Geometría Visual

las matemáticas que surgen

de cómo vemos al mundo

José Luis Abreu y Javier Bracho

24 de febrero de 2021

Introducción

Esta es la primera parte de un libro electrónico interactivo de geometría proyectiva. Esta geometría se podría describir como la teoría matemática que surge al intentar entender *cómo vemos al mundo*, en el mismo sentido en que lo hicieron los pintores renacentistas para poder pintarlo de una manera realista. Con un espíritu experimental, el primer capítulo retoma esa preocupación que condujo a las *técnicas de la perspectiva*, y concluye con el enunciado de los axiomas en que se fundamenta la geometría proyectiva. Ésta se aborda formalmente en los siguientes dos capítulos.

En los albores de las matemáticas –es decir, cuando los griegos hicieron el trabajo fundacional que sigue asombrándonos hoy día– además de los *teoremas* (enunciados nítidos demostrados con rigor lógico) tenían gran relevancia las *construcciones*. No había juicios de valor preferencial entre ambos tipos de productos matemáticos; tan importantes eran los unos como las otras. Pero con el paso del tiempo, este balance se quebró.

La geometría se dividió entre lo que se llama ahora *geometría sintética*, que incluye a la geometría clásica manteniendo su estilo de argumentación, y la *geometría analítica* que se basa en el método de coordenadas. En esta última manera de pensar la geometría, que auspició avances espectaculares en los últimos siglos, las construcciones como tales perdieron interés, pues el álgebra y el análisis proporcionaban herramientas para sustituirlas; o bien, cuando ciertas construcciones eran inevitables, se les mimetizaba dentro de las demostraciones de los teoremas, que entonces se convirtieron en casi la única únidad de expresión válida en el avance y en la comunicación de las matemáticas. Las construcciones como tales perdieron su valor y quedaron como anécdota que, si acaso, se usaban para el apoyo didáctico en la enseñanza media.

La preeminencia casi absoluta del teorema, se vuelve a trastocar irremediablemente cuando la computación —como parte integral de las matemáticas— irrumpe en la escena en la segunda mitad del siglo XX. La importancia del *algoritmo* para resolver mecánicamente un problema —como un producto matemático en sí mismo— con un enorme valor práctico y teórico, cambia por completo el panorama. Las construcciones clásicas de los griegos recobran importancia como los primeros y más nítidos ejemplos de algoritmos y, entre otras cosas, surge el área de *geometría computacional* en la que el algoritmo (o la construcción) toman el primer plano. También surgen los programas de *geometría dinámica* en los que se toma a la pantalla como un plano y proveen al usuario de las *herramientas* para hacer construcciones geométricas en el sentido más clásico; la regla y el compás se vuelven virtuales, pero ganan exactitud y precisión en los dibujos y mantienen o recobran su estátus teórico de *herramientas constructivas*. Las construcciones clásicas de los griegos encuentran, dos milenios y medio después de ser concebidas, su plena expresión gráfica.

En este libro (si aún se le puede llamar así, pero lo hacemos en su sentido más emblemático), las construcciones retoman un papel protagónico como unidad de expresión matemática. Pero ahora, como son construcciones dinámicas y forman parte integral de una exposición didáctica escrita, las llamaremos **escenas**. Éstas están basadas en una construcción clásica, es decir, en una secuencia de operaciones geométricas –en un algoritmo que produce una figura– pero ahora, y gracias a la computadora que las transmite a una pantalla, tienen dinamismo en al menos tres sentidos.

Primero, como figuras se presentan en *pasos*, que son etapas acumulativas de la construcción. Ayudan así a entenderlas y permiten hablar de ellas en diferentes momentos o desde diversos ángulos. Dentro de una escena, el texto referente al paso que se muestra en su ventana está resaltado en color más obscuro, y el texto correspondiente a pasos por venir está en un color más tenue. El cambio de paso es con el mismo control que el cambio de página; típicamente, tiene el efecto de resaltar el siguiente parrafo del texto y aumentarle elementos a la figura. Y cuando se tiene que cambiar de página sin que aún haya concluido la escena, la ventana en la que ésta se está desplegando se mantiene preferentemente en su posición en la pantalla (cambia la hoja escrita pero no la figura).

Segundo, en ciertos pasos, las figuras son dinámicas en el sentido interactivo de que el conjunto de puntos de que depende la construcción (y la figura en la pantalla) se pueden mover a voluntad del lector; a esto lo llamaremos *exploración* o *explorar* la escena en un paso dado.

Y tercero, en cualquier momento de una escena en estado de exploración (y todas las escenas tienen tal paso), el lector (o usuario) puede involucrarse en la construcción dentro del programa que la creó, llamado *ProGeo3D*. Es decir, puede cambiarla, rearmarla o proseguir más allá de ella. Esto es particularmente importante, pues desde siempre los textos matemáticos se leen con otro ritmo que los literarios; no se leen de corrido, sino que exigen pausas para que el lector reconsidere, sopese y critique por sí mismo lo que se está planteando. Esta posibilidad de revisar a fondo y reconstruir las construcciones, ayuda en ese sentido introspectivo. Da mucho sobre lo cual rumiar o, como decimos los matemáticos, trabajar.

