.

Tenemos entonces lo que se llama un *grupo de transformaciones*. Si al conjunto de las tres reflexiones le añadimos la *identidad* (la transformación que no hace nada, que deja a todo mundo en su



lugar y que en el dibujo, su efecto en X está representado por X mismo), se tiene que cualquier composición de un par en el conjunto está ahí y que también están ahí todas las transformaciones inversas –que en este caso son ellas mismas.

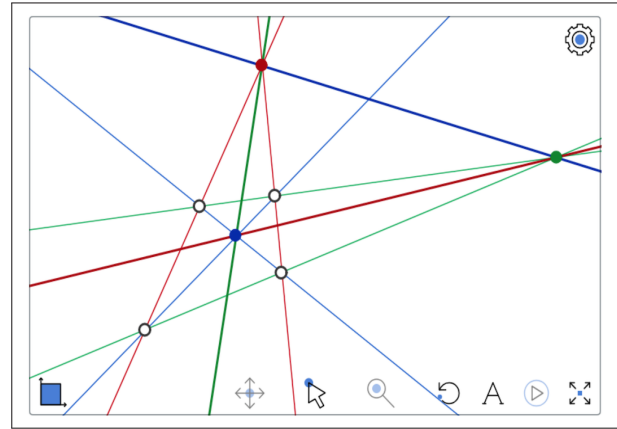
Pero este grupo de orden (o tamaño) 4, todavía no incluye a todas las simetrías geométricas de la configuración, sólo a aquellas que preservan la coloración. Sin embargo, aún hay más.

Consideremos la reflexión armónica con centro

en un puntito rojo y espejo en la línea roja que no lo contiene. Su efecto en las cuatro esquinas es que las dos que están en el espejo se quedan en su lugar pero las dos de su lado opuesto se transponen. Como los cuatro puntos que dan lugar a ella se permutan, toda la configuración es invariante, aunque se muevan internamente sus elementos; en particular, en el ejemplo transponen color todos los elementos verde y azul.

Como se pueden obtener de manera análoga (variando el color y el espejo), las 6 transposiciones simples de cualquier par de los cuatro puntos-esquina originales, entonces se puede lograr cualquier permutación de ellos componiendo a estas reflexiones armónicas. Y permutaciones de 4 elementos hay 24. Así que componiendo a las reflexiones armónicas que hemos señalado, se obtiene un grupo de transformaciones de orden 24 en el que ya no todas ellas son reflexiones armónicas.

Antes de demostrar el hecho que enunciamos sin demostrar, debemos notar que estamos a un paso de la configuración 13-13 que ya habíamos mencionado y usado en la prueba de la simetría



de la armonía. El Teorema Armónico implica que los seis puntitos se alinean en ternas tricolores para dar cuatro líneas (grises).

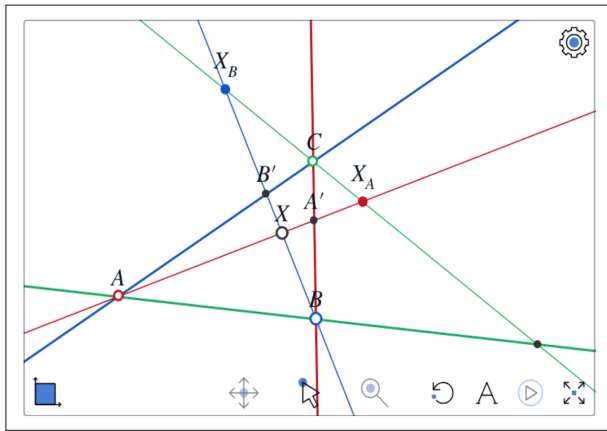
EJERCICIO. Es un buen ejercicio de dualidad ver que si con este último cuadrilátero (cuatro líneas en posición general) se desarrolla la construcción dual, se obtiene exactamente la misma configuración y el último paso es encontrar los cuatro puntos originales donde concurren tres rectas de distinto color.

Lo que quedamos de demostrar conviene verlo

en general (el caso que nos interesaba es aplicar el siguiente lema al triángulo derivado).

Lema 1 (Triángulo Armónico) Sean A, B, C tres puntos no colineales. Entonces la reflexión armónica con centro en A y espejo en $B \vee C$ seguida de la reflexión armónica con centro en B y espejo en $C \vee A$ es la reflexión armónica con centro en C y espejo en $A \vee B$.

Demostración. Sea X un punto cualquiera en el



plano y sea X_A (respectivamente, X_B) el reflejado armónico de X con centro A y espejo $B \vee C$ (respectivamente, con centro B y espejo $C \vee A$). Vamos a demostrar que X_A y X_B son reflejados armónicos con centro C y espejo $A \vee B$, y el enunciado del lema se sigue cambiando los nombres de B y de C .

Si llamamos

$$A' = (A \vee X) \wedge (B \vee C)$$

$$\text{y } B' = (B \vee X) \wedge (C \vee A),$$

entonces la proyección desde C de la línea $A \vee X$ en la línea $B \vee X$ manda a la terna

$$A, X, A' \text{ en la terna } B', X, B.$$

Y puesto que las proyecciones preservan armonía, entonces tiene que mandar a X_A en X_B y por lo tanto C, X_A, X_B son colineales.

Falta ver que la cuarteta

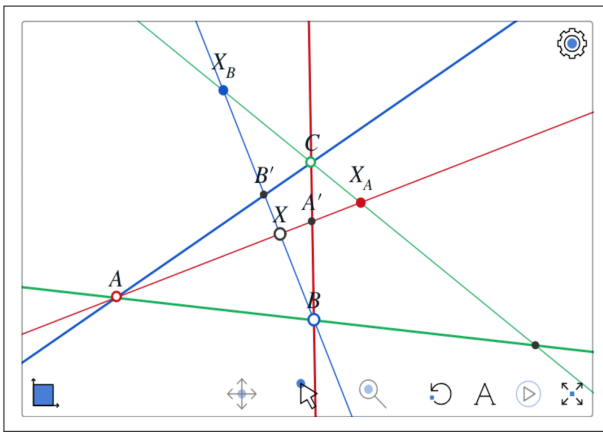
$$(A \vee B) \wedge (C \vee X_A), X_A, C, X_B$$

en la nueva línea por C es armónica. Pero esto se sigue de que es la proyección desde A de la cuarteta armónica B, X, B', X_B .

□

Hay que notar que si continuamos la escena con X_C como el reflejado armónico de X con centro C y espejo $A \vee B$, y concluimos con los trazos equivalentes a los de la demostración, llegamos a la escena anterior que arranqué con un cuadrángulo.

Pero ahora se empezó con el triángulo derivado y el punto X es el que da lugar al cuadrángulo X, X_A, X_B, X_C que se obtiene aplicando las cuatro transformaciones de un grupo a un punto cualquiera X . Además, hemos resaltado con su color a las tres posibles losetas a las que da lugar esta cuarteta para que, moviendo adecuadamente a X , esto quede claro.



Capítulo 3

Curvas Armónicas y Reglados

Uno de los logros más espectaculares de la matemática griega fue detectar la importancia de las curvas cónicas, definir las y estudiarlas. De ellas, convivimos cotidianamente con las elipses, pues forman parte de nuestro mundo visual; las vemos por montones: son los círculos vistos de lado. Pero los griegos tuvieron la audacia de incluir en la misma familia a las parábolas y a las hipérbolas. Las llamaron *curvas cónicas* pues las definieron como la sección, o intersección, de un plano con un cono circular. Y además, con una profundidad teó-

rica admirable, demostraron que también se pueden obtener intrínsecamente en un plano como lugares geométricos determinados por ciertas propiedades métricas que no viene al caso recordar.

Casi veinte siglos después, Johannes Kepler (1571 – 1630) echó mano de las elipses para describir las órbitas de los planetas y cuando Descartes coordinizó al plano, las curvas cónicas resultaron estar asociadas a los polinomios de segundo grado en dos variables. Pues éstos polinomios definen curvas en el plano, a las que se llamó de segun-

do orden o de segundo grado y se demostró que incluían de manera protagónica a las viejas y conocidas curvas cónicas.

Sin embargo, para definir las no se necesita la noción de distancia (de la que dependen los conos circulares o sus definiciones como lugares geométricos) ni de aritmetizar la geometría (para asociarlas con los polinomios). Se les puede describir con base en simple incidencia.

En los textos de Geometría Proyectiva se les define de diversas maneras que resultan ser, por supuesto, equivalentes (eso lo probaremos con cuidado en la Parte II). Nuestra definición de batalla –que damos en este capítulo y es la que usamos para vislumbrar los porqués de sus propiedades básicas– está en el espíritu de la definición griega clásica, en el sentido de que usa a la tercera dimensión para obtenerlas como sección plana de ciertas superficies. En nuestro caso, serán las doblemente regladas pues éstas se pueden definir por simple incidencia.

Como no es correcto presuponer cosas que no se demuestren inmediatamente, aunque a la larga

sean ciertas, pues la esencia de las matemáticas es no aceptar hechos como dados hasta que estén debidamente validados: preferimos cambiarles el nombre. Las llamaremos “*curvas armónicas*” motivados por, y en referencia a, su íntima y sugestiva relación con ese concepto.

Antes de dar nuestra definición de batalla, daremos, en la primera sección, una presentación previa de las curvas armónicas basada en una construcción muy simple que usa a la armonía como herramienta. Esta construcción, además de apoyar nuestra terminología, permitirá prever y enunciar algunas de sus propiedades importantes. Y también se presta para relacionarlas con las curvas cónicas clásicas.

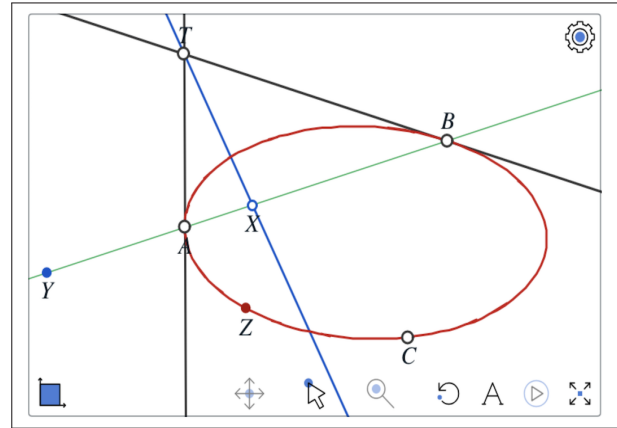
3.1. Curvas Armónicas

Usando como herramienta a la armonía, construiremos una curva que pasa por tres puntos y es “tangente” a líneas por dos de ellos. Hay que notar que desde el principio el concepto de “línea tangente” se está usando, pues viene a la par con el de curvas armónicas.

La idea de la construcción conduce a enunciar las propiedades de las curvas armónicas que, a la larga, pretendemos demostrar. También se presta para construir los haces envolventes como colección de líneas tangentes; y para referirse a las curvas cónicas clásicas como curvas armónicas diferenciadas por la relación que guardan con la línea al infinito.

3.1.1. Curvas armónicas y polaridad

Construiremos una curva que pasa por tres puntos A, B, C y es tangente a las líneas $T \vee A$ y $T \vee B$ en A y en B respectivamente. Supondremos además, que los cuatro puntos A, B, C, T , de los cua-



les depende la construcción, están en posición general (no hay tres colineales).

Sea $X \in A \vee B$ un punto libre (pero restringido a vivir en la línea) que servirá como parámetro para dibujar la curva y, a la vez, como parámetro para el haz de líneas concurrentes en T .

Sea Y el armónico de X respecto a A, B .

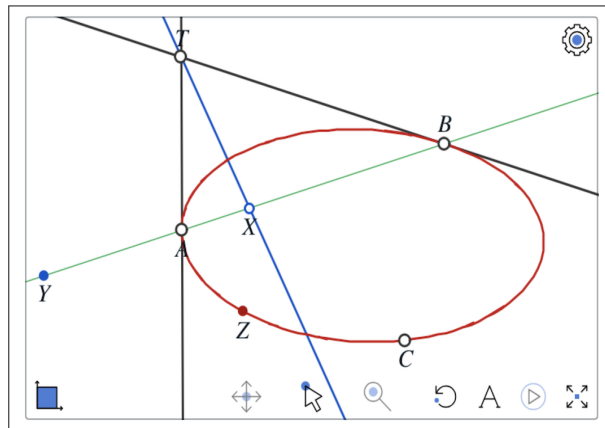
Y sea Z el reflejado armónico de C respecto a Y y $T \vee X$; es decir, Z es la imagen de C bajo la reflexión armónica con espejo $T \vee X$ y centro Y .

Al variar $X \in A \vee B$, el punto Z se mueve y dibuja a su paso una curva que llamaremos *curva armónica* y denotaremos \mathcal{C} .

(En ProGeo3D se dibuja a \mathcal{C} usando la herramienta *Curva/Familia* –la que nos faltaba usar de *Geometría Proyectiva*: se selecciona a Z que es el que dejará rastro –al que se le pone tinta– y se le arrastra a X que es el punto que se moverá en su pista o carril, que en este caso es la línea $A \vee B$ en donde fue definido).

En la posición original de los datos, \mathcal{C} es una elipse tangente a dos líneas dadas en dos puntos dados y que pasa por un tercer punto. Pero al mover los datos geométricos que la definen, se puede convertir en una hipérbola y las transiciones (cuando los cuatro puntos no están en posición general) son interesantes.

En esta construcción, se aplicó una familia de reflexiones armónicas (parametrizada por una línea) a un punto fijo C , y se dibujó el rastro. Puesto que estas transformaciones serán personajes principales en lo que sigue, nos convendrá ponerles nombre: sea ρ_X la reflexión armónica con espejo



en $X \vee T$ y centro en Y , para $X \in A \vee B$ distinto de A y B . Esta última condición es necesaria para que $Y \notin X \vee T$ (para que el centro no esté en el espejo) y, efectivamente, ρ_X sea una reflexión armónica. Así, que la definición funciona bien para X distinto de A y de B , para los dos segmentos abiertos en que se parte la recta, pero le añadimos A y B a \mathcal{C} , pues por ahí claramente pasa Z .

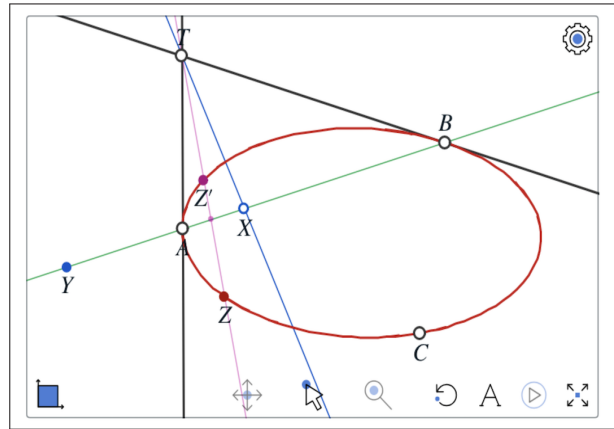
Resulta que cada una de estas reflexiones armónicas, ρ_X , no solo manda a C en un punto de la

curva (a $Z = C \cdot \rho_X$, que recuérdese, lo leíamos “C bajo ρ_X ”) sino que deja invariante a toda la curva \mathcal{C} ; manda a cualquier punto de \mathcal{C} en \mathcal{C} , que se puede escribir

$$\mathcal{C} = \mathcal{C} \cdot \rho_X.$$

Para intuir este hecho, trate de mover a C en la misma curva armónica que está pintada de rojo en la pantalla; y observe que (más allá de las inevitables vibraciones porque \mathcal{C} depende de C) Z se mueve como su reflejado armónico bajo ρ_X con X fija. (Esto se puede ver sin vibraciones del pulso –pero lo dejamos como ejercicio– con otro punto variable en $A \vee B$, $X' \in A \vee B$ digamos, y aplicándole $\rho_{X'}$ a Z; es decir, viendo que $Z \cdot \rho_{X'} = (C \cdot \rho_X) \cdot \rho_{X'}$ siempre está en \mathcal{C} al animar a X o a X'.)

Lo que indica este experimento es que por lo que funciona o a lo que apunta la construcción, es que una curva armónica tiene muchas simetrías de reflexión. De hecho, probaremos a la larga que tiene tantas como podría uno esperar: cada punto fuera de ella es un centro y cada línea no tangente,



un espejo. Pero antes de precisar esta idea con lo que llamaremos “polaridad”, observemos otra simetría de reflexión que surge de la figura: la que tiene espejo $A \vee B$ y centro T; la que intercambia los dos cachetes (arriba y abajo) de \mathcal{C} .

Sea Z' el reflejado armónico de Z en el espejo $A \vee B$ y con centro en T.

Al mover, y animar, al punto X (del cual dependen Z y Z'), observa como Z' recorre a \mathcal{C} en co-reografía de “espejo” junto con Z. Esto muestra,

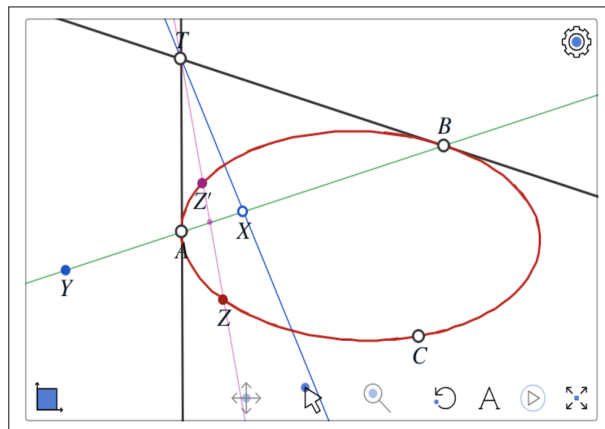
experimentalmente, que \mathcal{C} es invariante bajo esa reflexión armónica.

Diremos que la línea $A \vee B$ y el punto T , son “polares respecto a \mathcal{C} ” y la otra familia de ejemplos de “parejas polares respecto a \mathcal{C} ” (las que usamos para el trazo) son, para cualquier punto $X \in A \vee B$, la línea $X \vee T$ y el punto Y (y aquí ya no hay que quitar a A y B).

Veremos a la larga que una curva armónica \mathcal{C} induce una *polaridad* en su plano π ; es decir, un apareamiento (o correspondencia 1-1) entre los puntos y las líneas de π que cumple:

- i) Para $P \in \mathcal{C}$, su línea polar es la línea tangente a \mathcal{C} en P (y contiene a P).
- ii) Si $P \notin \mathcal{C}$, entonces P no está en su línea polar y la reflexión armónica con centro en P y su línea polar como espejo, deja invariante a la curva \mathcal{C} .
- iii) Si P está en la línea polar de Q , entonces Q está en la línea polar de P .

Ya hemos dado varios ejemplos de parejas pola-



res para \mathcal{C} , aunque nos faltó decir explícitamente que las líneas $T \vee A$ y $T \vee B$ tienen como *polos* (dícese del punto polar a una línea) a los puntos A y B respectivamente (caen en el caso (i) de las líneas tangentes).

Para aclarar nuestra situación lógica y la dirección teórica en la que vamos, conviene reconsiderar y precisar nuestra terminología.

Llamemos *curva-A* a una curva que se obtiene de la construcción anterior –a la que llamaremos

la *construcción-A*. Están definidas por dos puntos con sus tangentes y un tercer punto (en posición general). Y dejemos al término *curva armónica* como algo aún sin definir pero que queremos que cumpla la *propiedad de polaridad* que acabamos de hacer explícita. Si tomamos a esta propiedad de polaridad como definición, lo que no sabemos es si existen tales curvas armónicas.