Agradecimientos. Debemos agradecer el invaluable apoyo técnico y altamente especializado que generosamente nos han proporcionado Joel Espinosa, Alejandro Radillo y Pablo Rosell para la elaboración y el diseño de este libro. Asimismo, agradecemos a Elías Mochan las valiosas sugerencias matemáticas para mejorarlo que surgieron al ensayar su uso en cursos de la Facultad de Ciencias.

Índice general

Parte I

Perspectiva, movimientos y armonía

La **perspectiva** renacentista revolucionó la manera en que representamos al mundo. Pero no sólo en la pintura, que fue su fuente de inspiración, sino también, como veremos en esta primera parte del libro, lo hizo en la ciencia. Las técnicas y procedimientos pictóricos que la caracterizan se deducen de la geometría euclidiana —la que explica nuestro entorno inmediato con base en conceptos como punto, línea, plano, distancia y ángulo. Pero a la vez la cuestionan. Pues al argumentar los porqués de las recetas constructivas que se usan en la perspectiva, es ineludible hablar de entes aún más abstractos y no tan inmediatos como la *línea al horizonte* y los *puntos de fuga*, que quisieran ser situados en, o se relacionan con, el "infinito". Discutirla, obliga entonces a disociar a la realidad inmediata del modelo teórico que surge de ella (conocido como el Espacio Euclidiano) y empieza así a abrir el camino para que, varios siglos después, sea aceptada la existencia de otras geometrías; y con ellas, la posibilidad de que aparezca un Einstein para darnos una versión más rebuscada y abstracta, pero más amplia y certera, de la realidad.

El libro que mejor documenta a la revolución pictórica renacentista es *Della pittura*. En él, su autor Leone Battista Alberti (1404-1472) empieza por precisar ¿qué es pintar? para pasar a explicar –con pasión y en lenguaje vernáculo, cuando lo usual era aún escribir en latín– las técnicas básicas de la perspectiva que habían desarrollado su maestro Filippo Brunelleschi (1377-1446), y los gremios de arquitectos y artistas que florecen orgullosos y creativos en la Florencia del siglo XV.

Entre los pintores renacentistas que se encumbraron en el uso de esas técnicas destacan el también florentino Leonardo (1452-1519) y el alemán Durero (1471-1528); pero hasta la fecha, los arquitectos y los pintores realistas las siguen usando para presentar sus proyectos o componer sus cuadros con "buena perspectiva" —o "cercanos a la fotografía", podríamos decir hoy día. Como ya mencionamos, esas técnicas tienen como fundamento a la geometría euclidiana, así que en su libro, Alberti recurre a la autoridad intelectual de "los matemáticos" para zanjar, o en ocasiones de plano esquivar, discusiones complicadas respecto a los *por-qués* de las recetas que propone. Y es natural esa reticencia, pues al exponer los argumentos, surgen problemas filosóficos serios que ponen en duda la concepción común de lo que es la geometría. En particular, es ineludible mencionar al *infinito* –y en ese entonces ni los matemáticos se sentían seguros pisando ese resbaloso terreno–, o bien, a veces parece que se está cuestionando al Axioma de las Paralelas de Euclides –aún "sacrosanto" en aquella época. En fin, el texto deja entrever que Alberti no se sentía a sus anchas con la argumentación precisa y deductiva. Y entonces, como sucede mucho en la enseñanza de las matemáticas, opta por dar recetas y aleccionar en procedimientos, más que en buscar el entendimiento de los razonamientos que los implican.

Pasan dos siglos para que un matemático, el francés Girard Desargues (1591-1661), agarre a ese toro —el de la argumentación sistemática y formal de la perspectiva— por los cuernos. Se le considera el padre de la *Geometría Proyectiva* pues, además del teorema seminal que lleva su nombre, propone ampliar, en abstracto, al Plano Euclidiano para que los horizontes y los puntos de fuga se incorporen con plenos derechos a la teoría geométrica. Llamaremos a ese plano extendido el *Plano Desarguesiano*. Pero sucedió que su trabajo no tuvo eco inmediato entre los matemáticos –y aún hoy día, no alcanza la presencia que le corresponde en la cultura científica general; los "puntos de fuga" y los "horizontes" aún siguen siendo argucias técnicas de los dibujantes más que entes matemáticos.

Y pasan otros dos siglos para que las ideas de Girard Desargues reciban la atención de sus colegas y se afianzen como teoría geométrica en la primera mitad del siglo XIX. Una buena razón histórica para que sucediera así –para que pasara tanto tiempo– es que un paisano contemporáneo de Desargues, llamado René Descartes (1596-1650), coordinatiza al Plano Euclidiano. Así que surge –simultáneamente a la proyectiva– la *Geometría Analítica* basada en el *Plano Cartesiano* (el que usa coordenadas) y da trabajo de sobra al gremio matemático: el interés general se concentra en esta vertiente de la geometría que se roba los reflectores de la enseñanza y de la historia. (Y con sobra-da razón pues pronto, con Isaac Newton (1642-1726) y Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz (1646 -1716), surge el cálculo para el cual el método de coordenadas es esencial, como también lo sería en el desarrollo de la física y en la conquista teórica de las muchas dimensiones).