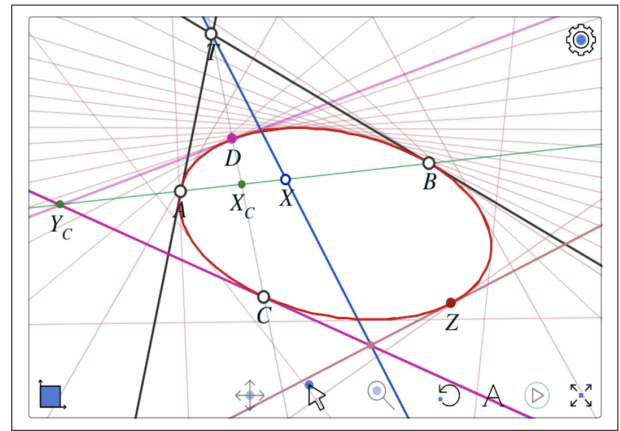
Lo que sí es cierto, y dejamos la prueba como ejercicio, es que si un conjunto \mathcal{C} contiene a una configuración como la que da inicio a la construcción de una curva-A, y además cumple la propiedad de polaridad, entonces tiene que ser a fuerzas esa curva-A. Así que las curvas-A, son hasta ahora, nuestros mejores candidatos a ser curvas armónicas. Pero falta un buen trecho que recorrer para demostrar que las curvas-A tienen una polaridad en toda la extensión de la palabra.

3.1.2. Haces envolventes

Hemos declarado que las familias de líneas tangentes a las curvas armónicas (y que llamaremos

sus *haces envolventes*) son tan importantes como ellas. Pues la propiedad de polaridad depende de ello. Sería bueno entonces (y abonará en nuestro optimismo) completar la construcción de curva-A para que incluya también a su haz envolvente.

Para ello, recarguemos a la construcción de una curva-A, denotada \mathcal{C} , que pasa por un punto C con tangentes dadas en otros dos puntos A y B . Se obtuvo aplicando a C la familia de reflexiones armónicas ρ_X con X en $A \vee B$ distinto de A y B . Para



obtener a su *haz envolvente*, debemos encontrar primero a la línea tangente a \mathcal{C} en ese punto C .

Ésta se obtiene para los valores de X y Y que nos dan $Z = C$. Los hemos denotado X_C y Y_C , y son los que hacen que C esté en el espejo de la reflexión ρ_X pues C nunca será el centro (que vive en $A \vee B$). Primero se obtiene

$$X_C = (A \vee B) \wedge (C \vee T)$$

y luego Y_C como su armónico respecto a A, B .

La recta

$$\ell = Y_C \vee C$$

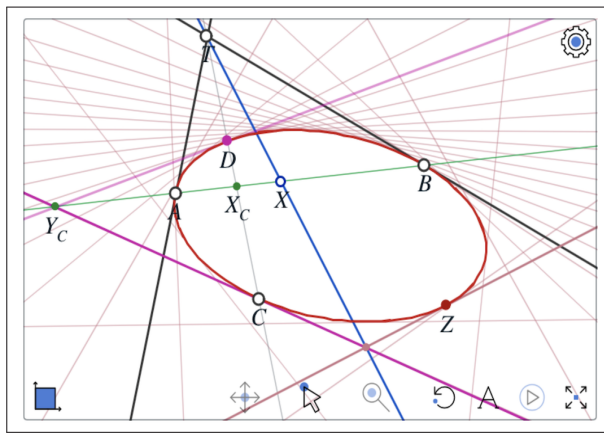
es la tangente a \mathcal{C} en el punto C . Pues al aplicarle la reflexión armónica correspondiente (con centro Y_C y espejo $T \vee X_C = T \vee C$) se mantiene (como recta con el punto distinguido C) en su sitio.

(Para referencia en el siguiente apartado, debemos observar que la otra tangente a \mathcal{C} que pasa por Y_C , es $Y_C \vee D$ donde $D \in \mathcal{C}$ es el armónico de C respecto a X_C y T que se obtiene como Z para $X = Y_C$.)

Al variar X , si también reflejamos a ℓ junto con C , bajo ρ_X , obtenemos a la tangente a \mathcal{C} en Z ; es decir, como ℓ es la tangente a \mathcal{C} en C , entonces $\ell \cdot \rho_X$ debe ser la tangente a \mathcal{C} en $Z = C \cdot \rho_X$.

Y para obtener la reflexión de ℓ bajo ρ_X , basta recordar (de §2.3.2) que su punto de intersección con el espejo se queda fijo, y entonces tiene que ser la línea que va de ahí (de $\ell \wedge (X \vee T)$) a Z .

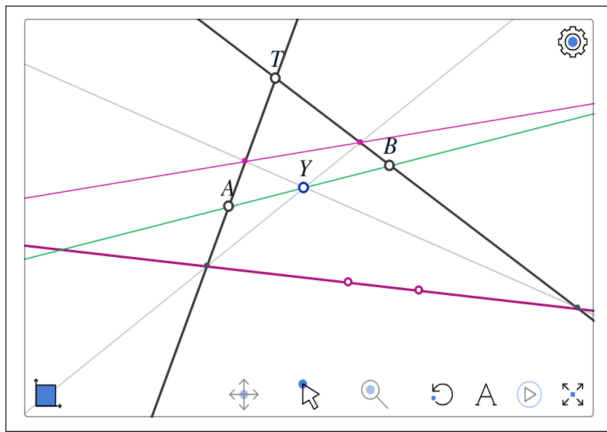
Al dibujar la familia de estas rectas con parámetro $X \in A \vee B$ se obtiene el haz envolvente a \mathcal{C} . Y



hay que observar que al pasar X sobre la cuarteta armónica de puntos marcados en la línea $A \vee B$, la tangente a Z pasa sobre las cuatro tangentes que ya conocíamos.

También es ilustrativo preguntarse por la construcción dual a la original de curva-A.

Para ella, no se nos da un tercer punto C por donde debe pasar la curva armónica, sino una tercera línea l que debe ser parte del haz envolvente, además de $T \vee A$ y $T \vee B$ cuyos polos son A y B



respectivamente; se nos dan tres líneas y puntos en dos de ellas.

De nuevo, debemos aplicar la familia de reflexiones armónicas ρ_X con $X \in A \vee B$ a la línea l (la morada, controlada por dos puntos). Pero ahora lo podemos hacer más inmediato.

Conviene parametrizar a las reflexiones armónicas por su centro Y , en vez de por su espejo $T \vee X$. Pues todas estas reflexiones armónicas intercambian a las líneas $T \vee A$ y $T \vee B$, y al restringirse a ellas se comporta como si fuera la proyección desde el centro Y (como vimos en §2.3.2).

Así que la imagen de l , que llamaremos l_Y , es la línea que pasa por los puntos a los que van sus intersecciones con $T \vee A$ y $T \vee B$.

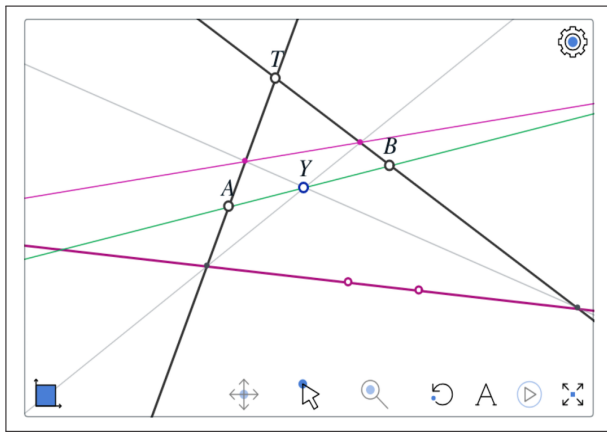
Al variar Y , se obtiene el haz envolvente.

Debemos ahora ver que efectivamente es el haz envolvente de una curva-A.

Se encuentra a C como el armónico de $l \wedge (A \vee B)$ en la recta l , respecto a sus intersecciones con $T \vee A$ y $T \vee B$. Y, según lo que hemos dicho, se tiene que Z (con la nomenclatura de la curva-A, correspondiente) debe ser el proyectado

de C desde Y en la línea ℓ_Y . Hemos dibujado su trazo.

Para corroborar, al menos a vista, que coincide con la construcción anterior, podemos añadir a X como el armónico de Y respecto a A y B , y a su línea a T en azul. Pero nótese que en esta construcción no se utilizó la herramienta de armonía, pura incidencia.



3.1.3. La elipse de una loseta

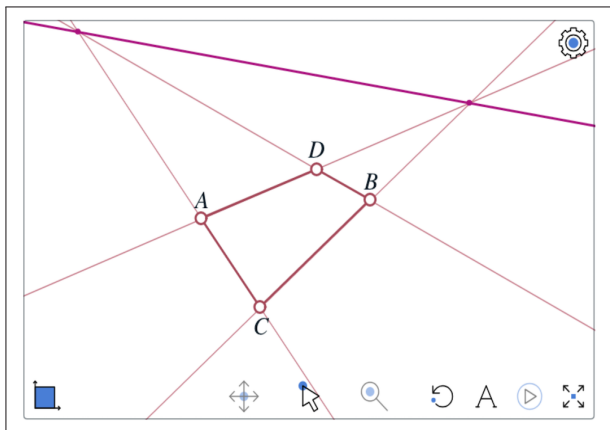
Las curvas cónicas clásicas viven en el Plano Euclidiano. Las curvas-A que hemos construido viven en el Plano Desarguesiano, pues necesitan a la armonía y ésta necesita a los puntos ideales para estar bien definida. Lo que determina a qué curva cónica corresponde una curva-A es como ésta se relaciona con la línea ideal al infinito:

Si no la toca, es una elipse; si sólo la toca en un punto (es decir, si la tiene como tangente) es una parábola, y si la corta en dos puntos es una hipérbola.

Veremos con variaciones explícitas de nuestra construcción, y al menos visualmente aunque aún no formalmente, que este es el caso.

Empezamos con la elipse que define una loseta y que ya usamos en la construcción de movimientos rígidos (§1.2.2).

Como vimos en (§2.3.3), hay que entender por una loseta a cuatro puntos en posición general junto con un punto de su triángulo derivado, o bien, junto con cuatro líneas que les dan un orden



cíclico definido..

Sean A, D, B, C los cuatro puntos (en ese orden cíclico) de una loseta.

Tiene bien determinado su horizonte.

Y si tomamos a T como la intersección de la diagonal $C \vee D$ con el horizonte, la curva- A \mathcal{C} , que pasa por A, B, C y es tangente a $T \vee A$ y $T \vee B$ es la que queremos.

Pero en este caso, como ya tenemos trazadas las líneas de C a A y a B , dado $X \in A \vee B$, la cons-

trucción de $Z = C \cdot \rho_X$, se puede simplificar.

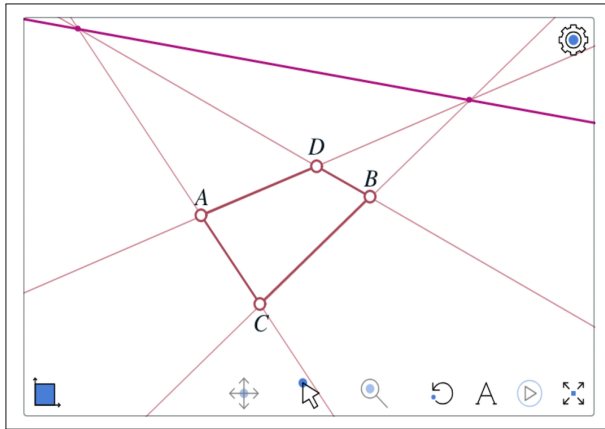
Si denotamos $a = C \vee A$, $b = C \vee B$ y $x = T \vee X$. Entonces

$$Z = (A \vee (x \wedge b)) \wedge (B \vee (x \wedge a)).$$

Es un buen ejercicio de construcciones de armonía, demostrarlo. Aunque se puede mostrar animando a X .

Mientras el cuadrilátero se mantenga “como loseta” (es decir, convexo y con su orden cíclico), lo que tenemos es una elipse. Si mandamos al horizonte al infinito (haciendo paralelos a los lados opuestos), el centro (donde se cortan las diagonales) se va al centro euclidiano de la elipse, cuya línea polar es la del infinito; pues en general, la línea polar del centro (como punto derivado) es el horizonte.

Además, ésta no es una cuarteta cualquiera en una elipse, o mejor dicho, en una curva- A . Es una cuarteta de puntos muy especial y tiene propiedades que la hacen calificar para el preciado título de *cuarteta armónica* en \mathcal{C} . Primero, en la parametrización que da la recta $A \vee B$, viene de una cuarteta

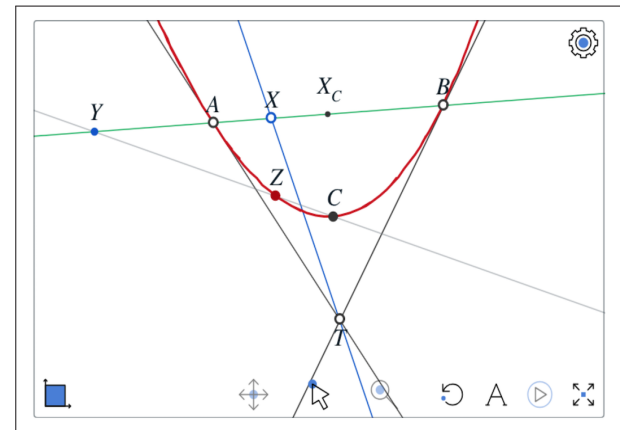


3.1.4. Parábolas

Las parábolas son la parte euclidiana de las curvas-A que son tangentes a la línea al infinito.

Para construir una parábola siguiendo a la construcción-A, debemos mandar a una línea tangente al infinito. La que conviene, con la notación de la construcción, es la que habíamos llamado $Y_C \vee D$, y en la construcción de la elipse es la línea tangente al punto D.

armónica. Segundo (y ésta se puede tomar como definición), las tangentes en puntos opuestos (los pares de la cuarteta armónica) concurren en la otra diagonal –e.g., las tangentes en A y en B concurren en $C \vee D$. Y tercero: las reflexiones armónicas con espejos en las líneas $A \vee B$ y $C \vee D$ y centros en los respectivos puntos polares, se comportan en la curva \mathcal{C} justo como las reflexiones armónicas en la línea $A \vee B$ que la parametriza, respecto a las parejas de puntos A, B y X_C, Y_C .



Para lograrlo, dados A, B y T no colineales: sean X_C el punto medio de A, B ; y sea C el punto medio de X_C y T . Tenemos entonces que Y_C (que era el armónico de X_C respecto a A, B) y D (que era el armónico de C respecto a X_C y T) están en el infinito. Y por lo tanto, la recta que definen, $Y_C \vee D$ –tangente a \mathcal{C} en D –, es la del infinito.

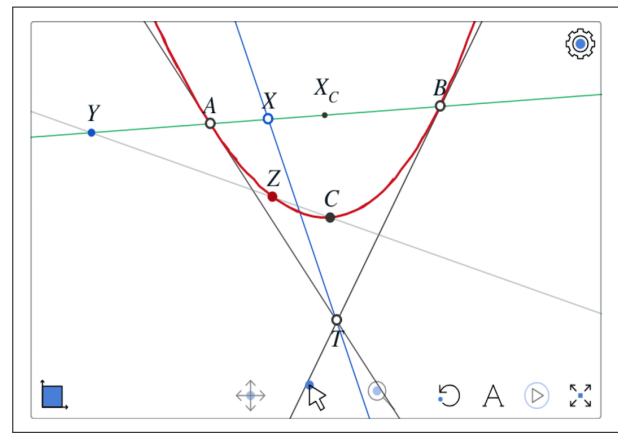
A partir de aquí, la construcción es exactamente la misma. A saber: $X \in A \vee B$ es el punto variable; Y es su armónico respecto a A, B ; Z es la reflexión armónica de C respecto a $X \vee T$ y Y , y la parábola, \mathcal{C} , es lo que pinta Z al variar $X \in A \vee B$.

Y efectivamente, la línea paralela a $A \vee B$ por C es la tangente a \mathcal{C} ahí (ambas líneas comparten el punto al infinito Y_C), y el llamado *eje* de la parábola es, más que una línea, una dirección: la de la línea $T \vee C$, cuyas paralelas solo cortan a la parábola euclidiana en un punto (y proyectivamente todas pasan por el punto D en la línea al infinito).

Hay que observar que se perdió un grado de libertad en la construcción. El punto C ya no es libre (sólo dependió la construcción de las tangentes $T \vee A$ y $T \vee B$ en los puntos A y B), pero se

cambió por la condición de que la línea al infinito fuera tangente.

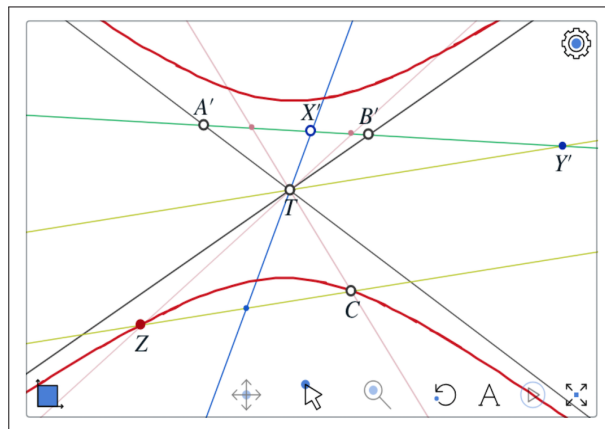
Otra observación que vale la pena hacer respecto a esta construcción, es lo cerca que está de uno de los resultados más espectaculares de la matemática griega que es la *cuadratura de la parábola*, debida a Arquímedes. Ésta asegura que el área del sector de la parábola bajo el segmento \overline{AB} es $4/3$ el área del triángulo ABC . Y, usando las herramientas *punto medio* y *paralelas*, hemos dibujado



dos pasos más en la iteración de la construcción sobre los nuevos segmentos de parábola para indicar una idea de la demostración.

EJERCICIO. Después del paso 3, falta trazar una línea y tomar su familia para construir el haz envolvente correspondiente. Hazlo.

EJERCICIO. Concluye la demostración de la cuadratura de la parábola.



3.1.5. Hipérbolas

Para construir hipérbolas, mandamos a los dos puntos A y B al infinito y entonces sus líneas tangentes son las famosas *asíntotas* de la hipérbola, y T , donde se cortan, es su *centro* (de nuevo, el polo de la línea al infinito).

Para controlar la dirección de las asíntotas (que es de lo que dependerá la construcción) consideramos dos puntos auxiliares A' y B' y entendemos que A y B son los puntos ideales, o al infinito, de las líneas $T \vee A'$ y $T \vee B'$ respectivamente.

Ahora sí, C vuelve a ser libre, finito y fuera de las asíntotas.

Nuestro punto variable $X \in A \vee B$ vive ahora en el infinito, pero lo podemos definir como el punto correspondiente (allá en el horizonte) a la línea $T \vee X'$ con $X' \in A' \vee B'$ (es decir $X = (T \vee X') \wedge (A \vee B)$). Y entonces, quien varía ahora es X' .

El armónico Y , de X respecto a A, B es el que corresponde en el infinito a Y' , armónico de X' res-

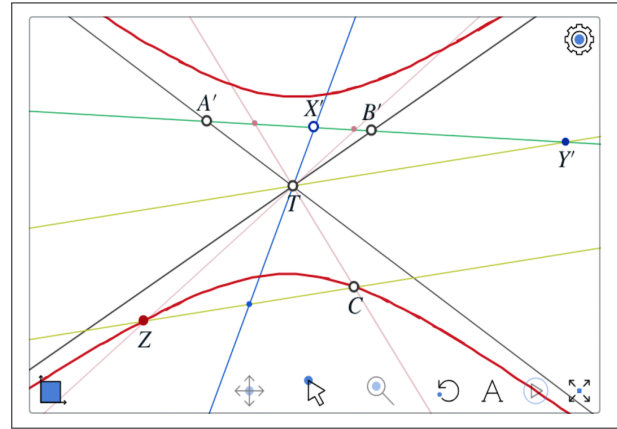
pecto a A', B' . En el fondo, estamos identificando –y controlando– a la línea al infinito $\ell_\infty = A \vee B$ con la línea $A' \vee B'$, a través de la proyección desde el punto T .

Y como antes, Z es el reflejado armónico de C respecto a Y y $T \vee X = T \vee X'$. Cumple entonces dos condiciones: está en $C \vee Y$ que es la paralela a $T \vee Y = T \vee Y'$ que pasa por C ; y (por estar el centro de la reflexión Y en el infinito) el punto medio entre C y Z debe estar en el espejo $T \vee X$.

Hay muchas maneras de construir Z . En la que presentamos aquí, se toma al armónico de $(T \vee C) \wedge (A' \vee B')$ respecto a X', Y' y se toma la intersección de su línea por T con $C \vee Y$.

EJERCICIO. Encuentra la tangente a la hipérbola en C ; y luego, dibuja su haz envolvente. (Hay que recordar que trazar líneas por puntos en el infinito se hace trazando paralelas.)

EJERCICIO. Construye al haz envolvente de una hipérbola y a la hipérbola misma, siguiendo a la construcción dual de haces envolventes y empezando con una línea tangente dada en vez del punto por el que pasa C .

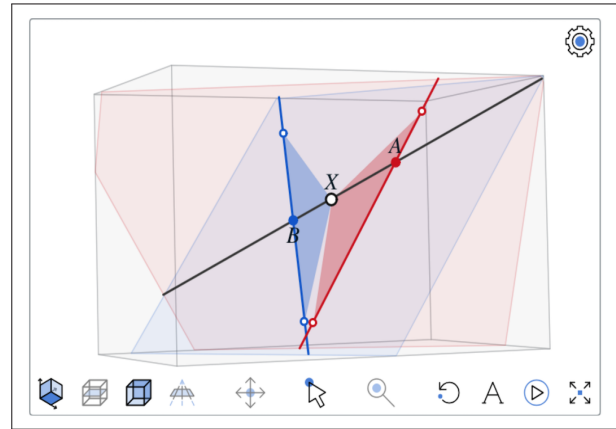


3.2. Superficies regladas

En un espacio de dimensión 3, como éste donde vivimos y estamos trabajando, es una *coincidencia*, algo muy especial y raro, que dos rectas se corten y esto equivale a que sean coplanares. El caso genérico es que estén en *posición general*, es decir, que no se toquen. Y se dice que tres líneas están en *posición general* si es que dos a dos lo están. Estas ternas de rectas (con las simples relaciones de incidencia que guardan planos, líneas y puntos) producen unas superficies que llamaremos *superficies regladas*. En el mundo euclidiano se llaman hiperboloides de una hoja o paraboloides hiperbólicos,

3.2.1. Reglados

Para el caso de dos líneas que no se tocan, también es correcto usar el término de líneas “*generadoras*”, pues entendemos que “generar” es tomar a todas las líneas posibles y cualquier punto del espacio vive en una línea que va de una a la otra.



Para probarlo, consideremos dos líneas en posición general, a y b ; y sea X un punto que no está en ellas.

Por esto último, $a \vee X$ y $b \vee X$ son planos distintos pues a y b no son coplanares (nótese que nuestra notación de usar cuñas, \vee , para “lo que generan ...”, la estamos usando ahora para puntos y líneas, y funciona bien: una línea y un punto fuera de ella generan un plano).

Por lo tanto,

$$\ell = (\mathbf{a} \vee \mathbf{X}) \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{X})$$

es una línea que claramente pasa por X y, por estar en ambos planos, también toca a \mathbf{a} y a \mathbf{b} .

Esto demuestra que \mathbf{a} y \mathbf{b} generan al espacio tri-dimensional. Pero además, podemos ser aún más explícitos. Sean:

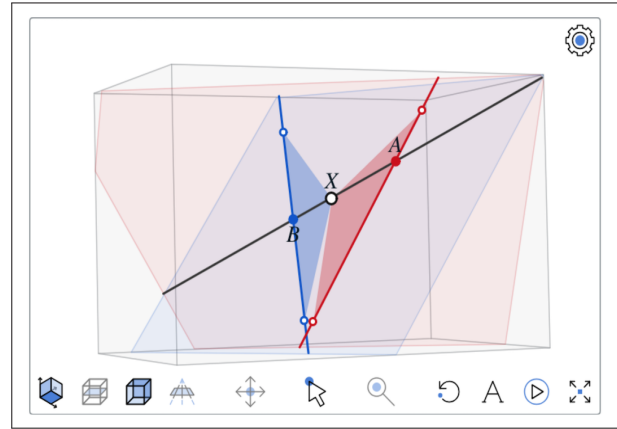
$$\mathbf{A} = (\mathbf{b} \vee \mathbf{X}) \wedge \mathbf{a} \in \mathbf{a}$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{X}) \wedge \mathbf{b} \in \mathbf{b};$$

entonces, $X \in \ell = \mathbf{A} \vee \mathbf{B}$.

En términos visuales, dos líneas son coplanares si hay puntos de vista donde se empalman o confunden. Y esos puntos de vista especiales forman el plano que generan. Cuando son generadoras nunca se confunden, siempre se ven como dos líneas, pero vemos que se intersectan en un punto: ahí, por esa “intersección visual”, pasa la línea que asegura el lema para el ojo en cuestión.

Al considerar tres líneas en *posición general* (esto es, que dos a dos no son coplanares) se van a

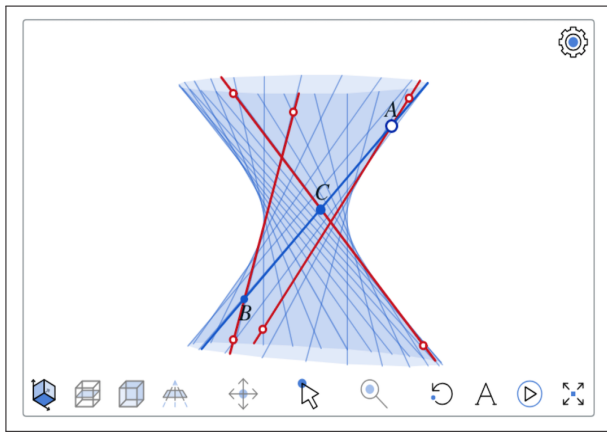


ver, en general, como un triángulo. Pero hay puntos especiales donde parecen ser concurrentes, esos puntos de vista son la superficie reglada que generan.

Definición. Un *reglado*, \mathcal{R} , es el conjunto de todas las líneas que tocan a tres líneas en posición general. A los elementos de un reglado dado (que son líneas) los llamaremos sus *reglas*.

3.2.2. Construcción de Hilbert-CohnVossen

Consideremos tres rectas en posición general, \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Pensemos que son de color rojo para colorear de azul a su *reglado transversal*, \mathcal{R} , que, por definición, consiste de todas sus rectas *transversales*, es decir, que tocan a las tres. La construcción que haremos a continuación aparece en las primeras páginas del libro *Geometría e Imaginación* de



David Hilbert y Stephan Cohn-Vossen, y como ahí no dan crédito a nadie, nosotros se la achacamos a ellos.

Dado un punto $A \in \mathbf{a}$, se toma al plano que genera con la línea \mathbf{b} y se intersecta a éste con la línea \mathbf{c} , para darnos un punto que llamamos C . Es decir,

$$C = (A \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}.$$

La línea $A \vee C$ está en el reglado transversal \mathcal{R} , pues toca a las tres líneas: \mathbf{a} en A , \mathbf{c} en C y \mathbf{b} en $B = (A \vee C) \wedge \mathbf{b}$ que es un punto pues ambas rectas están en el mismo plano $A \vee \mathbf{b}$.

Al variar al punto A por todo lo largo de la línea \mathbf{a} , la regla $A \vee C$, barre una *superficie reglada* \mathcal{S} .

Otra manera de verlo es con la observación del apartado anterior, pues implica que por cualquier punto en una de las rectas, \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , pasa una única línea que toca a las otras dos, así que el reglado \mathcal{R} se puede parametrizar por cualquiera de las tres

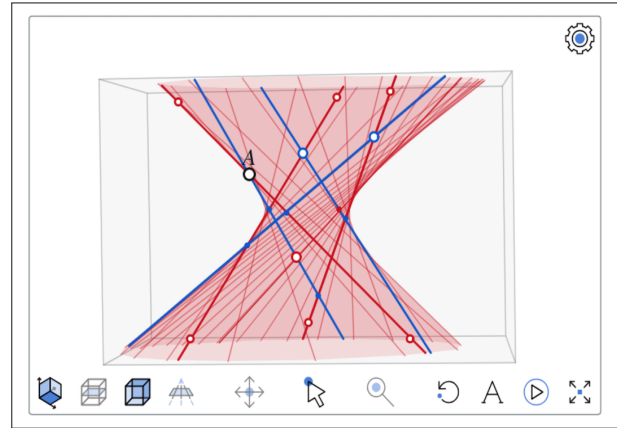
rectas:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(\mathbf{b} \vee A) \wedge (\mathbf{c} \vee A) \mid A \in \mathbf{a}\} \\ &= \{(\mathbf{c} \vee B) \wedge (\mathbf{a} \vee B) \mid B \in \mathbf{b}\} \\ &= \{(\mathbf{a} \vee C) \wedge (\mathbf{b} \vee C) \mid C \in \mathbf{c}\}.\end{aligned}$$

tal manera que es correcto pensar que un reglado es una “línea de líneas” y al juntarlas, o dibujarlas, geométricamente se obtiene una superficie que, como ya mencionamos, es muy probable que el lector asocie con el nombre de hiperboloide de una hoja (el paraboloides hiperbólico es un caso muy particular). Y también la intuición de lo que vemos es correcta: si vemos la figura de lado (o por fuera, podríamos decir), el contorno es una hipérbola; pero si la vemos en su interior (por las bocas) vemos elipses.

3.2.3. Axioma del Equipal

Teniendo tanta regla azul (toda una línea de ellas), se antoja tomar a tres, digamos $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathcal{R}$



(y pintadas de azul) para volver a hacer la construcción de Hilbert-CohnVossen con ellas. Están en posición general, pues que dos se toquen implicaría que las tres rojas originales son coplanares.

De tal manera que $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ definen un nuevo reglado \mathcal{R} , rojo digamos, que contiene a $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, pues éstas tocan a $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$.

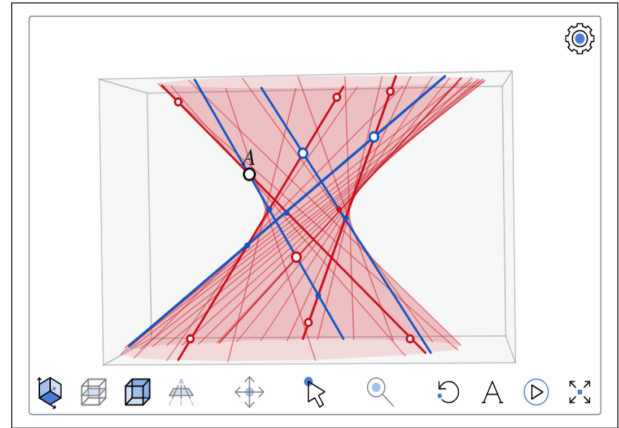
(Al dibujar juntos a los dos reglados, conviene animar al punto \mathbf{A} , que mueve los datos iniciales de la construcción del reglado rojo, para apreciar

que efectivamente son dos reglados. Pues, como quedará claro más adelante, estos se confunden visualmente cuando hay transparencia; solo se ve un cambio de color. También ponemos como pasos distintos a los reglados de los dos colores.)

Nuestra intuición del espacio físico real indica que estos dos reglados barren la misma superficie, que por cada punto de ella pasan dos reglas –una de cada color– y en la geometría real (con la que modelamos nuestros dibujos y el espacio físico, la asociada a los *números reales*) se tiene que así es; pero se tiene que demostrar en ese contexto. Otra manera de expresar que la superficie obtenida como unión de reglas sea única, que sea doblemente reglada, es que el reglado rojo sea único, que no dependa de las tres reglas azules que se escogieron, y lo llamaremos:

Axioma del Equipal. Tres líneas en posición general en un espacio de dimensión 3 son reglas de un único reglado.

El ejemplo mundano de un reglado doble son los “equipales”: un estilo artesanal mexicano de si-



llones y muebles cuyas bases están hechas de muchas tiras de madera inclinadas y que “circulan” en dos direcciones.



Suponiendo el Axioma del Equipal, que es lo que haremos en adelante a menos que se diga lo contrario, tenemos que la unión de las reglas en un reglado forman una *superficie doblemente reglada*, pues si \mathcal{R} es un reglado y consideramos al conjunto que es la unión de todas sus reglas,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\ell \in \mathcal{R}} \ell.$$

obtenemos una superficie por la bidimensionalidad de su definición (regla y parametro). El Axioma del Equipal implica que se tiene un reglado transversal \mathcal{R} independientemente de qué terna escogamos en \mathcal{R} para definirlo (estamos entendiendo, hay que enfatizar, que el color da un símbolo diferente, ésta \mathcal{R} es roja y es distinta de la azul... con una sentida disculpa a los daltónicos). Y entonces

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\ell \in \mathcal{R}} \ell = \bigcup_{\ell \in \mathcal{R}} \ell.$$

Y se cumple que:

- Por cualquier punto en \mathcal{S} pasan dos reglas: una roja y una azul.

- Dos reglas de \mathcal{S} de color distinto se tocan.
- Dos reglas de \mathcal{S} del mismo color son generadoras (no se tocan).

3.2.4. Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes

Concluimos esta sección con cuatro definiciones. La primera surge de una observación muy simple pero fundamental, y con ella se redondearán las otras tres.

Si tenemos una superficie doblemente reglada \mathcal{S} , como por cualquier punto de \mathcal{S} pasan exactamente dos reglas, podemos también definir un plano ahí.

Sea P un punto en \mathcal{S} . Por P pasa una regla de cada color (o de cada reglado), al plano que generan esas dos líneas se le llama el *plano tangente a \mathcal{S}* en P, o bien el *plano polar* de P respecto a \mathcal{S} . Y se cumple que este plano tangente corta a la superficie justo en esas dos líneas; en dos reglas de distinto color que se cortan en P.

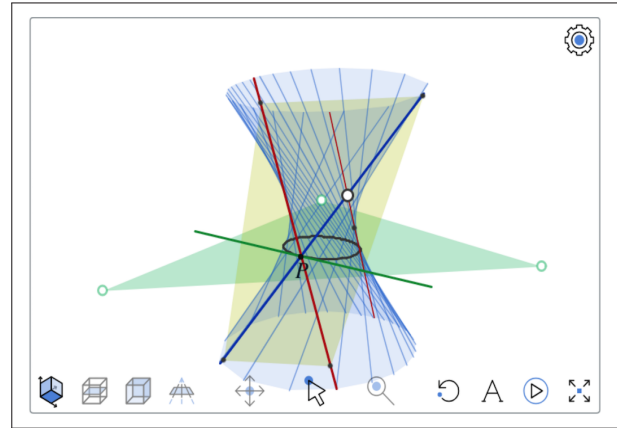
Y ahora sí, estamos en posición de expresar nuestra definición de batalla.

Definición. Una *curva armónica* \mathcal{C} es la intersección de una superficie doblemente reglada \mathcal{S} con un plano π que no es tangente a \mathcal{S} . Es decir,

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi.$$

Para cada punto $P \in \mathcal{C}$, la línea *tangente* a \mathcal{C} en P es la intersección de π con el plano tangente a \mathcal{S} en P .

Y el *haz envolvente o tangente* a \mathcal{C} es la familia de sus líneas tangentes.



3.3. Polaridad

Veremos ahora que en las superficies regladas, la polaridad surge naturalmente. Puesto que estas superficies viven en tres dimensiones, la polaridad que inducen es un apareamiento entre puntos y planos; y tiene mucho que ver con cómo las dibujamos o cómo las vemos.

Al fijar un punto de vista, sobre la superficie de cualquier cuerpo u objeto en una escena se define un contorno (esa curva que los buenos dibujantes saben trazar con maestría proyectada al lienzo); es el límite entre el objeto y el resto (lo que ya no es el cuerpo), justo ahí donde un rayo de visión pasa de largo o es tangente y define un punto (el de roze) en aquella piel. Resulta que para las superficies regladas, tal como sucede con las esferas, ese contorno consta de puntos que están en un plano: ese será el plano polar del punto (de vista). Esto implica que contornos y secciones planas coinciden en las superficies regladas, tal como lo hacen en las esferas (piénsese en un cono de nieve).

De la polaridad en superficies regladas deduci-

remos naturalmente la de curvas armónicas, con las propiedades que ya enunciamos.

3.3.1. En reglados

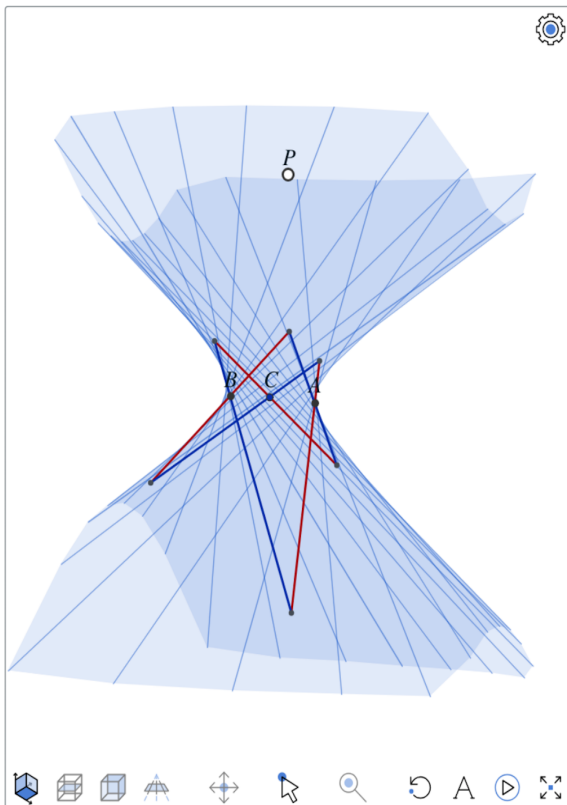
Sea \mathcal{S} una superficie doblemente reglada; para un punto $P \in \mathcal{S}$, ya definimos su *plano polar* como el plano tangente a \mathcal{S} en P (el generado por las dos reglas ahí).

Consideraremos ahora el caso genérico en que

$$P \notin \mathcal{S}$$

y probaremos que cuando P observa a \mathcal{S} , ve (lo mismo que vemos nosotros en los dibujos fijos) que las líneas de los reglados definen el contorno de una curva armónica; y que parece que lo que está viendo es a su haz envolvente.