Cuando, ya de regreso aquí en el siglo XXI, se presentan los argumentos que explican las técnicas de la perspectiva con figuras interactivas o dinámicas, irrumpe ruidosamente en la escena un concepto que ha sido fundamental en la historía más reciente de las matemáticas: los **movimientos**. Se debe esto a que nuestro cerebro tiene muy bien cableados los principios de la perspectiva, pues la evolución los ha ido usando para situarnos dentro de un mundo tridimensional, y entonces nos obliga a "ver más de lo que hay": tres dimensiones a partir de dibujos en dos, y sobretodo cuando hay movimiento (el efecto "cine", podríamos llamarlo).

Las computadoras ya han realizado el sueño de ilustrar teoremas o construcciones geométricas con figuras que no son una instancia única y estática de ellos congelada en el papel, sino que se mueven a voluntad en la pantalla y entonces, en principio, se puede transitar por todas las instancias a las que se refieren. Estas *figuras dinámicas* se acercan un poco más a la generalidad que pretende un razonamiento geométrico, o lo ilustran mejor. Pero, como pronto veremos, algo inesperado y sorprendente sucede con las construcciones en las que se basa la perspectiva renacentista. No sólo se mueve una figura geométrica plana y abstracta que ilustra un teorema frio, sino que nuestro aparato perceptivo se involucra e interpreta mucho más de lo que se pretendía. Se empecina en hacernos ver que algo se mueve en el espacio. Nos obliga a sentir que todo un plano se contorsiona, que gira de manera caprichosa a la vez que se transforma internamente.

En el siglo XIX, las matemáticas ampliaron enormemente sus miras y con ello, su abanico de objetos de estudio e interés. Entre estos nuevos entes abstractos que surgieron entonces, destacan los *grupos* que se asocian al estudio de la *simetría* e inician, como sus protagonistas estelares, el área que ahora conocemos como *álgebra moder-*

na. Y entre los grupos, destacan muy en particular, los *grupos de Lie*[1] —los grupos que, además de la simetría, traen incorporada a la *continuidad*— que son los que congregan o agrupan —valga la redundancia— a estos movimientos geométricos (los internos de un plano) que son a quienes estabamos acusando de irrumpir escandalosamente en la escena. Y, dicho sea de paso, estos grupos son ahora objetos importantísimos de la física contemporánea.

En su famoso *Programa de Erlangen*, que data de 1875, Christian Felix Klein (1849-1925) hace énfasis en que estos grupos de movimientos son los que le dan su carácter distintivo a las diversas geometrías que, para ese entonces, ya se habían descubierto y estaban en vías de ser finalmente "aceptadas en sociedad". Pero además, demuestra que la geometría proyectiva que inició Desargues —y que ya en ese momento había logrado grandes avances teóricos— las acoge a todas. Prueba que en su seno caben modelos para todas ellas. Lo que distingue a una geometría de otra es qué *subgrupo de movimientos* de la geometría proyectiva se debe considerar.

[1] El nombre es en honor a Marius Sophus Lie (1842 – 1899), matemático Noruego que empezó su estudio.

El objetivo primordial de la primera parte de este libro es darle sentido visual y experimental a esto que acabamos de describir históricamente. Pero también lo aprovechamos para instruir en el uso de la herramienta constructiva *ProGeo3D* y, puesto que van surgiendo los temas en distintos momentos, para describir el contenido de la segunda parte.

El primer capítulo se centra en construcciones geométricas que sustentan a las técnicas clásicas de la perspectiva. En cierta manera, con el mismo sentido de las "recetas" que popularizó Alberti, pero con la intención de ir motivando e introduciendo los conceptos con que se arma el andamiaje teórico de la Geometría Proyectiva. Entre estos conceptos, destaca el de *armonía* que está muy ligado a las cuadrículas y luego será central para nuestra presentación formal y para nuestro tratamiento de las curvas cónicas. Concluimos este capítulo con dos construcciones dinámicas de perspectivas tridimensionales (también conocidas como “de tres puntos de fuga”) intentando afianzar las ideas abstractas que ya están en el terreno común entre la técnica pictórica y las matemáticas.

En el segundo capítulo, nos enfocamos en los movimientos que surgen de estas construcciones por el simple hecho de ser dinámicas. Vemos que se pueden considerar distintos tipos de movimientos, que van desde los más abstractos y abundantes (los *proyectivos*); pasando por los de nuestro mundo cotidiano (los rígidos) para concluir con los de la geometría hiperbólica, que es el ejemplo contundente de geometría no euclidiana. Para algunas construcciones es necesario el uso de las *curvas armónicas* (que a la larga veremos que son las clásicas curvas cónicas) que definimos y describimos someramente aquí y serán tema de varios capítulos de la segunda parte.

Con ésta motivación y experiencia visual, en el Capítulo 3 definimos formalmente al Espacio Desarguesiano, la contribución seminal de Girard Desargues, y empezamos a transitar por el camino de la formalización matemática que será la materia de la parte dos.

Por último, en el Capítulo 4 vemos un resumen histórico de la Geometría Proyectiva que aunque fue muy influyente en el desarrollo de las matemáticas, no se ha reflejado aún este hecho en nuestra manera de enseñarlas. Intentamos analizar este extraño fenómeno cultural.