Para precisar, supongamos que \mathcal{S} está definida por las líneas rojas en posición general $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; es decir, que el reglado transversal a ellas \mathcal{R} que consta de las líneas transversales a las tres (y que están pintadas de azul), tiene como unión a \mathcal{S} . Pero además tenemos que hay otro reglado, el rojo,



\mathcal{R} que contiene como reglas a las tres originales (\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c}) y está definido por, es el reglado transversal a, cualesquier terna de reglas azules (esto es el Axioma del Equipal).

Consideremos al plano

$$\alpha = P \vee \mathbf{a}.$$

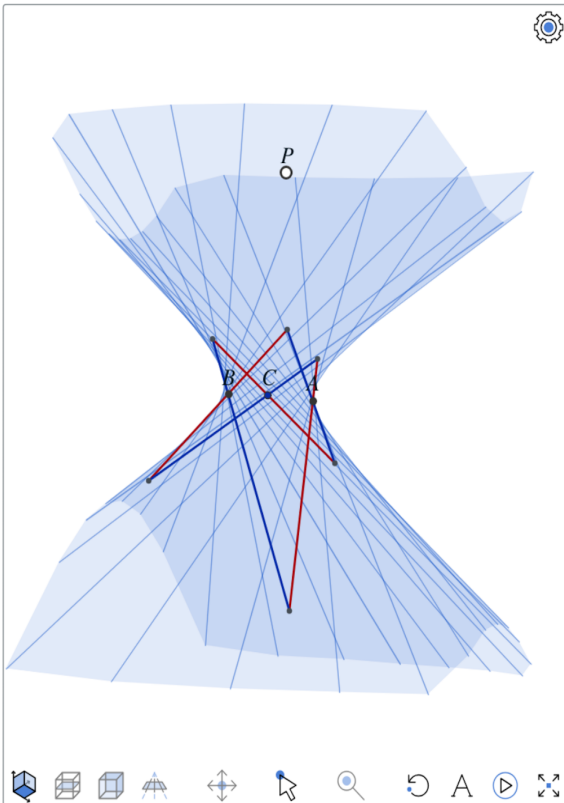
Afirmamos que en α vive otra regla, y que es de color azul. Puesto que α corta a todas las reglas rojas, estos puntos tienen que formar una línea. Más concretamente, los puntos de intersección de α con \mathbf{b} y \mathbf{c} generan una línea en α que también corta a \mathbf{a} y por lo tanto es una regla de \mathcal{R} (pues es transversal a las tres). Llamémosla \mathbf{a} ; es decir:

$$\mathbf{a} = (\alpha \wedge \mathbf{b}) \vee (\alpha \wedge \mathbf{c}) \in \mathcal{R}$$

(recuerde que colores distintos dan símbolos distintos). Y sea

$$A = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}.$$

Obsérvese que el punto A y la regla \mathbf{a} dependen del punto P , pues el plano α depende de él.



En el fondo, hemos demostrado que si un plano contiene a una regla, entonces es un plano tangente y contiene también a una regla del otro reglado. De tal manera que si consideramos a las reglas **b** y **c**, nos definen otras dos reglas azules

$$b, c \in \mathcal{R},$$

por la propiedad de que

$$P \in \beta = b \vee b \quad \text{y} \quad P \in \gamma = c \vee c.$$

Esto nos da dos nuevos puntos en la superficie,

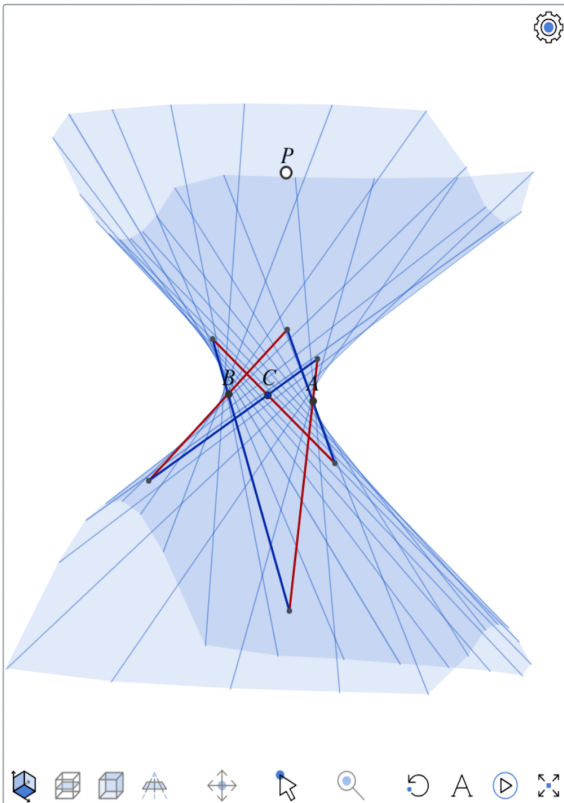
$$B = b \wedge b \quad \text{y} \quad C = c \wedge c,$$

cuyos planos tangentes a \mathcal{S} son β y γ respectivamente.

Los tres puntos que hemos nombrado, generan un plano

$$\pi = A \vee B \vee C,$$

que es el plano polar de P , pues vamos a demostrar que la reflexión armónica, ρ llamémosla, con centro en P y espejo en π deja invariante a \mathcal{S} .



Las seis reglas que tenemos (3 rojas y 3 azules) definen por intersección a nueve puntos en \mathcal{S} . Con ellos nos bastará para la demostración.

En el plano $\alpha = \mathbf{a} \vee \mathbf{a}$ que es el tangente a \mathcal{S} en A , tenemos a otros cuatro puntos de los nueve. A saber,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}), (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}), (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}),$$

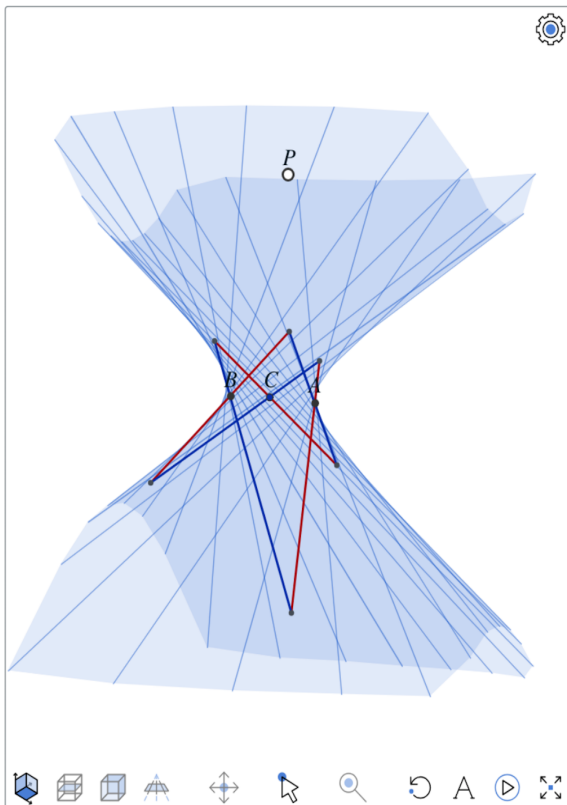
que forman un cuadrángulo con punto distinguido $A = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$ en su triángulo derivado; es decir, lo que habíamos llamado una loseta (ver §2.3.3). Otro de los puntos de su triángulo derivado es P . Pues P es la intersección de los planos α , β y γ ; y las líneas de intersección de estos planos se expresan

$$\alpha \wedge \beta = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

$$\alpha \wedge \gamma = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a});$$

y por tanto son rectas que pasan por P .

Para ver que la línea opuesta a P en el triángulo derivado, es $\alpha \wedge \pi$, demostraremos que el punto derivado que nos falta es $\alpha \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$. Para esto,



consideremos a los planos tangentes

$$(b \vee c) \text{ y } (c \vee b).$$

Se cortan en la línea $B \vee C$ pues ambos planos contienen a ambos puntos. Además, su intersección con α da a la otra pareja de lados opuestos:

$$(b \wedge a) \vee (a \wedge c) \text{ y } (c \wedge a) \vee (a \wedge b).$$

Así que donde estas líneas se cortan (el tercer punto derivado) es la intersección de los tres planos, que es $\alpha \wedge (B \vee C)$.

Tenemos entonces (por §2.3.3) que en el plano α , la reflexión armónica con espejo $\alpha \wedge \pi$ y centro P intercambia a las reglas a y \bar{a} .

Estudiando, de manera análoga, a los otros dos planos tangentes β y γ , concluimos que la reflexión armónica ρ (con centro P y espejo π) intercambia a las reglas rojas a, b, c con las reglas azules $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, respectivamente.

Consideremos ahora a cualquier otra regla azul, $x \in \mathcal{R}$ digamos. Como x toca a las líneas a, b y c , su imagen bajo ρ —recordemos: $x \cdot \rho$ — es una línea

que toca a $\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \rho$, a $\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \rho$ y a $\mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \rho$. Por lo tanto es una línea en el reglado rojo, es decir,

$$x \in \mathcal{R} \implies x \cdot \rho \in \mathcal{R}.$$

Ya sabemos que $x \cdot \rho$ es una regla roja; y podemos saber cuál es, pues su punto de intersección con el espejo π se queda fijo: $x \cdot \rho$ es la regla roja que pasa por $x \wedge \pi$; llamémosla $\mathbf{x} = x \cdot \rho$.

Se tiene que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x} \in \pi$; pero también que $P \in \mathbf{x} \vee \mathbf{x}$ pues el plano que contiene a cualquier recta y a su imagen bajo una reflexión armónica, también contiene al centro. Así que todos los planos tangentes a \mathcal{S} en puntos de π pasan por P . Y por lo tanto, la construcción no depende de las tres reglas con que arrancamos.

Como la reflexión armónica ρ es una involución, manda a cada regla roja en la azul de la que viene, $\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \rho$. En fin, se tiene que ρ deja invariante a la superficie \mathcal{S} (como queríamos) pero sabemos ahora que intercambia a sus dos reglados.

Hay que remarcar que cualquier punto P fuera de \mathcal{S} y cualquier plano π no tangente a \mathcal{S} , defi-

nen, en abstracto y por simple incidencia, correspondencias o apareamientos naturales entre los dos reglados de \mathcal{S} :

Dos reglas de colores opuestos se aparean según un punto P si P está en el plano que generan; y se aparean según un plano π si su intersección está en π .

Las parejas polares punto-plano respecto a \mathcal{S} son aquellas en las que estos apareamientos entre los dos reglados coinciden. Y además, cuando es el caso, esta biyección entre reglados se realiza geométricamente (en todo el ambiente) por la reflexión armónica en la pareja polar.

3.3.2. Compatibilidad con la incidencia

Dada una superficie reglada \mathcal{S} , la polaridad respecto a ella es una biyección entre los puntos y los planos. Veremos ahora que se lleva de maravilla con la relación de incidencia. Supongamos que *un punto P tiene como plano polar a π* ; queremos demostrar que

si un punto Q está en π entonces el plano polar de Q contiene a P .

Se podría decir que la polaridad “invierte” la relación de incidencias. Hay que ver varios casos según si los puntos están o no en la superficie \mathcal{S} .

Primero, cuando ambos son puntos de \mathcal{S} , que uno esté en el plano polar del otro, implica que ambos están en una misma regla y la conclusión se cumple.

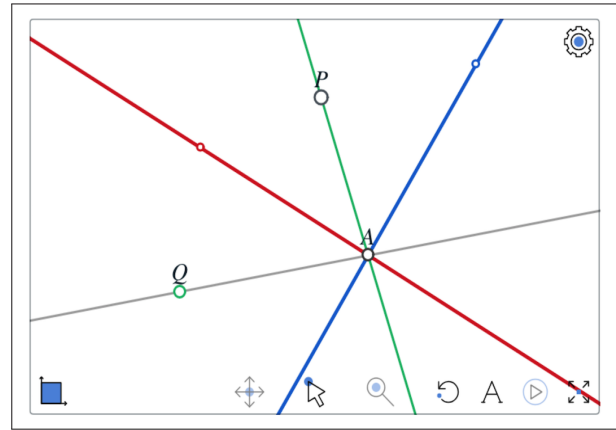
Segundo, el caso en que alguno de los puntos está en la superficie y el otro no, se vio, se usó y se estudió (aunque con otra nomenclatura) en el apartado anterior, así que lo damos como cierto (y volverá a aparecer en el argumento).

Y tercero, cuando ambos puntos (P y Q) están fuera de \mathcal{S} y además $Q \in \pi$. Si llamamos η (léase “eta”) al plano polar de Q , probaremos que $P \in \eta$.

Sea A un punto cualquiera en $\mathcal{S} \cap \pi$, y como antes, sean \mathbf{a} y \mathbf{a} las reglas de \mathcal{S} que cumplen

$$A = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \mathbf{a} \vee \mathbf{a} = \alpha.$$

Tenemos que ver dos casos.



Cuando $A \in \eta$, tenemos el caso especial en que P y Q están en el plano tangente a \mathcal{S} en A , que hemos llamado α . Y entonces $Q \vee A$ y $P \vee A$ tienen que ser líneas armónicas respecto a \mathbf{a} y \mathbf{a} (pues \mathbf{a} y \mathbf{a} lo son respecto a $P \vee A$ y $\alpha \wedge \pi = Q \vee A$). Lo que demuestra que $P \in \eta$. Las dos reflexiones armónicas (de las dos parejas polares P, π y Q, η) intercambian a \mathbf{a} y \mathbf{a} ; pero punto a punto, una es la proyección desde P y la otra desde Q .

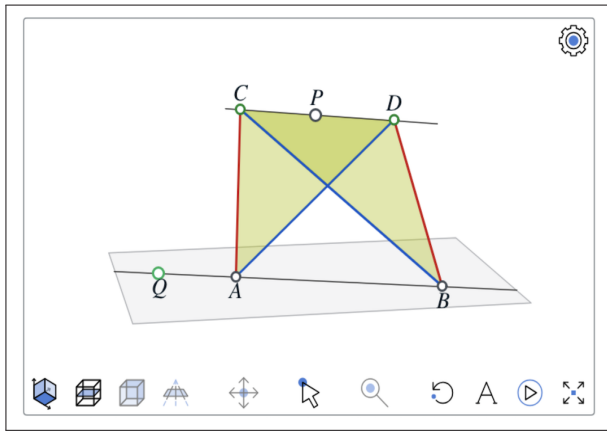
Y si $A \notin \eta$ (el último caso y el más general), en-

tonces la reflexión armónica con centro Q y espejo η manda a A en otro punto. Llamémoslo B , con $B \neq A$, y es tal que

$$Q \in A \vee B.$$

Pero B también está en la superficie \mathcal{S} (pues Q y η son polares) y en π (pues el centro de la reflexión, Q está en π), por lo que de nuevo, existen reglas \mathbf{b} y \mathbf{b} para las cuales

$$B = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \mathbf{b} \vee \mathbf{b} = \beta.$$



Como reglas de distintos colores siempre se cortan, tenemos dos nuevos puntos en \mathcal{S} :

$$C = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \text{y} \quad D = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}.$$

Nótese que $P \in \alpha \wedge \beta = C \vee D$, pues ambos puntos están en ambos planos.

Los respectivos planos tangentes a \mathcal{S} en C y en D ,

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \vee \mathbf{a}$$

contienen a A y a B , y por lo tanto, también contienen a $Q \in A \vee B$. Entonces se tiene que C y D están en el plano polar de Q , que es η . Pero P está en la línea $C \vee D$ y por lo tanto en η , como queríamos demostrar.

Es interesante observar que lo que demostramos, y la demostración en sí, indican que la polaridad se extiende a líneas. La línea polar (respecto a \mathcal{S}) de una línea es la intersección de los planos polares a sus puntos; al mover un punto en una línea, los planos polares giran alrededor de una línea. Para líneas en un plano tangente y que pasan por su polo (para las líneas tangentes podríamos

decir), la polar es la armónica respecto a las reglas. Para líneas que cortan en dos puntos a \mathcal{S} (como $A \vee B$ en la demostración), se obtiene con las reglas por ellos ($C \vee D$). Pero además, hay líneas que no tocan a \mathcal{S} y sus polares quedan del otro lado.

3.3.3. En curvas armónicas

Puesto que las curvas armónicas son, por definición, secciones planas de superficies regladas, la polaridad en estas últimas se heredará fácilmente a las curvas armónicas.

Sea \mathcal{C} una curva armónica en un plano π . Entonces existe una superficie reglada \mathcal{S} tal que

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi.$$

Como ya sabemos, lo puntos en \mathcal{C} deben hacer parejas polares con sus líneas tangentes. Supongamos ahora que un punto $Q \in \pi$ no está en \mathcal{C} .

Sea η el plano polar de Q respecto a \mathcal{S} . Se tiene que $Q \notin \eta$ y afirmamos que

$$q = \eta \wedge \pi$$

debe ser la línea polar de Q respecto a \mathcal{C} .

Puesto que la reflexión armónica (de todo el espacio) con centro Q y espejo η deja invariante a la superficie \mathcal{S} y también al plano π pues éste pasa por el centro, entonces deja invariante a la curva armónica \mathcal{C} –cualquier punto en \mathcal{C} es mandado a un punto en \mathcal{S} que también está en π , es decir, cae en \mathcal{C} . Además, dentro del plano π es la reflexión armónica con centro Q y espejo q .

Y observemos que si P es el punto polar del plano π respecto a la superficie \mathcal{S} , entonces por el apartado anterior, el plano η pasa por P .

Así que dada una línea ℓ en el plano π , su punto polar respecto a la curva \mathcal{C} debe a ser el punto polar del plano $\ell \vee P$ respecto a la superficie \mathcal{S} , que, por el apartado anterior, está en π .

Esto ya implica que una curva armónica es lo que habíamos llamado una curva-A al principio del capítulo, pues ya tiene muchísimas simetrías de reflexión armónica; las suficientes para obtenerla como curva-A.

Nos falta ver que cualquier curva-A es armónica. Es decir, que los datos que dan una curva-A se le-

vantan a una superficie reglada que la tiene como sección. Y esto no solo es fácil, sino muy bonito en el sentido de que la superficie reglada que surge cambia de manera muy elegante al mover los datos; mucho más armónicamente que al mover las reglas de manera titubeante.

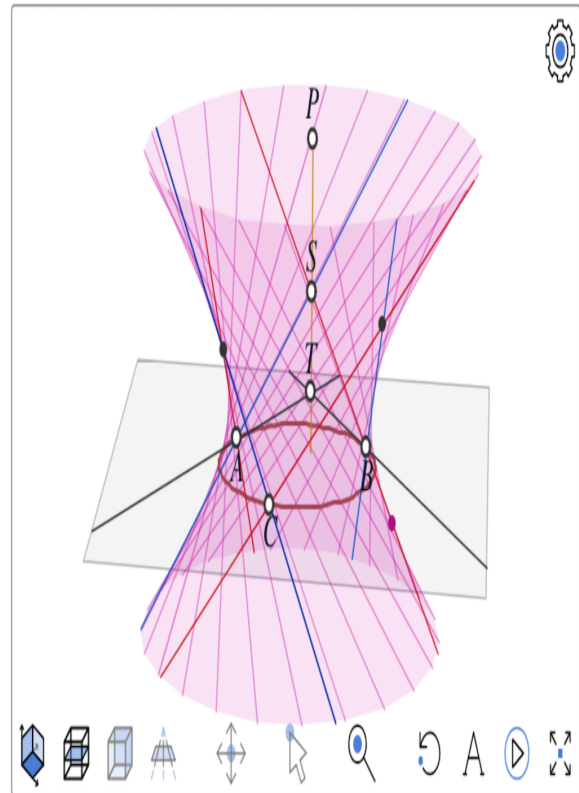
Supongamos que tenemos los datos A, B, C, T para trazar una curva- A en un plano π . Escogemos un punto P fuera de π que jugará el papel de su polo y un punto $S \in P \vee T$ por el que pasará la superficie reglada. Y ya, todo queda determinado.