Capítulo 1

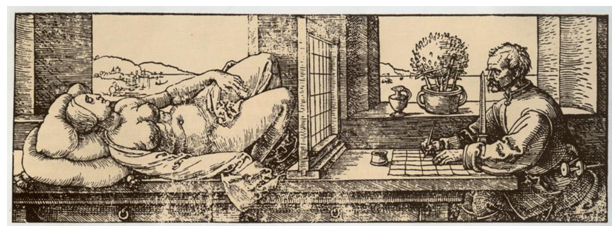
Perspectiva

Para los pintores renacentistas, según Alberti:

> *Pintar* es el arte de plasmar en un lienzo
> lo que ve —o debería ver— el pintor ante
> una escena real —o imaginaria.

Y para decidir qué va en cada punto del cuadro, debe fijar la escena, el plano del lienzo y la posición precisa del ojo del pintor. Entonces, se "proyecta la escena en el lienzo desde el ojo".

Este grabado de Durero, ilustra con claridad esta intención y una técnica para lograrlo (con un cuadro de muy difícil perspectiva) en la que se usan



cuadrículas, tanto en el plano que a la larga será el del lienzo, como en el papel en el que el pintor está dibujando un primer boceto.

Para escenografías más abiertas, que incluyen personajes y objetos a distintas profundidades, conviene usar otros métodos, que son las llamadas *técnicas de la perspectiva*, e incluyen el uso de los famosos *puntos de fuga* en el lienzo. Éstos son puntos que se obtienen de trazos auxiliares y que, aunque no provengan de puntos reales en el escenario, ayudan al pintor a colocar a los diversos objetos en el lienzo y a determinar la escala con la cual deben dibujarse. Sabemos bien —y lo aprendemos vivencialmente desde muy pequeños— que ésta escala disminuye conforme los objetos están más distantes, pero qué tanto se achican y cómo determinarlo con precisión en un lienzo, no quedó claro hasta el renacimiento; la *revolución pictórica* a la que nos referíamos viene del realismo que nos transmiten esas pinturas con buena perspectiva. Y vale la pena hacer notar que éste fenómeno “entre más lejos ésta, más chico se ve” lo usó la evolución para auxiliarnos en esa tarea constante de nuestro cerebro para situarnos (¡y localizar a potenciales depredadores!) en el espacio tridimensional que nos rodea; y también usan con éxito este mecanismo casi todas las especies de animales superiores.

Regresando al pintor, para saber en qué lugar del lienzo y con qué escala debe dibujar algo en la escena, la técnica fundamental será aprender a dibujar cuadrículas en perspectiva. Pues un plano cuadriculado permite situar con precisión a cualquier objeto en él —usando el método que hizo ilustre a Descartes: se fija a un cuadrado como *origen* o “la base”, y se determina cuántas “casillas” en cada una de las dos direcciones de la cuadrícula hay que moverse para llegar al lugar deseado. Y una vez ahí, ese mismo cuadrado dicta la escala.

Veremos primero que así como un piso de mosaicos cuadrados queda determinado por la primera loseta que se coloque (de ahí en adelante se deben colocar las nuevas piezas coincidiendo en las aristas de las que ya están puestas), también al dibujarlo en perspectiva, todo queda definido en cuanto se dibuja en el lienzo a la primera pieza.

1.1. Cuadrículas en perspectiva

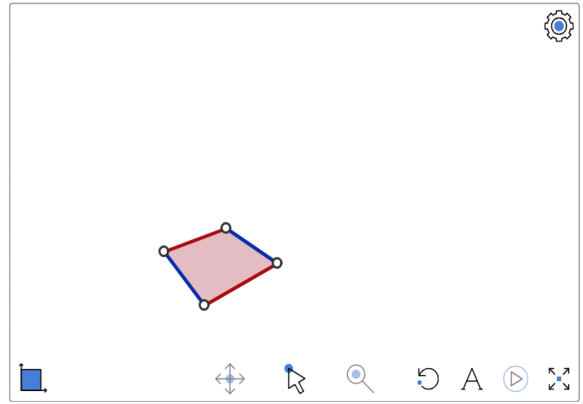
Supongamos que un pintor nos entrega en un lienzo, el dibujo —a ojo de buen pintor— de una de las losetas cuadradas de un mosaico en un piso (la *loseta básica*, llamémosla) y nos pregunta ¿cómo dibujar al resto del mosaico?

Tenemos que dar una receta, en este caso una construcción que consiste en una serie de trazos con regla, y también queremos argumentar por qué funciona.

Escena 1. Horizonte de una loseta.

1.1 Un cuadrilátero dibujado en el lienzo, que en nuestro caso es la pantalla, consiste de cuatro segmentos que son sus *lados*. Hemos pintado de rojo a un par de lados opuestos y de azul al otro par. Van a definir a las dos direcciones principales (o ejes) de la cuadrícula.