De S y su armónico respecto a P y T , debemos trazar líneas de dos colores como corresponde a A y a B ; estas serán reglas.

Por el punto C pasa una única línea que toca a las dos reglas azules, la pintamos de rojo; y una única línea azul que corta a las dos rojas.

Ya tenemos tres reglas rojas y tres azules que se cortan como deben. Con la construcción de Hilbert-CohnVossen sobre cualquiera de las ternas se obtiene la superficie reglada que queríamos y que corta a π en la curva- A que definen los datos.

Muévala, verá que es más general de lo que pre-



tendíamos.

Capítulo 4

Las geometrías planas rígidas

4.0.1. El Plano Kleiniano

Con lo que hemos demostrado sobre las curvas armónicas ya podemos hacer más formalmente y sin ayuda alguna de conceptos métricos euclidianos (como los círculos), lo que describimos antes como contribución de Felix Klein a la Geometría Hiperbólica, que es el llamado modelo proyectivo o de Beltrami-Klein pero que bien podríamos llamar *Plano Kleiniano*.

Hay que fijar una curva armónica \mathcal{C} . La manera más cómoda y usual de hacerlo es seleccionando

cinco puntos en posición general por los que debe pasar \mathcal{C} , y para tal efecto hay una herramienta de ProGeo3D. Con nuestra definición, es fácil probar que con eso basta (al menos la parte de existencia, que *por 5 puntos pasa una curva armónica*):

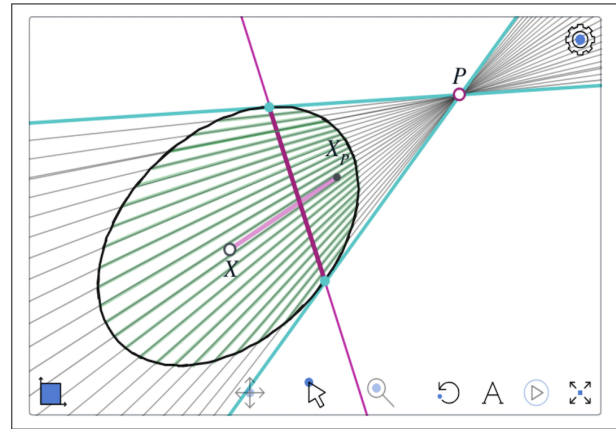
Dados 5 puntos en un plano π , por dos de los puntos se escogen líneas (azules) que corten a π en ellos y que además sean generadoras. Entonces, por los tres puntos restantes pasan líneas únicas (y rojas) que tocan a las dos azules. La superficie doblemente reglada que generan estas tres líneas

rojas es la deseada: corta al plano π en una curva armónica que pasa por los 5 puntos.

Fijemos entonces una curva armónica \mathcal{C} (en la escena se controla por los 5 puntos grises, que ocultaremos en el siguiente paso y que conviene dejar como una elipse para fijar ideas). Hemos demostrado que \mathcal{C} induce una polaridad. Veremos ahora que la simetría que se genera con la extensa cantidad de reflexiones armónicas con que nos provee la polaridad y que dejan invariante a la curva \mathcal{C} , son las suficientes como para tener algo muy parecido al plano geométrico que Euclides describió con cinco postulados.

Consideremos un punto libre P . Tiene una línea polar, p digamos y pintada de morado como \mathcal{P} , que se obtiene con la herramienta *Armonía*: con ésta herramienta activa, cuando se selecciona primero a una curva armónica y se arrastra a un punto o una línea, se obtiene el polar correspondiente (línea o punto).

Observemos, moviendo a P , que hay distintos tipos de puntos (en referencia a \mathcal{C} , por supuesto).



- Los de *adentro*, cuya línea polar es *externa* y no toca a \mathcal{C} .
- Los de \mathcal{C} que están en su línea polar y ésta es tangente ahí; toca a \mathcal{C} solo en el punto.
- Y los puntos de *afuera*, cuya línea polar corta a \mathcal{C} en dos puntos.

Cuando el punto P está afuera, las intersecciones de su línea polar p con la curva \mathcal{C} , tienen como líneas polares a las dos tangentes que pasan por P

pues la polaridad es compatible con la incidencia; a estos dos puntos se les llama a veces los *píes* de P en \mathcal{C} y son el equivalente bidimensional al contorno. Nótese que estas líneas polares a puntos de afuera tienen puntos de los tres tipos: dos puntos de \mathcal{C} que separan a p en dos *segmentos abiertos*, uno está adentro y el otro afuera.

El *Plano Kleiniano* que define \mathcal{C} , denotémoslo \mathbb{K} , tiene como puntos a los de adentro de \mathcal{C} y como líneas a todas las intersecciones con líneas que lo tocan; es decir, se tiene que una *línea Kleiniana* o \mathbb{K} -línea son los puntos de adentro (los puntos de \mathbb{K}) en la línea polar a un punto de afuera. Así que las \mathbb{K} -líneas están en correspondencia con los puntos de afuera; y también están en correspondencia con parejas de puntos en \mathcal{C} a los que llamaremos sus *puntos límite* (aunque estos no forman parte de la \mathbb{K} -línea); también podríamos llamar a las \mathbb{K} -líneas, *cuerdas* de \mathcal{C} en el entendido de que no incluyen a sus puntos límite.

Además, cada \mathbb{K} -línea, p digamos, viene con una \mathbb{K} -reflexión bien definida: lo que hace en \mathbb{K} la reflexión armónica con espejo en p y centro en su

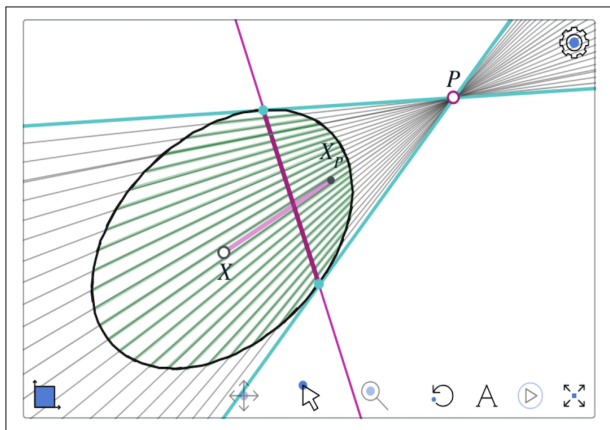
punto polar, P , que está afuera; puesto que deja invariante a la curva armónica \mathcal{C} , también manda a puntos de adentro en puntos de adentro.

Esta \mathbb{K} -reflexión intercambia los dos lados, o cachetes, en que p parte a \mathbb{K} , y además, sabemos cómo lo hace: intercambiando en cada punto de p los dos lados en \mathbb{K} de la línea que va al polo P (y es el centro de la reflexión armónica).

Esto es justo lo que hacen los espejos euclidianos con sus haces perpendiculares.

Así que diremos que dos \mathbb{K} -líneas son *ortogonales* o *perpendiculares* si se cortan en un punto de \mathbb{K} y el punto polar de una de ellas está en la otra; si la reflexión en una deja invariante como línea a la otra, si la voltea en sí misma.

Y además, para cada punto en \mathbb{K} (métese a P para verlo), tenemos un medio giro (o rotación de 180 grados) a su alrededor que es la reflexión armónica con centro en ese punto y espejo en su línea polar, que ahora es exterior a \mathcal{C} . Nótese que por el Lema del Triángulo Armónico, estas medias vueltas son la composición de reflexiones en cualquier par de líneas ortogonales que pasan por el punto.



Podemos trazar círculos. Para un punto P en \mathbb{K} , sea p su línea polar (que es externa). Consideremos un punto variable Q en p . La línea polar a Q , llamémosla q , pasa por P , así que para cualquier otro punto X , si llamamos X_Q a su \mathbb{K} -reflexión con espejo en q y hacemos variar a $Q \in p$, se dibuja el \mathbb{K} -círculo con centro en P y que pasa por X .

Esta construcción es más general de lo que pretendíamos.

Primero, tiene sentido para el punto X fuera de

\mathbb{K} y nos da una familia de curvas armónicas que van de P a su línea polar p pasando por \mathcal{C} .

Y segundo, para P afuera (¡hay que sacarlo!). La construcción coincide con la de curva-A, para los pies de P en \mathcal{C} (y sus tangentes) y que además pasa por X . Para interpretar a esta curva armónica dentro del Plano Kleiniano, tenemos que diferenciar dos casos.

Cuando Q es un punto adentro (cuando $Q \in \mathbb{K}$), la transformación que se aplica a X es un medio giro en Q y por tanto deja a la \mathbb{K} -línea que define p en su lugar pero intercambiando sus dos lados (con centro Q); y entonces X_Q queda del otro lado de p en \mathbb{K} .

Y cuando Q está afuera. Tenemos entonces que X_Q es la imagen de X bajo una \mathbb{K} -reflexión en la \mathbb{K} -línea q . Y esta \mathbb{K} -reflexión deja en su lugar a la línea p –aunque intercambiando lados. En este caso diremos que p y q son *ortogonales* o *perpendiculares*: se cumple que el punto polar de una está en la otra.

En ambos casos, el punto X_Q es un punto que equidista de la línea p lo que X ; así que juntas for-

man una *equidistante* de p que, a diferencia de la geometría euclidiana ya no es una línea.

Parte II

Formalización

Capítulo 5

Axiomas y dimensión

Como habíamos anunciado, entramos ahora al terreno de la formalización. Pues en matemáticas, observar fenómenos no basta, hay que fundamentarlos; esa es su esencia y en eso radica su poder. Lo primero será establecer nítidamente los Axiomas o Postulados en los que nos estamos basando, para luego revisar críticamente nuestras construcciones y demostraciones. Habrá sorpresas interesantes en el proceso.

5.1. Axiomas de la Geometría Proyectiva

Las construcciones y demostraciones del capítulo anterior se basan en que las líneas se definen por dos puntos y en que dos líneas definen a un punto, intersectándolas. Que ésto, así de simple, funcione, es el principio de la geometría proyectiva; y lo que es sorprendente es el poder que tienen estas dos operaciones de *generar* e *intersectar* (simbólicamente usaremos “cuña”, \vee , y “pico”, \wedge ,

respectivamente) cuando les damos la plena generalidad que se merecen, sin hacer excepciones.

El concepto de línea se reduce a ser un conjunto de puntos sin ninguna atribución mágica respecto a distancias o tiempos (entes externos al modelo), y su poder radica exclusivamente en sus propiedades de *incidencia*. Donde decimos que un punto *incide* en una línea si es elemento de ella y al revés, que una línea *incide* en un punto si *pasa* por él, si lo contiene. Y podemos aún ampliar el significado a decir que dos líneas *inciden* si hay un punto que incide en ambas, es decir, si *se intersectan* (que entenderemos como abreviación de la frase “*tienen intersección no vacía*”).

Resulta ser una afortunada coincidencia lingüística (o bien, un acierto de la terminología matemática), y por eso estamos cacareando tan cacofónicamente a la palabra, que converjan las dos acepciones de *coincidencia*. Por un lado, con los significados técnicos que acabamos de precisar, que tres puntos sean *colineales* significa que *inciden* en una misma recta (*co-inciden*), y eso resulta ser una enorme *coincidencia* en la acepción común de

la palabra, pues por lo general generarían un triángulo y tres rectas. Y por el otro lado, que tres líneas sean *concurrentes* significa que *inciden* en un mismo punto; es una *co-incidencia* y también una notable *coincidencia*.

Definición. Una *Geometría Proyectiva*, \mathbb{P} , es un conjunto de *puntos* (a los que denotamos con letras mayúsculas $A, B, C \dots$), junto con una familia distinguida, \mathbb{L} , de subconjuntos llamados *líneas* (denotados con letras minúsculas $a, b, c \dots$), que cumplen los Axiomas **I**, **II**, **III** y **NT** que iremos presentando y discutiendo a continuación.

Nótese, antes de enunciar los axiomas, que usamos el artículo “una” en vez de “la” como primera palabra en la definición. Se abre así la posibilidad de que haya varios ejemplos además del que tenían los griegos en la cabeza y hasta hace poco tiempo –histórico– se consideraba como el único. Aunque el espacio en que vivimos es la muestra y la base de la intuición para construir el modelo abstracto, hay que tener muy claro que realidad y modelo abstracto son distintos. Y para construir

algo abstracto que refleje a la realidad será importante descubrir ejemplos nuevos que ayuden a delimitar con más precisión al modelo.

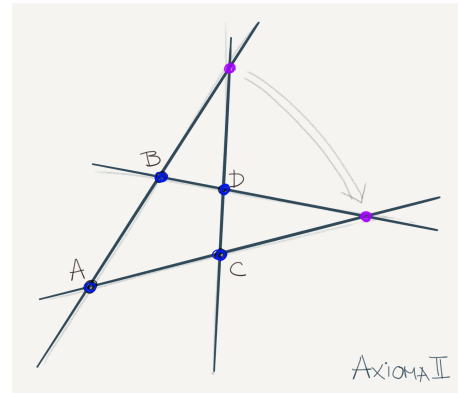
Axioma I. *Por cualesquiera dos puntos distintos $A, B \in \mathbb{P}$ pasa una única línea, que denotamos $A \vee B \in \mathbb{L}$ (y antes denotábamos AB).*

Este axioma, la existencia de líneas definidas con tal simpleza, refleja la genialidad de Euclides y su método. Se concibe a las líneas como algo preestablecido; no hay que preocuparse por definir las, sino que hay que usufructuar sus propiedades: que quedan determinadas por dos puntos. La unicidad implica que *si dos líneas diferentes se intersectan, entonces se intersectan en un punto*; pues si tuvieran dos puntos en común serían la misma. Así que las líneas, también llamadas *rectas*, son una familia de subconjuntos cuyas intersecciones dos a dos son vacías o un punto (o ellas mismas).

Implícitamente, estamos identificando a la Geometría Projectiva con su conjunto de puntos; al escribir " $A, B \in \mathbb{P}$ ", implicamos que \mathbb{P} es el conjunto de puntos. Pues conviene referirse a una

geometría projectiva con sólo una letra, y usamos \mathbb{P} que hace énfasis en lo projectivo, más que en lo geometría, porque también refiere a "puntos". Aunque estrictamente hablando, una geometría projectiva es una pareja $\mathcal{G} = (\mathbb{P}, \mathbb{L})$ y en general entenderemos a la familia de líneas \mathbb{L} como algo dado, que se conoce.

Axioma II. *Dados cuatro puntos distintos $A, B, C, D \in \mathbb{P}$, si las líneas $A \vee B$ y $C \vee D$ se intersectan, entonces también se intersectan las líneas $A \vee C$ y $B \vee D$.*



Este es el axioma que produce un punto a partir de una pareja de líneas ($A \vee C$ y $B \vee D$). Más no en cualquier situación. Hay una condición que verdaderamente pide que estén en un plano, pero como aún no está formalmente definido el concepto de plano, se usa que otras dos líneas generadas por puntos (alternados) en ellas, $A \vee B$ y $C \vee D$, se intersecten. Pronto veremos que en el caso en que sólo haya un plano, entonces este axioma equivale a que cualquier par de líneas se intersecten y se vuelve el *dual* del I (“dos puntos *generan* una línea” y II: “dos líneas se *intersectan* en un punto”).

En el dibujo está el esquema del caso general del Axioma II. Pero hay dos casos particulares. Primero, cuando uno de los cuatro puntos está en la recta de los otros dos (y entonces la intersección que se pide como hipótesis es él mismo). Y segundo, cuando los cuatro puntos (distintos) están en una misma línea. En estos dos casos, la conclusión del Axioma es cierta por simples argumentos conjuntistas (no se necesita establecer un axioma para asegurarlo). En ambos casos los cuatro puntos **no** están en *posición general* pues hay una coinci-

dencia: en el primero hay tres en una línea y en el segundo los cuatro están en una línea. La hipótesis del Axioma II es que tampoco estén en posición tan, tan general; *posición general* para cuatro puntos va a ser definida como que “ningunos tres estén en una línea y los cuatro no estén en un plano”, es decir, que no haya coincidencias, y en el Axioma se pide como hipótesis que dos líneas coincidan. Es una coincidencia que tiene todo que ver con la dimensión.

Hemos usado en momentos clave que hay una tercera dimensión. Aún no tenemos bien definido qué es dimensión, pero podemos expresar esto de manera muy simple, usando sólo al concepto de línea:

Axioma III. *Hay dos líneas que no se intersectan.*

Obsérvese que esto se cumple en nuestro espacio físico inmediato –con la idea euclidiana intuitiva de lo que son las líneas– y que captura su no planaridad. En cualquier espacio arquitectónico moderno, vemos o intuimos líneas en las intersecciones de los planos que sugieren paredes, pisos y te-

chos, y entre estas líneas se encuentran ejemplos de parejas no incidentes; por ejemplo una vertical en alguna pared y una horizontal en la pared de enfrente. Aunque pensemos que se alargan en ambas direcciones indefinidamente, nunca se tocarán, su zona de mayor cercanía fue en el cuarto.

Estos son los tres axiomas básicos o importantes. Pero entonces, surge un ejemplo “bobo” o “mala leche” que es tomar cualquier conjunto y declarar que las líneas son todas sus parejas (sin más nada). Cumple claramente el Axioma I. El II lo cumple por vacuidad (no hay cuatro puntos distintos que satisfagan la hipótesis) y también cumple el III cuando el conjunto tiene al menos cuatro puntos. Pero este ejemplo no califica para ostentar el nombre de “geometría”, en donde las líneas deben ser algo más que dos puntos para que se ponga interesante:

Axioma NT. *Cada línea tiene al menos tres puntos.*

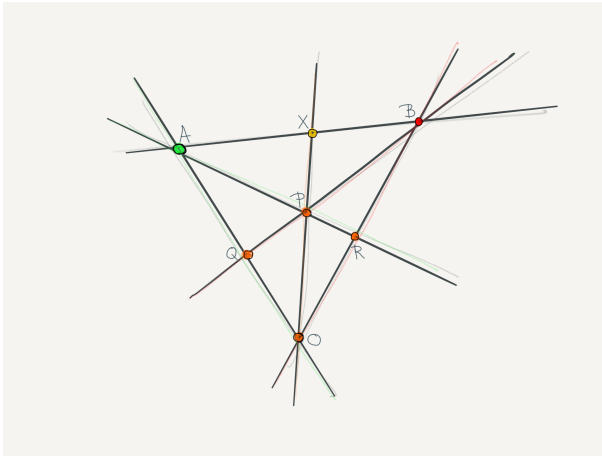
Le hemos puesto el nombre **NT**, de “no trivialidad”, pues es de índole distinta de los anteriores. Es para evitar el ejemplo simplón anterior que tiene in-

terés combinatorio (se le conoce como *la gráfica completa*) pero poco de geométrico.

5.1.1. Revisión de armonía

Revisémos ahora con cuidado la Construcción del Cuarto Armónico en una Geometría Proyectiva cualquiera y a la luz de estos axiomas, remarcando su uso.

Consideremos puntos A, B, X con $A \neq B$ y $X \in A \vee B$; cada vez que se usa el símbolo \vee de “la línea que generan...”, se usa implícitamente al Axioma I, aunque ya no volveremos a mencionarlo. Para poder elegir a un punto auxiliar O fuera de la línea $A \vee B$, se usa al Axioma III que implica que “hay otra línea” y al Axioma NT que implica que esa línea tiene un punto. Luego, el Axioma NT (“las líneas son más que una pareja”) nos permite encontrar otro punto auxiliar $P \in X \vee O$, distinto de X y de O .



Consideremos un momento la ecuación que se antoja obvia:

$$X = (A \vee B) \wedge (O \vee P).$$

Se usa el símbolo \wedge de “intersección” por primera vez. Por construcción, sabemos que el punto X está en ambos conjuntos del lado derecho, lo cual nos da una contención, $\{X\} \subseteq \dots$. Pero también sabemos que las líneas del lado derecho son distintas y entonces el Axioma I (la unicidad) nos da la igualdad, $\{X\} = \dots$; así que podemos tomar al

símbolo \wedge como responsable para poner a un punto en el lado izquierdo de la ecuación. Entenderlo como una operación que de dos líneas (en ciertas condiciones) da puntos, así como \vee siempre regresa líneas de dos puntos.

De la igualdad anterior (y de que X es distinto de O y P) se sigue que A, B, O, P son puntos distintos, y podemos aplicar el Axioma II. Nos asegura (usando las dos posibles etiquetaciones) que tenemos bien definidos a dos puntos

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P)$$

$$R = (A \vee P) \wedge (B \vee O).$$

Hay que observar que en los casos $X = A$ o $X = B$ (que no hemos excluido), éstas fórmulas tienen sentido y dan $Q = P$ y $R = O$ o bien $Q = O$ y $R = P$, respectivamente.

Por último, que el Cuarto Armónico

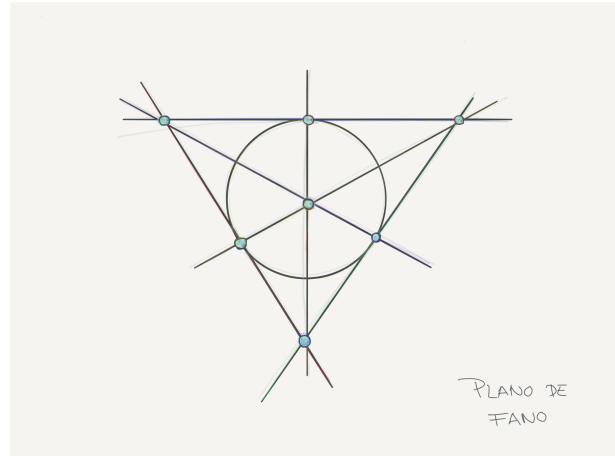
$$Y = (A \vee B) \wedge (Q \vee R)$$

sea un punto bien definido se sigue otra vez del Axioma II pues $A \vee Q$ y $B \vee R$ se intersectan en O .

5.1.2. Plano de Fano y planos proyectivos

El primer ejemplo de una Geometría Proyectiva surge de la configuración anterior y la observación de que no hay nada en los Axiomas que garantice que el cuarto armónico Y sea distinto de X –y que también indica que nos hemos dejado llevar por lo que aparentan los dibujos.

Si Y y X fueran iguales, obtenemos el Plano de Fano, cuyo nombre honra a su descubridor Gino Fano (Italiano, 1871–1952), quien es el primero que observa que hay geometrías finitas. Surgieron en abstracto, pero en las últimas décadas han encontrado aplicaciones trascendentes: se han vuelto fundamentales para la era de computación, en especial para teoría de códigos y criptografía.



Tiene siete puntos y siete líneas con tres puntos cada una (la curva cerrada de en medio representa a una línea con tres puntos, es el último trazo de la construcción del cuarto armónico que regresa al principio). Ayudándose de la simetría, se puede comprobar rápidamente que por cada par de puntos pasa una línea (que se cumple el Axioma I), y que cada par de líneas se intersecta en un punto (algo más fuerte que el Axioma II). El Axioma III no se cumple porque es un plano proyectivo, le falta dimensión.

Pero si cambiamos los Axiomas II y III por:

Axioma II'. *Cualquier par de líneas se intersecta*

Axioma III'. *Hay al menos dos líneas*

Y le llamamos *Plano Proyectivo* a un conjunto de puntos con una familia distinguida de subconjuntos llamados líneas que cumple los Axiomas I, II', III' y NT. Ya tenemos un ejemplo de un Plano Proyectivo finito, y cuando logremos definir *plano* en una Geometría Proyectiva general, veremos que todos tienen que ser Planos Proyectivos en este sentido axiomático.

Surge entonces la pregunta (que al final del capítulo contestaremos afirmativamente) de si el Plano de Fano es uno de los chiquillos en una familia de Geometrías Proyectivas, de si es miembro de una familia multidimensional (y el lector que tenga en la cabeza a un tetraedro con 15 puntos, anda tras la pista correcta).

Antes de entrar al otro ejemplo de un plano proyectivo del que ya hemos estado muy cerca, conviene discutir un momento y tratar de aclarar la diferencia entre los dibujos o diagramas y las es-

cenas interactivas que estamos usando.

Primero. Existe una Geometría Proyectiva Real, basada en los números reales que, como recta real, junto con un punto al infinito es el modelo abstracto para todas sus líneas. Las escenas interactivas del libro están construidas en una versión computacional de esta Geometría, que describiremos con más precisión al final de este capítulo. Y ésta es la Geometría que modela muy de cerca a nuestro mundo y cómo lo percibimos. Pedimos, por un momento más, que el Capítulo I sea suficiente razón para aceptar su existencia y pertinencia.

Segundo. Lo que parece suceder en esas escenas puede ser casualidad y no necesariamente sucede en todas las geometrías proyectivas. Ya vimos el ejemplo del Plano de Fano. En el dibujo del Plano de Fano, que quizá debíamos llamar diagrama, las líneas tienen una connotación diferente. Señalan cuáles ternas de puntos gordos y bien indicados (sólo hay siete) se aglutinan para ser las líneas de la familia distinguida (nótese que de las 35 ternas posibles de siete puntos, sólo se escogen a 7 como LAS líneas de la geometría), y entonces

no importa que se curveen o no sean rectas estrictas, pues señalan gráficamente otro tipo de objetos: ternas de puntos. Inclusive, como curvas dibujadas en un plano, se pueden intersectar y esas intersecciones no son relevantes, no tienen ningún sentido en lo que el diagrama quiere representar que es algo más abstracto (unas ternas de puntos distinguidas).

Y tercero. En las escenas de la Geometría Proyectiva Real que usamos, las rectas sí representan al conjunto de puntos con que se dibujan (obviando el problema de la exactitud de la computadora, los píxeles, etcétera). Pero también pueden señalar diagramas, o configuraciones como las llamamos en el Capítulo I, y se vale emplearlas en este otro sentido más abstracto. El ejemplo es el de la Configuración para el Cuarto Armónico que nos llevó al Plano de Fano, cuyas líneas son conjuntos de tres puntos dentro de un conjunto de siete puntos.

5.1.3. Configuración 13-13 y la característica

Veámos con cuidado la configuración que ha surgido en las demostraciones del Teorema de Simetría de la Armonía, de la Armonía de Ceva y Menelao, y en varias otras construcciones. Pero sin tanto compromiso escénico: en sí misma y a partir de algo muy simple.

Consideremos 4 puntos en un plano en posición general (es decir, sin ninguna terna colineal). Los llamaremos los rojos o colorados.

Como podemos escoger 6 parejas, éstas definen 6 líneas, las naranjas. Al tomar parejas de éstas líneas, se intersectan en puntos rojos excepto en tres casos, que nos dan tres nuevos puntos: los morados y que corresponden a las tres particiones 2-2 de los 4 puntos (en algunas construcciones del Capítulo I, una de estas tres particiones estaba señalada, ahora no, las tres son igual de importantes).

En el caso del Plano de Fano estos tres puntos morados resultan ser colineales y San-se-acabó,

ya se describió todo y se cierra el ciclo.

Pero en la escena (real), se generan tres líneas moradas. Éstas intersectan a las líneas naranjas en 6 nuevos puntos azules (que completan tres cuartetos armónicas en las líneas moradas). Y las líneas que generan estos 6 puntos azules resultan ser únicamente 4 (líneas verdes), pues se agrupan en ternas colineales. Podemos resumir esta construcción en la siguiente línea

$$4 \text{ pts} \Rightarrow 6 \text{ lns} \Rightarrow 3 \text{ pts} \Rightarrow 3 \text{ lns} \Rightarrow 6 \text{ pts} \Rightarrow 4 \text{ lns}$$

Veremos ahora que la simetría de palíndromo-dual no es coincidencia, que la construcción dual empezando con las líneas finales nos regresa a los colorados.

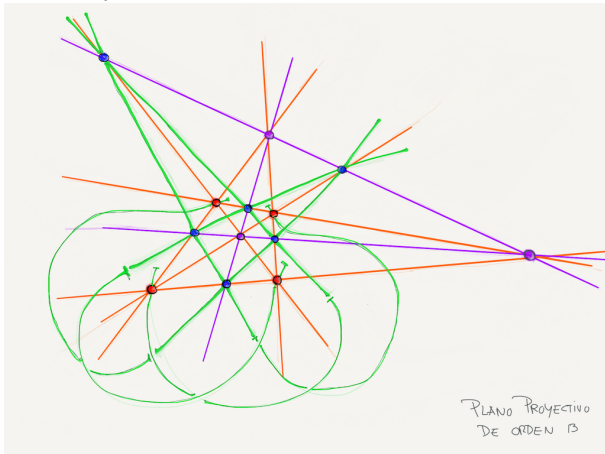
Consideremos a las 4 líneas verdes. Se intersectan en 6 puntos (azules), que generan 3 nuevas líneas (moradas) que se intersectan en 3 puntos (también morados). De cada punto azul, se puede trazar una nueva línea a un punto morado y se generan 6 líneas (naranjas), cuyas intersecciones son justo los 4 puntos rojos originales.



Consideremos ahora a la configuración de 13 puntos y 13 líneas que tenemos en abstracto. Y recordemos que una *configuración* es un conjunto de puntos y un conjunto de líneas con una relación de incidencia fija y establecida. Los colores seguirán siendo relevantes.

Nótese que solo los 4 puntos rojos originales están en 3 líneas y que por los otros 9 pasan 4 rectas (conviene auxiliarse de los colores para comprobarlo en dos patadas). Y que, de manera dual, las 4 líneas verdes tienen 3 puntos mientras que las otras 9 tienen 4. Esto sugiere que si asignamos a cada línea verde un punto rojo y declaramos (arbi-

trariamente) que esa línea incluya a ese punto, se balancean los números (en cada línea hay 4 puntos y por cada punto pasan 4 rectas). Pero de todas las (24) maneras de hacer esto, hay exactamente una que logra que los 13 puntos junto con las 13 líneas (ahora de a cuatro puntos cada una) formen un plano proyectivo. Lograr que se cumplan los axiomas tampoco es tan fácil.



Para ver que si queremos que se cumplan los axiomas de plano proyectivo, la asignación de puntos rojos a líneas verdes está forzada, consi-

dérese un punto rojo. Sus tres líneas naranjas lo “unen” con los tres puntos morados, con los otros tres rojos y con tres de los puntos azules, pero los otros tres azules están alineados en una de las verdes: ¡esa es la buena! para que ese punto rojo esté en una línea con cualquier otro punto. Y lo hemos indicado en el diagrama continuando las líneas verdes hasta encontrarse con su colorado asignado y así tener 4 puntos. Ahora sí, el Axioma I se cumple con los colorados. Aprovechándose de la simetría que dan los colores, no es difícil ver que ahora todos los Axiomas de Plano Proyectivo se satisfacen en esta configuración.

Este es un segundo ejemplo de plano proyectivo. Y con él, surgen muchas preguntas sobre la existencia de estos planos finitos. Por el momento lo que salta y debemos señalar, es que definitivamente contradicen algo que hicimos en el Capítulo 1: la inclusión de los enteros y luego los racionales en las rectas. Pues esto no siempre sucede, hemos encontrado planos con rectas que tienen 3 y 4 puntos solamente. El error que cometimos fue suponer que en la construcción en que incluimos los ente-

ros en una recta, cada entero era un nuevo punto. Pero lo corregimos:

Definición. Definimos la *característica* de una geometría proyectiva (y de un plano proyectivo) como el primer entero $n \geq 1$ que resulta ser un punto anterior en la construcción para incluir a los enteros dentro de una recta con el 0, el 1 y el infinito, ∞ , determinados; y si este entero no existe (es decir, si entran todos los enteros) decimos que tiene *característica cero* (y esto último: por costumbre, porque por lógica debía ser infinito).

El plano de Fano tiene característica 2, no es difícil ver que el de 13-13 tiene característica 3, y el plano proyectivo real (el de las escenas y que surge de nuestro entorno) tiene característica cero. ¿Habrá planos con cualquier característica? Si es finita ¿son únicos? o ¿es la característica siempre uno menos que los puntos de una línea? O un problema más serio aún ¿está bien definido este concepto?

Todavía no tenemos herramientas para enfrentar estos problemas. Pero antes de empezar a construirlas, conviene hacer una última observa-

ción sobre la configuración 13-13 en su versión real (antes de integrar los puntos rojos a sus líneas verdes naturalmente asignadas para cerrar todo en un plano proyectivo). La asignación, pensando ahora en que a cada punto rojo se le asigna como *dual* una línea verde específica, genera una *dualidad* de toda la configuración y por eso es que fuimos y regresamos en la escena, para hacer sentir esto. Usando la construcción, se puede extender la dualidad a que cada punto (y cada línea) tenga como dual a una línea (y, respectivamente, un punto) dualizando su construcción (intercambiando \vee por \wedge y a cada sujeto-objeto por su dual). Ésta dualidad corresponde a la simetría de espejo en la línea palíndromo-dual; por ejemplo, cada punto morado resulta ser el dual de la línea morada opuesta en el triángulo morado. Lo debemos mencionar, pues habíamos quedado en señalar qué dualidad fue la que se usó en la primera construcción de una curva armónica para encontrar sus líneas tangentes.

5.2. Planos

El Teorema Armónico asegura que la construcción del cuarto armónico es buena –independiente de los puntos auxiliares que hay que elegir– y ahora nos toca revisar su demostración críticamente a la luz de que, a veces, los dibujos engañan. Veremos que este resultado sí funciona en general para todas las Geometrías Proyectivas como efecto del Axioma III de dimensión. Nuestra primera demostración dependió básicamente del concepto de plano y de cómo estos se intersectan en el espacio. Después, indicamos que también se puede demostrar usando al Teorema de Desargues. Transitaremos ahora con detalle por este otro camino.

5.2.1. Definición

Primero tenemos que definir *plano* en una geometría proyectiva \mathbb{P} , que supondremos como dada, y ver cómo se intersectan éstos entre ellos y con las líneas.

Intuitivamente hablando, un plano es algo más

que una línea y contiene a todas las líneas que potencialmente se podrían trazar en él. También sabemos que por tres puntos no colineales debe pasar un único plano. Tomemos este camino.

Definición. Sean A, B, C tres puntos no colineales. Definimos al *plano que generan* A, B, C como la unión de todas las líneas que van de un punto en la línea $A \vee B$ al punto C , que será conveniente denotar $A \vee B \vee C$, y podemos resumir en una ecuación:

$$A \vee B \vee C = \bigcup_{X \in (A \vee B)} (X \vee C). \quad (5.1)$$

Nos atrevimos a usar la palabra *plano* en esta definición, pues:

Lema 2 (de Cerradura) *Dados tres puntos, A, B, C , no colineales, el plano que generan es cerrado bajo la operación de trazar líneas, es decir:*

$$P, Q \in A \vee B \vee C \Rightarrow P \vee Q \subset A \vee B \vee C.$$

Demostración. Llamémos ℓ a la línea $A \vee B$ y sea Y un punto en la línea $P \vee Q$, que podemos suponer es distinto de P y de Q . Para probar que $Y \in A \vee B \vee C$ –y por tanto, que $P \vee Q \subset A \vee B \vee C$ – debemos exhibir que existe $X \in \ell = A \vee B$ tal que $Y \in X \vee C$, para que Y sea elemento de alguna de las rectas que aparecen en la “gran unión” (5.1).

Puesto que $P, Q \in A \vee B \vee C$, se tiene que ambos puntos están en líneas de C a puntos de $\ell = A \vee B$ y por tanto existen puntos $P', Q' \in \ell$ tales que $P \in P' \vee C$ y $Q \in Q' \vee C$.

Supongamos que estamos en el caso general en que P, P', Q, Q' son distintos. Como

$$C = (P \vee P') \wedge (Q \vee Q'),$$

el Axioma II nos da un punto

$$R = (P \vee Q) \wedge (P' \vee Q'),$$

que está en ℓ pues $P' \vee Q' = \ell$ ya que son puntos distintos de ℓ .

Usando de nuevo al Axioma II: como

$$P = (C \vee P') \wedge (Y \vee R),$$

obtenemos finalmente a

$$X = (C \vee Y) \wedge (P' \vee R) \in \ell;$$

y esto concluye la prueba, pues $X \in C \vee Y$ implica que $Y \in X \vee C$ pues $X \neq C$ ya que $C \cap \ell = A \vee B$.

Nos faltan los casos particulares en que los cuatro puntos P, Q, P', Q' no son distintos. Pero resultan ser aún más fáciles (se pueden mover los puntos en la escena para simularlos).

Si $P = Q$, no hay nada que probar entendiendo (o definiendo) a $P \vee Q$ como el mismo punto $P = Q$.

Si $P' = Q'$, se toma $X = P' = Q'$ (están en la misma línea por C).

Si $P = P'$ y $Q = Q'$, se tiene que Y ya está en ℓ , así que $X = Y$.

Si uno (de P y Q) es igual (a su contraparte primada) pero el otro es distinto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es Q (que $Q = Q'$); se toma entonces a R como Q' y se obtiene a X como en el caso general. \square

Este lema se basa en el Axioma II y captura la

esencia de la geometría proyectiva. Es interesante observar que en el plano euclidiano, que tiene paralelas y no cumple el Axioma II, tampoco se cumple el lema. Al tomar una línea ℓ y un punto C fuera de ella, la unión de las líneas de C a puntos de ℓ no llena al plano; deja un “gran” hueco en la paralela a ℓ por C . Así que para generar planos como unión de líneas en el espacio euclidiano, al menos hay que dar dos pasos: primero la unión de líneas de una línea a un punto y luego remachar con la unión de líneas entre los puntos así obtenidos. En la geometría proyectiva cae de un solo golpe, pues, como veremos con más cuidado en el siguiente capítulo, las líneas por un punto en un plano corresponden a los puntos de una línea que no lo contiene.

Formalmente, tenemos que ver que la definición de plano que hemos dado no depende del orden de los puntos n_i , en buena medida, de los puntos mismos. Lo haremos con una serie de corolarios.

Corolario 1 (de Orden) Sean A, B, C puntos no colineales. La definición del plano que generan no depende del orden en que se den los puntos, en par-

ticular

$$A \vee B \vee C = C \vee A \vee B.$$

Demostración. Como $A \vee B = B \vee A$, es claro que la definición del plano generado por A, B, C no depende del orden de los primeros dos puntos, y sólo falta ver la ecuación del enunciado; que el tercer punto, que sí jugó un papel diferente en la definición, se puede permutar con otro.