1.2 Cada segmento se *extiende* a una línea en el lienzo. Al trazar las cuatro líneas, los pares que corresponden a los lados opuestos de la loseta básica se cortan en dos nuevos puntos. Siguiendo a la nomenclatura cartesiana clásica, los hemos de-

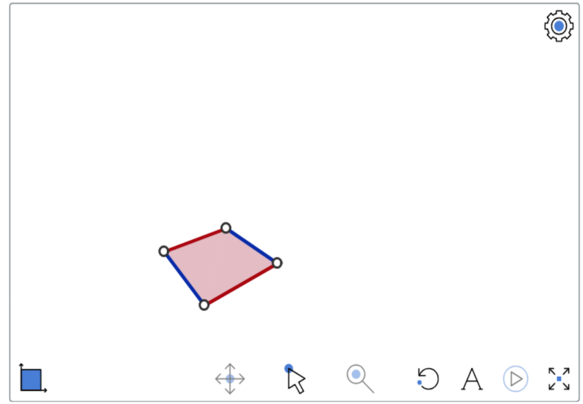


notado X, de “infinito del eje-x” y Y de “infinito del eje-y”. Vamos a suponer que ambos están en el lienzo por cuestión argumentativa; luego veremos el otro caso. Estos, (X y Y) son los *puntos de fuga* de la loseta básica. 1.3

Y por estos puntos de fuga, se traza una nueva línea que llamaremos el *horizonte de la loseta*. Corresponde a la línea del horizonte en un desierto plano y los pares de líneas a las paradigmáticas vías de ferrocarril: paralelas en el desierto pero no en el lienzo, visualmente se juntan en un punto del horizonte. Y como ya teníamos determinados a dos puntos del horizonte, a éste no le queda mas que ser la línea por ellos. Aquí, estamos usando el hecho básico de que por dos puntos en un plano (el lienzo) se puede trazar una línea, y que esa línea es única.

1.4 Una de las diagonales del cuadrángulo corta al horizonte en un punto D, de "infinito diagonal". Estos tres puntos en el horizonte que hemos bautizado "Infinito de Tal" son de los famosos "*puntos de fuga*". En la realidad no existen, pero en el lienzo sí y serán determinantes para la construcción. Y hay que remarcar que junto con el horizonte, dependen de los puntos de la loseta básica —y ahora, en este último paso, ya se puede mover la figura conforme a ellos: son los puntos de control de la construcción.

Conviene hacer un paréntesis para hablar de la herramienta con la que estamos visualizando las figuras y a la que nos referimos como ProGeo3D. *En este último paso, la figura cambió de mostrar figuras fijas a estado de* exploración: *ya se puede interactuar con ella*



moviendo los puntos control; es la llamada geometría dinámica.

En la parte inferior de la ventana aparecieron, a ambos lados del "Seleccionador" de objetos (que es la herramienta básica para explorar), controles para "Arrastrar" y hacer "Zoom" a toda la figura. Le sigue hacia la derecha el icono de "Recargar", con el que se puede regresar en cualquier momento a la posición inicial –la que escogieron los autores. Luego viene el que pone o quita la tipografía, le sigue el de "play" que en su momento explicaremos y termina con el control que amplia *la figura a toda la ventana.*

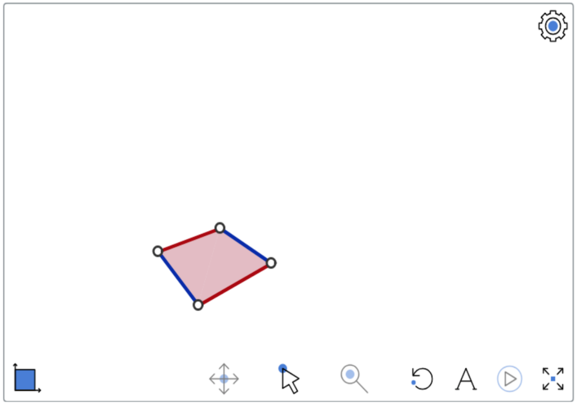
En este estado “pantalla completa” aparece el icono de “Trabajo”, arriba a la derecha. Al pulsarlo, entran los menús de herramientas de ProGeo3D y conviene empezar experimentando con los de “Deshacer” y “Rehacer” (abajo a la derecha) que tienen el número de la instrucción en medio de ellos (ésta construcción consta de 19 instrucciones).

Al pulsar “Deshacer” repetidamente, se viaja hacia atrás en la construcción. Se señala la última instrucción con el color que se uso y la figura regresa a ese momento anterior. Las herramientas que se usaron son “Intersección” para obtener los puntos donde se cortan dos rectas, la de “Punto/Recta” para el trazo de líneas y de los primeros cuatro puntos, la de “Plano/Triángulo” con la que se coloreo la loseta y la de segmentos.

Se puede reconstruir paso a paso a la construcción pulsando “Rehacer”, o retornar de golpe al final en la posición inicial con “Recargar” dentro de la ventana. Iremos describiendo a las herramientas en las siguientes escenas.