Como las tres líneas del triángulo ABC (a saber, $A \vee B, B \vee C$ y $C \vee A$) están en ambos conjuntos, cada contención, de las dos que hay que probar, es consecuencia del Lema 2. Por ejemplo, una línea $X \vee B$ con $X \in C \vee A$ de las que forman a $C \vee A \vee B$ según la ecuación (5.1), está contenida en $A \vee B \vee C$ pues éste es cerrado bajo trazo de líneas y X y B están ahí. Como cada línea de la unión está contenida, se concluye que

$$C \vee A \vee B \subseteq A \vee B \vee C.$$

□

Corolario 2 (de Intercambio) Sean A, B, C puntos no colineales. Si D es un punto del plano $A \vee B \vee C$ tal que $D \in A \vee B$, entonces

$$A \vee B \vee C = A \vee B \vee D.$$

Demostración. Como $D \in A \vee B \vee C$ y este conjunto es cerrado bajo generación de líneas (Lema 2), todas las líneas de D a puntos de $A \vee B$ están en él, entonces $A \vee B \vee D \subseteq A \vee B \vee C$. La otra contención se sigue igualito de que $C \in A \vee B \vee D$, pues por definición (de $A \vee B \vee C$), existe $X \in A \vee B$ tal que $D \in X \vee C$ por lo que X, C, D son colineales y $C \in X \vee D \subseteq A \vee B \vee D$. \square

Y aunque su demostración podría corresponder a un corolario, lo enunciamos como teorema por su importancia teórica:

Teorema 2 Sea π un plano. Entonces si O, P, Q es cualquier terna no colineal de puntos en π , se tiene que

$$\pi = O \vee P \vee Q. \quad (5.2)$$

Demostración. Que π sea un plano quiere decir, según nuestras definiciones, que existe una terna no colineal de puntos A, B, C tal que

$$\pi = A \vee B \vee C.$$

Por el Lema de Cerradura (2), esto implica que el plano que generan O, P, Q está contenido en π . Para la otra contención necesitaríamos ver que A, B, C están en $O \vee P \vee Q$. Esto requiere revisar la demostración del Lema 2 con más cuidado. Y se puede, pero también podemos demostrar el Teorema usando formalmente a los dos corolarios anteriores, y eso haremos.

Puesto que las tres líneas del triángulo ABC no tienen puntos en común, el punto O no está en alguna de ellas. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $O \notin A \vee B$ –renombrando los puntos, si fuera necesario. Entonces el Corolario 2 implica que

$$\pi = A \vee B \vee C = A \vee B \vee O$$

(pues sabemos que $O \in \pi$). Como $P \neq O$, se tiene que P no está en una de las líneas $A \vee O$ o

$B \vee O$, otra vez *spg* –sin pérdida de generalidad– podemos suponer que $P \in A \vee O$. Entonces, por los Corolarios de Orden e Intercambio (1 y 2) y porque $P \in \pi$, tenemos que

$$\pi = A \vee B \vee O = A \vee O \vee B = A \vee O \vee P.$$

Finalmente, como $Q \in O \vee P$ y $Q \in \pi$, estos mismos corolarios nos dan las igualdades

$$\pi = A \vee O \vee P = O \vee P \vee A = O \vee P \vee Q.$$

□

Ya podemos demostrar que cualquier plano π de una geometría proyectiva \mathbb{P} es un plano proyectivo en el sentido axiomático con que los definimos.

Teorema 3 *Sea π un plano. Entonces, si ℓ y ℓ' son dos líneas contenidas en π , tienen un punto en común.*

Demostración. Sean A, B, C, D , puntos tales que $\ell = A \vee B$ y $\ell' = C \vee D$; los cuatro están en π por

hipótesis. Podemos suponer que $\ell \neq \ell'$, y *spg* que $C \in A \vee B$. El teorema anterior implica que

$$\pi = A \vee B \vee C.$$

Entonces, como $D \in \pi$, la definición de plano como unión de líneas implica que existe $X \in A \vee B$ tal que $D \in X \vee C$. Como $D \neq C$, esto implica que $X \in C \vee D$ es el punto de intersección de ℓ y ℓ' . □

Así, queda demostrado que los planos de una geometría proyectiva (con el Axioma III de dimensión) cumplen con el Axioma II' (*cualquier par de líneas se intersecta*). También cumplen el Axioma I de generación de líneas con las mismas líneas que en su geometría ambiente por el Lema de Cerradura; y por esto, cada línea tiene más de dos puntos (cumplen con el Axioma NT). Finalmente, cumplen el Axioma III' (*hay al menos dos líneas*) pues, como definimos plano en una geometría, implica que tienen al menos tres puntos no colineales y con ellos se generan dos (de hecho tres) líneas distintas. Así que son *Planos Proyectivos* de acuerdo a la definición axiomática de éstos últimos.

Hasta ahora queda formalmente demostrado que el Axioma II como lo enunciamos (que originalmente se debe a Veblen, –ver Coxeter–) es una manera elegante de decir “*dos líneas coplanares se intersectan*” sin tener que definir *coplanaridad* o *plano*. Pues ahora ya tenemos que *dos líneas son coplanares si y sólo si se intersectan*. Y entonces, el Axioma III (*existen dos líneas que no se intersectan*) dice que hay más que un plano. Si declaramos que los puntos tienen *dimensión 0*, que las líneas tienen *dimensión 1* y que los planos tienen *dimensión 2*; el Axioma III es equivalente a decir que la *dimensión* es mayor que 2.

5.2.2. Intersección en 3D

Nos concentramos ahora en la tarea de ver cómo se intersectan los planos en una Geometría Proyectiva que tiene algo más que un plano (Axioma III), pero tampoco tanto. Y resulta que las mismas ideas del apartado anterior funcionan bien. El Axioma III nos da dos líneas que no se intersectan. Las podemos ver como generadas por puntos, una

es $A \vee B$ y la otra $C \vee D$. Entonces $A \vee B \vee C$ es un plano y D un punto fuera de él. Veámos este caso en general.

Consideremos un plano π y un punto A fuera de él, y sea

$$\pi \vee A = \bigcup_{X \in \pi} (X \vee A);$$

es decir, $\pi \vee A$ consiste de todas las líneas de A a puntos de π .

Afirmamos que

$\pi \vee A$ es cerrado bajo la generación de líneas,

y que entonces, tiene todo el derecho a ser llamado *Geometría Proyectiva de dimensión 3*, o *Espacio Proyectivo tridimensional*. Y la demostración, esencialmente ya la hicimos; esta escena es copia de la del Lema 2 con un cambio de nombre, dos puntos ocultos y la línea roja es más gorda pues ahora representa al plano π en el primer paso, pero en el segundo ya se concreta en una línea con todas las de la ley, ya que la demostración conduce al caso bidimensional.

Si consideramos dos puntos $P, Q \in \pi \vee A$, se tienen, por la definición de este conjunto como unión de líneas, dos puntos $P', Q' \in \pi$ tales que $P \in P' \vee A$ y $Q \in Q' \vee A$. De aquí, se puede encontrar, justo como en el Lema 2, un punto $X \in P' \vee Q'$ para cada $Y \in P \vee Q$, tal que $Y \in X \vee A$. O bien, podemos invocar formalmente al Lema 2 y aplicarlo al plano generado por P', Q' y A , para concluir que

$$P \vee Q \subset P' \vee Q' \vee A \subset \pi \vee A.$$

Supongamos ahora que no hay nada más, que $\pi \vee A$ en nuestra geometría proyectiva \mathbb{P} . Que \mathbb{P} tiene dimensión 3: es algo más que un plano, pero, gracias a la existencia axiomática de las líneas, un simple punto fuera de él ya genera todo; y el mismo argumento que usamos en el Corolario de Intercambio (2) demuestra que no importa cuál punto fuera de él se tome.

Ahora sí, consideremos una línea ℓ no contenida en π . Si expresamos a la línea como $\ell = A \vee B$, podemos suponer, *spg*, que $A \not\subset \pi$. Pero como $\pi \vee A$

ya es todo el espacio, tenemos que $B \in \pi \vee A$. Esto implica que existe $X \in \pi$ tal que $B \in X \vee A$. El punto X está en la intersección de π y ℓ ; y no hay más, pues dos puntos en la intersección engullirían a toda la línea al plano. *Un plano y una línea no contenida en él se intersectan en un punto.*

Por último, si consideramos un plano distinto de π , éste se expresa $A \vee B \vee C$ y podemos suponer, *spg*, que $A \not\subset \pi$. Por lo anterior, $A \vee B$ intersecta a π en un punto X , digamos; y la línea $A \vee C$ lo intersecta en un punto Y . Si fueran iguales estos puntos, A, B, C serían colineales. Por lo tanto, $X \vee Y$ es la línea de intersección de los dos planos. *Dos planos distintos se intersectan en una línea.*

5.2.3. Teoremas de Desargues y de Armonía

5.2.4. Dualidad

5.3. Geometrías proyectivas de campos

El lector que tenga conocimientos de Álgebra Lineal, habrá notado la semejanza de la sección anterior con el tratamiento que se da a las bases y la independencia lineal en el estudio de espacios vectoriales. No es casualidad. Están íntimamente relacionados, y en el Siglo XX esta sinergia dio lugar a lo que hoy se conoce como Teoría de Matroides. En esta sección, veremos cómo de cualquier espacio vectorial se obtiene una geometría proyectiva.

De una descripción muy somera de los espacios vectoriales, deducimos ejemplos de geometrías proyectivas y vemos que los ejemplos que han aparecido anteriormente son de este tipo.

5.3.1. La geometría proyectiva de un espacio vectorial

Un *espacio vectorial* \mathbf{V} es un conjunto, a cuyos elementos se les denomina *vectores*, que tiene dos operaciones. La *suma* que lo hace un grupo abeliano (conmutativo) con neutro $\mathbf{0}$, que también se le llama *origen* o *vector cero*. Y el *producto por escalares* que tiene como ingredientes a un *escalar* que es elemento de un campo K (que se llama el *campo base* del espacio vectorial) y a un vector, y que nos regresa otro vector, que podemos llamar el *alargamiento* del vector *por* el escalar. La notación común es, dados dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ y un escalar $\kappa \in K$:

- $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es la suma de \mathbf{u} y \mathbf{v} ,
- $\kappa \mathbf{v}$ es el producto escalar de κ y \mathbf{v} (o el alargamiento de \mathbf{v} por un factor κ).

Por el momento, no es nuestra intención precisar la definición, una lista larga de propiedades muy naturales que extienden a la de *campo*, que hay

que entender como la generalización de los números reales y racionales (tiene dos operaciones suma y producto que se comportan de maravilla). Pero sí queremos que se tenga una idea geométrica de esta estructura.

El ejemplo canónico de un espacio vectorial sobre un campo K es tomar como vectores a todas las n -adas de escalares, se le denota K^n . La suma se define sumando coordenada a coordenada, el producto por un escalar $\kappa \in K$ se obtiene multiplicando a todas las coordenadas por κ y el origen resulta ser el vector con todas las coordenadas cero. Cuando K es el campo de los números reales \mathbb{R} y $n = 2$, es el conocido plano cartesiano, y cuando $n = 3$ es el modelo abstracto que se usa desde hace siglos para nuestro entorno inmediato. Y estos dos son los ejemplos en que se basa nuestra intuición y en el que están basados todos nuestros dibujos, en el siguiente apartado lo haremos explícito.

Resulta muy natural la noción de subespacio vectorial. Si \mathbf{V} es un espacio vectorial sobre un campo K , un subconjunto $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ es un *subespa-*

cio vectorial de \mathbf{V} , si en sí es un espacio vectorial con las mismas operaciones; es decir, si \mathbf{U} es cerrado bajo la suma de vectores y bajo la multiplicación por escalares. Y entonces se tiene una *latiz de subespacios de \mathbf{V}* , $\Lambda(\mathbf{V})$, en la que se ordenan con el orden parcial de subconjuntos. ¡Éste es el similar con las geometrías proyectivas que debemos explotar!

La latiz de subespacios vectoriales de \mathbf{V} , $\Lambda(\mathbf{V})$, también tiene dos operaciones –y el nombre “latiz” corresponde a ello. La intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial, y hay uno mínimo que contiene a dos que es su *suma* obtenida como todas las posibles sumas de vectores en ellos. Además tiene un máximo, el propio \mathbf{V} , y un mínimo que es el subespacio que solamente tiene al vector $\mathbf{0}$. Es un “cocol” como el de las geometrías proyectivas, y si se nos permitiera definir geometrías proyectivas por su latiz, la geometría proyectiva asociada a \mathbf{V} sería justo su latiz recorrida un piso para abajo, y punto; es decir, el $\mathbf{0}$ jugará el papel de \emptyset y los subespacios vectoriales de dimensión i jugarán el papel de subespacios proyectivos

de dimensión $i - 1$.

Más concretamente, cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ distinto de $\mathbf{0}$, genera un subespacio vectorial de \mathbf{V} de dimensión 1, que consiste de todos sus posibles alargamientos. A saber

$$[\mathbf{v}] = \{\kappa\mathbf{v} \mid \kappa \in K\},$$

pues entre las propiedades de las operaciones se cumple que para cualquier $\alpha, \beta \in K$:

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} = (\alpha + \beta)\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v},$$

asi que $[\mathbf{v}]$ es cerrado bajo las operaciones de espacio vectorial; de hecho se puede considerar a $[\mathbf{v}]$ como una copia del campo base K en la que el 0 de K va al vector cero de \mathbf{V} y el 1 de K va a dar al vector \mathbf{v} . Y nótese que además se cumple para $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v}$ que

$$[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}] \Leftrightarrow \mathbf{u} = \kappa\mathbf{v} \text{ para alguna } \kappa \in K \text{ (y se tiene que } \kappa \neq 0 \text{)}$$

Ahora sí, podemos definir a la *geometría proyectiva* del espacio vectorial \mathbf{V} como

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \{[\mathbf{v}] \mid \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\},$$

es decir, los puntos de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ son los subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbf{V} ; y las líneas de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ son los conjuntos de éstos que forman un subespacio de dimensión 2 de \mathbf{V} . Como habíamos previsto, los puntos de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ son el “primer piso” no trivial de $\Lambda(\mathbf{V})$ y las líneas el segundo.

En términos visuales, $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ es lo que el origen ve en \mathbf{V} : un punto por cada línea que pasa por él. Por eso resulta tan importante para cómo es que entendemos visualmente al mundo que nos rodea.

El Axioma I de geometría proyectiva se cumple en $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, pues si $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ se tiene

$$[\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}] = \{[\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}] \mid \alpha, \beta \in K, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)\}.$$

Los vectores $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ recorren el plano por el origen en \mathbf{V} que generan \mathbf{u} y \mathbf{v} , y al “encarcelarlos”, $[\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}]$, nos dan puntos en $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. La condición $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ asegura que ninguno de los vectores considerados es $\mathbf{0}$, pues $[\mathbf{u}] \neq [\mathbf{v}]$ equivale a que \mathbf{u}, \mathbf{v} sean *linealmente independientes* (para los que saben de eso); pues, considerando a $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ como rectas por el origen, que sean distintas

equivale a que generen un plano por el origen en \mathbf{V} .

Para demostrar que el Axioma II también se cumple, será más agradable cambiar de paleta de letras. Sean $[\mathbf{a}]$, $[\mathbf{b}]$, $[\mathbf{c}]$, $[\mathbf{d}]$ puntos distintos de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ (que corresponden a los puntos A, B, C, D con que se enunció el Axioma II). Suponer que las rectas $[\mathbf{a}] \vee [\mathbf{b}]$ y $[\mathbf{c}] \vee [\mathbf{d}]$ se intersectan, implica que existen *coeficientes* –es decir, escalares– $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0) \neq (\gamma, \delta)$) tales que

$$[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}] = [\gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}].$$

Esto implica que hay un escalar $\kappa \neq 0$ tal que al multiplicar al vector en un lado, nos da justo el del otro. Incorporando esta multiplicación a los coeficientes y cambiando de nombres (e.g., $\gamma' = \kappa\gamma$ y luego llamando γ a γ' y haciéndole lo mismo a δ), podemos suponer una igualdad estricta de vectores:

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \gamma\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}.$$

La intersección –que nos pide el Axioma II– de las rectas $[\mathbf{a}] \vee [\mathbf{c}]$ y $[\mathbf{b}] \vee [\mathbf{d}]$ se sigue fácilmente

de las propiedades de espacio vectorial, que permiten a los sumandos brincar de lado a lado cambiándose de signo y hacen equivalente esta última ecuación a

$$\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c} = -\beta\mathbf{b} + \delta\mathbf{d}.$$

Para poder, de aquí, considerar puntos en $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, tenemos que ver que los coeficientes no son ambos cero. Si $(\alpha, -\gamma) = (0, 0)$, se cumple que $\beta \neq 0 \neq \delta$ y la ecuación anterior nos da que $\beta\mathbf{b} = \delta\mathbf{d}$, que implica que $[\mathbf{b}] = [\mathbf{d}]$ contrario a nuestra hipótesis. Así que $\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ pues $[\mathbf{a}] \neq [\mathbf{c}]$, y se tiene que

$$[\alpha\mathbf{a} - \gamma\mathbf{c}] = [\beta\mathbf{b} - \delta\mathbf{d}] \in ([\mathbf{a}] \vee [\mathbf{c}]) \wedge ([\mathbf{b}] \vee [\mathbf{d}]).$$

Así, queda demostrado que el Axioma II se cumple en $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

El Axioma III se cumple para $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, cuando la dimensión como espacio vectorial de \mathbf{V} es al menos 4. Pues la latiz de incidencia de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ es justo la de subespacios vectoriales de \mathbf{V} , pero recorrida un piso hacia abajo en términos de dimensión –algo

de dimensión 1 en $\Lambda(\mathbf{V})$ representa un punto (de dimensión 0) en $\Lambda(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, etcétera.

Y el Axioma NT también se cumple, ya que si $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ son distintos, entonces $[\mathbf{u} + \mathbf{v}] \in [\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}]$ es siempre un tercer punto en su línea. Pues suponer que $[\mathbf{u} + \mathbf{v}] = [\mathbf{u}]$ por ejemplo, conduce a una contradicción: que $[\mathbf{u}] = [\mathbf{v}]$ o que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ –y se deja el detalle del argumento como ejercicio.

Armonía

Antes de ver los ejemplos concretos que nos interesan, convendrá ver en general cómo se expresa la armonía en estas geometrías proyectivas, por la simpleza del resultado, porque da una idea clara de su importancia y porque vuelve a motivar los ejemplos pequeños.

Veámos primero cómo se construye el cuarto armónico de $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]$ respecto a puntos distintos $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ en su recta $[\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}]$.

Sea $[\mathbf{w}]$ un punto fuera de la línea $[\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}]$. Y como segundo punto auxiliar tomamos a $[\mathbf{u} + \mathbf{v} +$

$\mathbf{w}] \in [\mathbf{u} + \mathbf{v}] \vee [\mathbf{w}]$. De aquí, debemos calcular la intersección de líneas. Y se obtiene

$$([\mathbf{u}] \vee [\mathbf{w}]) \wedge ([\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}] \vee [\mathbf{v}]) = [\mathbf{u} + \mathbf{w}],$$

pues la igualdad (de vectores en \mathbf{V})

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{v}$$

implica que el punto $[\mathbf{u} + \mathbf{w}]$ está en ambas rectas.