Esc:1↑

Hemos definido al horizonte de una loseta como la línea que pasa por sus dos puntos de fuga. La construcción de la cuadrícula dependerá de la



siguiente afirmación:

- *cualquier punto de la línea al horizonte es un punto de fuga.*

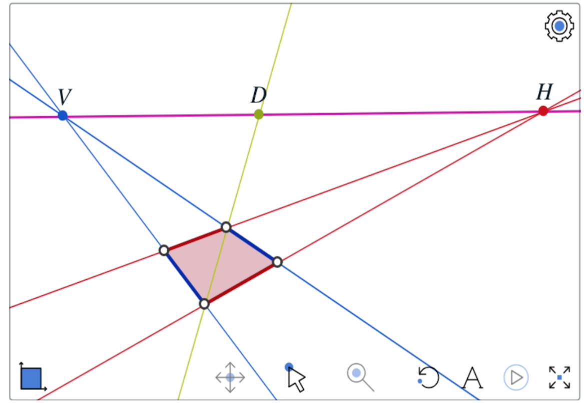
Para verlo, hagamos un experimento mental de esos que usaba Einstein. Supongamos que la loseta básica es el dibujo de una loseta en un piso infinito sobre el que estamos parados. Mandemos a una pareja, agarrada de la manita, a caminar en una dirección fija sobre el piso ¿Qué vemos? Por supuesto: que se hacen chiquitos. Ellos caminan tan campantes sobre líneas paralelas en el piso, pero en el lienzo tienden a convertirse en un punto del horizonte; y además, cualquier otra línea paralela a las suyas se dibuja como línea que también incide en ese punto (basta pensar en un tercer personaje viajando a su misma velocidad por esa otra paralela: sus distancias "reales" se mantienen fijas, pero en el lienzo se encogen). Entonces, líneas paralelas en el piso se ven (y por tanto se deben dibujar) como líneas que concurren en un punto de la línea horizonte. Los puntos en ella corresponden a distintas direcciones, y son sus llamados *puntos de fuga*. □

De este hecho se deduce un procedimiento para extender el dibujo de la loseta básica al de todo el mosaico, o cuadrícula, que determina.

Escena 2. Construcción en escalerita.

2.1 Regresemos a la construcción anterior: ya tenemos una loseta dibujada en el lienzo con su hori-
2.2 zonte y tres puntos de fuga en él.

La línea diagonal de la siguiente loseta (en dirección a X) tiene que ser la línea que va al infinito



diagonal, D, partiendo de la esquina inferior (y en dirección a X) de la loseta básica.

Esto da al vértice superior de la loseta siguiente
como intersección de dos líneas. 2.3

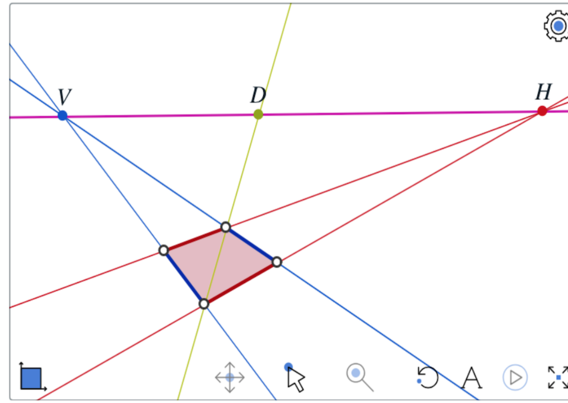
Desde ahí debe dibujarse la siguiente línea "vertical" (a Y); y entonces, su intersección con la otra diagonal es un nuevo punto desde el cual podemos trazar al otro infinito, el horizontal, X... y esto
nos produce un nuevo punto para iterar el proceso. 2.4

Se puede seguir así, *en escalerita*, trazando líneas hacia Y y hacia X desde puntos que se alternan en las dos diagonales hasta donde sea necesario crecer la cuadrícula.

2.5 La técnica de la escalerita se puede implementar para extender la cuadrícula hacia atrás. O bien, como lo hicimos en esta escena, se puede trazar la otra diagonal de la loseta (en verde) para que sus intersecciones con las líneas azules o rojas que ya tenemos, nos den puntos de donde trazar al otro infinito.

Si llamamos a la posición inicial "el andamio constructivo de un piso". Es importante que el lector mueva ahora la construcción (los punros-control de la loseta básica) para que esta se convierta en el andamio constructivo de un techo o una fachada (haciendo paralelos y verticales a dos de los lados opuestos), o de una cuadrícula euclidiana (haciendo en lo posible paralelos a ambos pares de lados opuestos) cuando el horizonte se va al infinito.

2.6 En éste su último paso, añadimos el trazo de otras dos diagonales verdes, que pasan puntualmente por los puntos del timbiriche que les corresponde y concurren en el otro "infinito diagonal", D' –la cuarteta de puntos X, D, Y, D' en el horizonte cobrará una enorme importancia en la teoría; es lo que llamaremos una "cuarteta armónica". Y además, también hemos dibujado tres líneas turquesa con pendiente $2:1$ (dos cuadros hacía X y uno hacía Y) para que se vea que efectivamente concurren en el horizonte como argumentamos a la Einstein.



Éste es un buen momento para que el lector experimente con otros conjuntos de líneas paralelas (o con la misma pendiente, por ejemplo $1:2$ o $3:1$), para lo cual debe familiarizarse con las posibilidades de ProGeo3D.