Análogamente, como $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) - \mathbf{u}$, se tiene que

$$([\mathbf{v}] \vee [\mathbf{w}]) \wedge ([\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}] \vee [\mathbf{u}]) = [\mathbf{v} + \mathbf{w}].$$

Finalmente, debemos encontrar

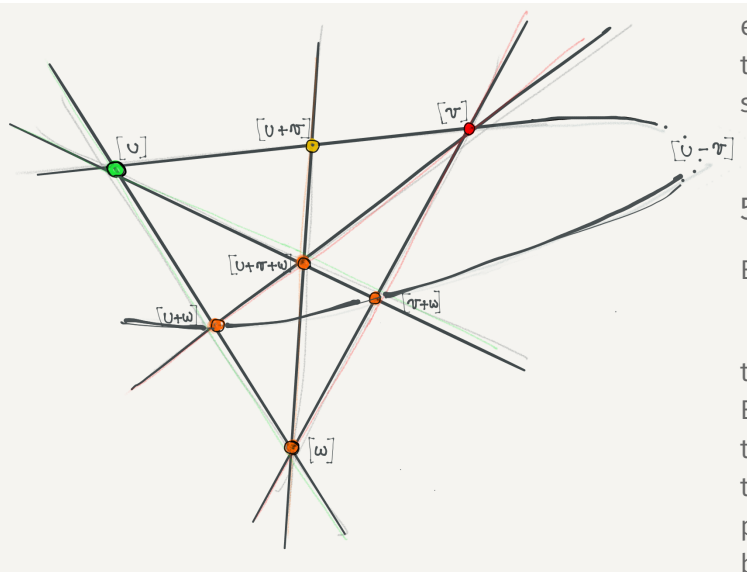
$$([\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}]) \wedge ([\mathbf{u} + \mathbf{w}] \vee [\mathbf{v} + \mathbf{w}]).$$

Y la solución que surge de la expresión

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) - (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

implica que *el armónico de $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]$ respecto a $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ es*

$$[\mathbf{u} - \mathbf{v}] = [\mathbf{v} - \mathbf{u}].$$



De aquí, se sigue el caso general:

el armónico de $[\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}]$ respecto a $[\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}]$ es

$$[\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}] = [\beta\mathbf{v} - \alpha\mathbf{u}].$$

Pues cuando ambos coeficientes son distintos de cero, se puede renombrar a \mathbf{u} y \mathbf{v} (ya que $[\mathbf{u}] = [\alpha\mathbf{u}]$ y $[\mathbf{v}] = [\beta\mathbf{v}]$) para que el cálculo sea justo

el anterior. Y cuando alguno de los dos coeficientes es cero, basta observar que la fórmula ya es lo suficientemente sabia para dar lo correcto.

5.3.2. Planos pequeños y característica

El plano de Fano

El ejemplo que acabamos de desarrollar ajusta perfecto para volver a visitar al plano de Fano. El campo más sencillo de todos tiene dos elementos 0 y 1 pensados como los residuos módulo 2, también denotado $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Y en él, el 1 es su propio inverso aditivo, es decir, $1 + 1 = 2 = 0$ o bien, $1 = -1$. Si tomamos como campo K a \mathbb{Z}_2 y como espacio vectorial \mathbf{V} a K^3 , veremos que $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ es el plano de Fano.

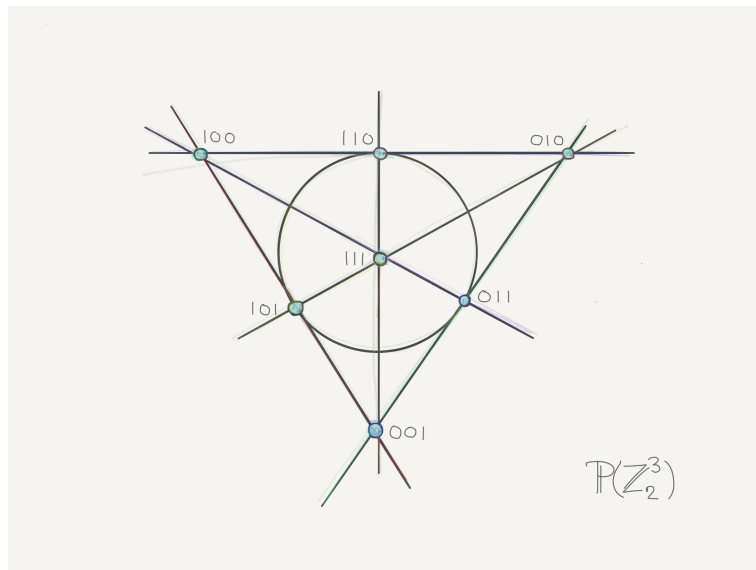
En el desarrollo anterior (para encontrar al armónico), si tomamos como \mathbf{u} al vector $(1, 0, 0) \in K^3$ como \mathbf{v} a $(0, 1, 0) \in \mathbf{V} = K^3$ y hacemos $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$; van apareciendo uno por uno los 7 vectores no cero de \mathbf{V} y se consideran siete líneas de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, hasta que llegamos al armónico y resulta

que éste ya está, que se repite:

$$[\mathbf{u} - \mathbf{v}] = [(1, -1, 0)] = [(1, 1, 0)] = [\mathbf{u} + \mathbf{v}],$$

pues, más aún, a nivel de vectores

$$(1, -1, 0) = (1, 1, 0)$$



ya que $1 = -1$ en el campo base K . Justo esta es la observación que nos llevó a encontrar el plano de Fano. El cuarto armónico no es distinto. Pero ahora es claro que vive como plano en una familia de geometrías proyectivas de cualquier dimensión. Y en ellas, cualquier plano es el de Fano y todas las líneas tienen tres puntos.

El plano 13-13 y coordenadas homogéneas

El siguiente campo en términos de tamaño es $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ con tres elementos $\{0, 1, -1\}$ en el que $2 = -1$ pues $3 = 0$. Si tomamos $K = \mathbb{Z}_3$ y, como antes $\mathbf{V} = K^3$ se obtiene que $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ es el plano 13-13 que habíamos encontrado.

Ahora tenemos que ser más cuidadosos con la notación, pues si en el caso de \mathbb{Z}_2 los subespacios de dimensión 1 en el espacio vectorial tienen dos elementos (tantos como el campo) y uno único distinto del vector cero. En el caso actual, en que $K = \mathbb{Z}_3$, cada recta por el origen en V tiene tres elementos y dos vectores no nulos. Aquí ya se manifiesta la diferencia entre vector no nulo y la recta que genera.

Es común simplificar la notación de puntos en $\mathbb{P}(K^3)$ (para cualquier K) usando las llamadas *coordenadas homogéneas* que compactan la información y, para no confundirlas con las coordenadas cartesianas, se usan dos puntos como separadores:

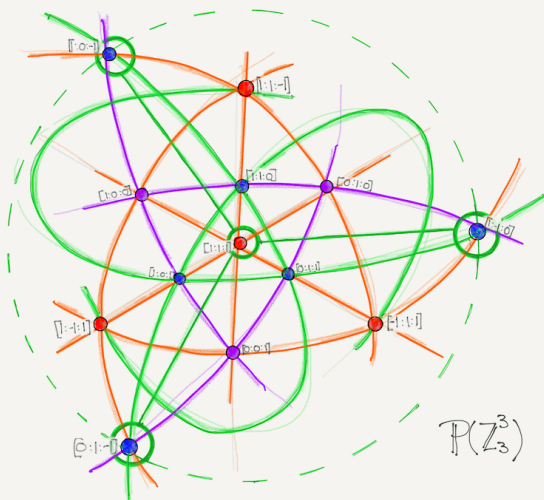
$$[x : y : z] = [(x, y, z)].$$

De tal manera que para cualquier $\kappa \in K$, $\kappa \neq 0$, se tiene que

$$[x : y : z] = [\kappa x : \kappa y : \kappa z].$$

Así que, regresando ya al campo base $K = \mathbb{Z}_3$, aunque se tenga que $(1, 0, 0) \neq (-1, 0, 0)$, resulta que $[1 : 0 : 0] = [-1 : 0 : 0]$.

En el dibujo, o diagrama abstracto de $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_3^3)$, se respetan los colores de cómo se presentó este plano (ref??). Ponemos en los tres puntos morados a los tres puntos que corresponden a los vectores de la base canónica, y de aquí se deducen coordenadas homogéneas para los demás. Los cuatro puntos (rojos) con los que arrancamos la construcción de la configuración 13-13, son ahora los cuatro puntos que no tienen ninguna coordenada homogénea igual a 0.



En cualquiera de las 13 líneas, con dos de sus puntos se obtienen los otros dos sumando y restando los vectores que los representan (y a veces, hay que considerar un factor común -1). Es decir, cualquier par de puntos en cualquier línea, hace armónico al par restante. Hay que tener en cuenta que el orden en que aparecen los puntos a lo largo de las curvas que indican las líneas, no tiene nin-

guna relevancia; es circunstancial del dibujo y no es parte de la geometría; en este sentido, la línea más “fiel” es la que no indicamos con una curva sino con un “conglomerado” de 4 puntos (el central y los tres de afuera).

Característica

Este es un buen momento para ver que nuestro uso del término “característica”, que definimos geoméricamente en (ref??), corresponde en estos ejemplos al uso clásico de la *característica de los campos*.

Regresemos al caso general, donde K es cualquier campo. Tiene entonces un 1 , su elemento unitario multiplicativo, bien definido, y su *característica* es el mínimo número natural k , tal que

$$k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_k = 0,$$

donde $0 \in K$ es su neutro aditivo, y si esta k mínima no existe (si nunca se cumple la ecuación) se dice que K es de *característica 0*.

Así que \mathbb{Z}_2 tiene característica 2; \mathbb{Z}_3 es de característica 3, y en general, cuando p es primo, \mathbb{Z}_p es un campo de característica p . Mientras que los números racionales \mathbb{Q} , los reales \mathbb{R} y los complejos \mathbb{C} , son campos de característica 0.

Nuestra definición geométrica de característica (ref??), es iterar a la construcción de la inclusión de números naturales en base al armónico, hasta la primera vez que dé un punto anterior. Recordemos que esta construcción depende de tomar tres puntos distintos en una línea, que la hacen de 0, 1 e ∞ y luego tomar armónicos inductivamente (en general, el punto que la hace de $n + 1$ es el armónico de $n - 1$ respecto a n e ∞ , empezando con $n = 1$).

Sea \mathbf{V} un espacio vectorial sobre K de dimensión al menos 3. Si tomamos dos puntos distintos $[\mathbf{u}], [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ que la harán de 0 e ∞ , el 1 debe ser un punto $[\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}]$, con $\alpha \neq 0 \neq \beta$ para que sea distinto de los puntos anteriores. Pero entonces, podemos renombrar $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$, para que el punto que corresponde al 1 sea justo $[\mathbf{u} + \mathbf{v}]$.

Como para cualquier número entero n se cumple que

$$[\mathbf{u} + (n + 1)\mathbf{v}] \text{ y } [\mathbf{u} + (n - 1)\mathbf{v}]$$

son armónicos respecto a $[\mathbf{u} + n\mathbf{v}]$ y $[\mathbf{v}]$,

se tiene que la construcción geométrica usando armónicos nos da, correspondiendo a la sucesión 0, 1, 2, 3, \dots , n , \dots , la sucesión de puntos en la línea $[\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}]$:

$$[\mathbf{u}], [\mathbf{u} + \mathbf{v}], [\mathbf{u} + 2\mathbf{v}], [\mathbf{u} + 3\mathbf{v}], \dots, [\mathbf{u} + n\mathbf{v}], \dots$$

De aquí se sigue fácilmente que las dos nociones de característica coinciden para las geometrías proyectivas asociadas a espacios vectoriales. Y se demuestra también que es una noción bien definida en este tipo de geometrías proyectivas, pues no depende de los tres puntos alineados con los que se arranca la construcción.

La línea proyectiva de un campo

Hemos usado tanto a las coordenadas que definen a los puntos de una línea en $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, que vale

la pena hacerlas explícitas. Aunque $\mathbb{P}(\mathbf{K}^2)$ no tiene dimensión suficiente para ser considerada como geometría proyectiva (pues consta de sólo una línea), sí tiene sentido en nuestra definición de las geometrías proyectivas de espacios vectoriales. Y resulta ser el modelo abstracto de todas las líneas de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

En general, para cualquier $n \geq 0$, se denota

$$\mathbb{P}^n(\mathbf{K}) = \mathbb{P}(\mathbf{K}^{n+1})$$

a la *geometría proyectiva de dimensión n de \mathbf{K}* .

Hemos visto como ejemplos que el plano de Fano es $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}_2)$ y que el plano proyectivo 13-13 es $\mathbb{P}^2(\mathbb{Z}_3)$. Queremos ver ahora que para cualquier campo \mathbf{K} , la *línea proyectiva de \mathbf{K}* , $\mathbb{P}^1(\mathbf{K})$, se puede identificar con el campo \mathbf{K} con un punto añadido “al infinito”.

En coordenadas homogéneas, tenemos que

$$\mathbb{P}^1(\mathbf{K}) = \{[x : y] \mid x, y \in \mathbf{K}, (x, y) \neq (0, 0)\},$$

donde hemos cambiado a las variables usuales x, y en vez de las que hemos usado arriba α, β , para facilitar la imagen geométrica clásica del plano

cartesiano \mathbf{K}^2 , cuando $\mathbf{K} = \mathbb{R}$. Y donde, por definición,

$$[x : y] = [\kappa x : \kappa y] \quad \text{para cualquier } \kappa \in \mathbf{K}, \kappa \neq 0.$$

Las coordenadas homogéneas se pueden interpretar como las “proporciones” (pues en general $x/y = \kappa x/\kappa y$), de aquí el uso de dos puntos “:” en vez de la coma “,” para separar. También, $[x : y]$ se puede interpretar como la pendiente de la recta en \mathbf{K}^2 que pasa por el origen y el vector $(x, y) \neq (0, 0)$.

Podemos incluir al campo \mathbf{K} en su recta proyectiva,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{K}) \\ x &\mapsto [x : 1], \end{aligned}$$

interpretando a $x \in \mathbf{K}$ como la proporción de x a 1. Y, puesto que si $y \neq 0$, se tiene que

$$[x : y] = \left[\frac{x}{y} : 1 \right],$$

ésta inclusión, abarca a todos los puntos de $\mathbb{P}^1(K)$ excepto al $[1 : 0]$ que se puede interpretar como el infinito, ∞ , la proporción del 1 al 0 o la pendiente de las rectas verticales.

En términos geométricos, si en el plano cartesiano, K^2 , consideramos la recta $y = 1$, cualquier recta por el origen $[x : y]$ la intersecta en el punto $(x/y, 1)$ excepto la recta $y = 0$, el eje- x , que no la intersecta pero intuimos que la intersecta en el “infinito”. La línea proyectiva de K es añadirle ese punto.

Al revisar las coordenadas homogéneas de cómo incluimos a los naturales en la recta $[\mathbf{u}] \vee [\mathbf{v}] = [\mathbf{v}] \vee [\mathbf{u}]$ usando armonía; si a $[\mathbf{u}]$ le tocan las coordenadas $[0 : 1]$ (para hacerla de 0) y a $[\mathbf{v}]$ le toca $[1 : 0]$ (el infinito); metimos a n en el punto $[n : 1]$, que concuerda con lo anterior.

5.3.3. El plano proyectivo real y ProGeo3D

El ejemplo que más nos interesa es el Plano Proyectivo Real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, porque es en el que están basadas las escenas interactivas del libro, implemen-

tadas en el sistema de geometría dinámica *ProGeo3D*. Pero también, y más significativo, porque el de los números reales, \mathbb{R} , es el campo que mejor modela las líneas de nuestro entorno inmediato, por lo cual es el que tradicionalmente se usa para entenderlo, tanto en la física como en las matemáticas.

La pantalla de una computadora o de una tableta tiene pixeles, o puntos, determinados por coordenadas (x, y) para un cierto rango de las variables –por costumbre, x varía en el eje horizontal y y en el vertical; y podemos suponer que el origen $(0, 0)$ está en el centro. Representa a una pequeña porción de todo el plano euclidiano (o cartesiano) \mathbb{R}^2 . Los puntos que puede uno seleccionar con un click están restringidos a ese pequeño rectángulo. Pero si tenemos dos líneas determinadas por pares de puntos en la pantalla y definimos un nuevo punto como su intersección, este punto puede estar o no en la pantalla, puede estar muy lejos, o inclusive en el infinito, y aún en este último caso, el sistema de cómputo que maneja las escenas tiene que considerarlo internamente. La manera en que

los programas de geometría dinámica en general, ProGeo3D entre ellos, manejan este caso particular de “intersecciones en el infinito”, y logran incorporar las intersecciones de rectas en un sólo caso general, es usando al plano proyectivo real.

Se considera a un punto fuera de la pantalla, el ojo del usuario o de Alberti, como el origen, $\mathbf{0}$, de un espacio euclidiano (o vectorial real) de tres dimensiones, con una nueva coordenada de profundidad, que llamaremos w . De tal manera que el plano de la pantalla corresponda al plano $w = 1$. El nuevo eje w , sale de $\mathbf{0}$ directo al centro de la pantalla, choca con ella en $w = 1$, y se sigue en abstracto hacía atrás. Y será importante hacer notar que el plano $w = 0$ es el paralelo al lienzo-pantalla que pasa por $\mathbf{0}$.

Cuando incorporamos –con un click en la pantalla– un punto al sistema, éste le asigna las coordenadas $(x, y, w) = (x, y, 1)$, donde (x, y) son las coordenadas del pixel correspondiente. Se identifica al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con la línea por el

origen

$$[x : y : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3).$$

Las líneas en la pantalla se manejan en el sistema como planos por el origen en \mathbb{R}^3 y la intersección de dos siempre da rectas por el origen, que el sistema tiene algoritmos para calcular en términos de coordenadas. En el caso particular de dos líneas paralelas en la pantalla, sus planos por el origen se intersectan en la paralela a ellas por $\mathbf{0}$ que está en el plano $w = 0$.

Cuando se le pide al sistema que dibuje un punto de coordenadas homogéneas $[x : y : w]$, primero checa si $w = 0$; si no es así, trata de dibujarlo en el pixel $(x/w, y/w)$ (que es donde la recta por el origen $[x : y : w]$ intersecta al lienzo $w = 1$) y se pinta cuando ambas coordenadas caen en el rango de la pantalla, si no, está afuera y no hay nada que dibujar. Los puntos en el infinito son aquellos que tienen $w = 0$, nunca se dibujan y corresponden a las líneas de visión de $\mathbf{0}$ que son paralelas a la pantalla, tendríamos que voltear la cabeza para considerarlas pues están en su horizonte.

Así que podemos pensar al plano proyectivo real, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, como el plano euclidiano clásico \mathbb{R}^2 , con una nueva línea añadida en el infinito: su horizonte. Que, dentro de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, es una línea como cualquier otra cuando la vemos de frente.

Lo que vemos en las escenas de ProGeo3D es una pequeña porción de ambos planos (el euclidiano y el proyectivo), pero el sistema que calcula lo que vemos en esa ventana está basado en la geometría proyectiva. Y, por supuesto, lo que hacen los programas de animación para los videojuegos y las películas desarrollados en épocas recientes, también lo ésta.