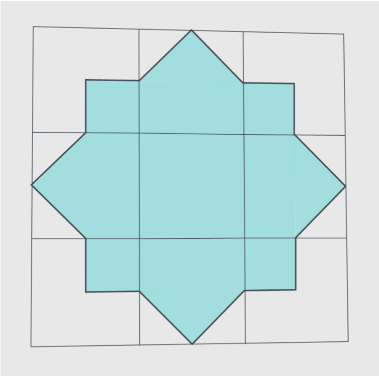
Aquí se describen las herramientas "Punto/Línea" e 'Ìntersección"; quizá con ejercicios

Esc:2↑

1.2. Una roseta, subdivisiones y armonía

La construcción en escalerita no es la única manera de construir cuadrículas en perspectiva. Con un ejemplo concreto, vamos a ver que hay muchas maneras de hacerlo y con ello motivaremos al concepto básico de armonía.

Vamos a ver con detalle cómo se hace el dibujo en perspectiva de una ventana en forma de rosetón de 8 picos.

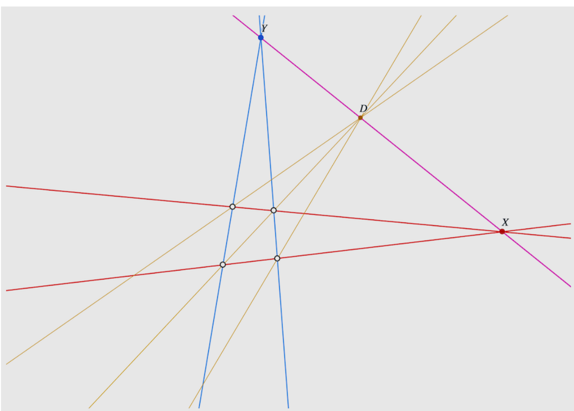


Escena 3. Rosetón de 8 picos.

3.1 Empezamos con una loseta básica —que será el cuadrado central— con su horizonte y sus tres puntos de fuga. Hemos trazado las tres líneas diagonales que se pueden, pues…

3.2 …nos dan cuatro puntos de intersección, desde los cuales se pueden trazar las líneas en las direcciones principales que completan una cuadrícula de tres por tres.

3.3 Al trazar las tres líneas en la otra dirección diagonal (en verde), tenemos nuevos puntos de intersección en los centros de las cuadrados.



3.4 Con ellos, ya se pueden trazar nuevas líneas en las direcciones básicas. Nos dan una cuadrícula de 6 por 6, en la cual…

3.5 …ya están los puntos para definir con segmentos al rosetón deseado. Hemos *subdividido* a la cuadrícula de 3 por 3, con el uso de la otra dirección diagonal. Y en principio se puede subdividir lo que se necesite, para poder detallar en alguna región de un cuadro en perspectiva.

3.6 El resto de la construcción es *decoración*. Pero antes de discutir cómo se logra, notemos los cuatro puntos X, D, Y y D' en el horizonte. Diremos que son una *cuarteta armónica*, pues son los cuatro puntos que se obtienen en la línea horizonte de una loseta con un par (X y Y) como sus puntos de fuga básicos y el otro par (D y D') como la intersección con las diagonales de la loseta.

Aquí se habla de las herramientas “Segmento y “Triángulo” con la opción de horizonte (pasos 7 y 8), y de ocultar colores.

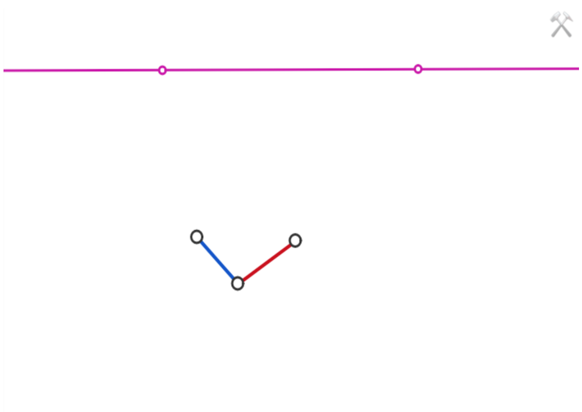
Esc:3↑

1.3. Con horizonte fijo

Para ganar control sobre los movimientos, vamos a cambiar a uno de los cuatro puntos variables de la loseta básica por su horizonte.

Escena 4. Cuadrícula con el horizonte dado.

4.1 Consideremos una línea (controlada por dos puntos, pero dejémosla fija): asumirá el papel de *horizonte*. Para determinar cómo se ve una cuadrícula en el piso, nos basta ahora con tres de los puntos



de la loseta básica. Uno de ellos ya es una esquina y jugará el papel de *origen* de dos *vectores* o segmentos dirigidos.

4.2

Las líneas del origen a los otros dos vértices, cortan al horizonte en los puntos H y V que, como antes, serán los puntos de fuga de las dos direcciones básicas de la cuadrícula.

4.3

De ellos, podemos trazar líneas al otro punto (así se deben dibujar en el lienzo esas rectas que son paralelas en el piso), y su intersección nos da al cuarto vértice de la loseta básica.

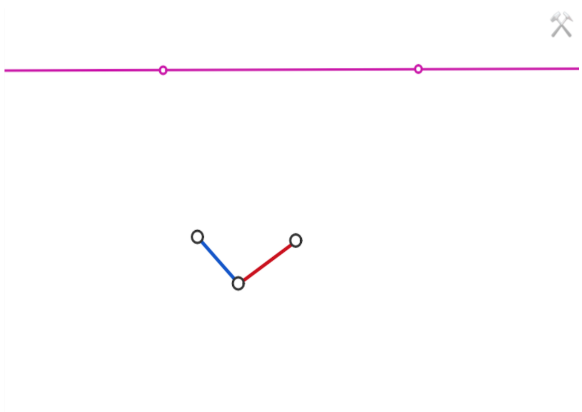
4.4

De aquí, para extender la cuadrícula hasta el tamaño deseado procedemos como antes: encontrando al “infinito diagonal” D; trazando otra diagonal a él, ... y luego dibujando líneas alternadamente a H y V en escalerita. 4.5

Ahora, se distinguen con claridad los movimientos internos del plano (cambios en la cuadrícula), de lo que nuestro cerebro interpreta como movimientos **del** plano como un todo en el espacio.

Para ver a los primeros, hay que mover a los puntos libres (con seis grados de libertad). Y para ver los segundos hay que mover al horizonte (que absorbe los otros dos grados de libertad originales): sentimos entonces que, siguiendo a esa línea, se mueve un plano en el espacio; aunque su cuadrícula también se deforma internamente pues cambia la posición relativa de sus puntos básicos –se incomoda nuestra intuición del mundo real ya que, a diferencia de lo que vemos cotidianamente, el plano no parece moverse de manera rígida.

Vale la pena volver a llevar la construcción a que parezca una fachada vertical (hay que hacer vertical al horizonte y a una de las direcciones básicas) y entonces, moviendo a uno solo de los puntos libres, se puede experimentar con la altura relativa del observador (desde qué piso se está viendo al edificio).

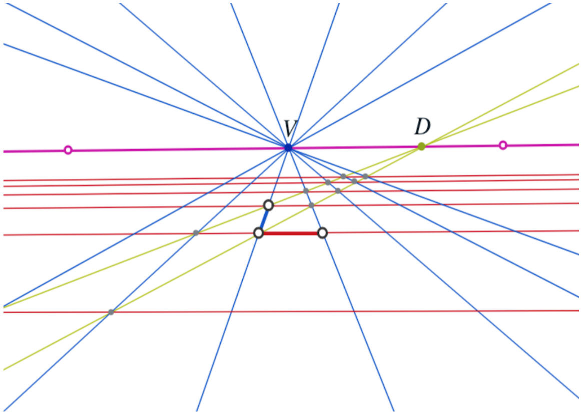


Esc:4↑

Lo que no se puede lograr es que la cuadrícula se haga euclidiana, como parece poderse en la construcción anterior. Pues ahora el horizonte siempre está en la pantalla (o cerca de ella si acaso se le expulsa con el efecto “zoom” o “lupa”), mientras que antes se le podía mandar muy lejos y hasta hacerlo cambiar de lado al mover a la loseta.

1.4. Las recetas de Alberti

Ésta última construcción es muy cercana a las recetas para pintar con buena perspectiva que proponía Alberti en *Della Pittura*. Él decía que lo primero que hay que hacer para preparar un cuadro, es trazar en el lienzo una línea “horizontal a la altura de los ojos” (que es la que hemos llamado horizonte) y luego, dibujar bajo ella a una cuadrícula



en perspectiva (que llamaba pavimento) para determinar la profundidad.

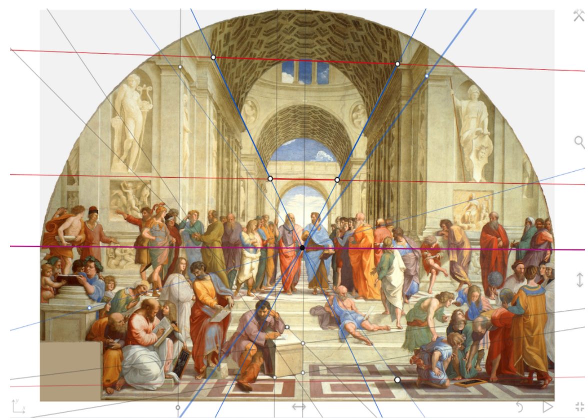
Escena 5. Pavimento de Alberti.

5.1 En nuestro caso, se logra poniendo también horizontal la dirección al punto H (entonces H sale de la pantalla y se va, literalmente, al infinito) y situando a V en el centro del horizonte, justo frente al ojo teórico del pintor-lector. Con base en esta cuadrícula, ya se pueden deducir geométricamente a las escalas que se deben usar para las distintas profundidades en la escena. Por supuesto, esta preparación del lienzo casi nunca aparece en la versión final del cuadro; es auxiliar para la composición, por lo cual la hemos llamando un *andamio constructivo*.

Esc:5↑

Escena 6. La escuala de Atenas.

Sin embargo, hay pinturas famosas como *La escuela de Atenas* 6.1
de Rafael, pintada entre 1509 y 1511 en una pared del Vaticano, en las que el cuadro mismo se aproxima mucho a la receta de Alberti.



El punto de fuga principal está justo entre Platón y Aristóteles en el centro de la composición. Es interesante observar el baúl sobre el que trabaja Heráclito, tiene líneas que no están en las direcciones principales de la arquitectura y parece estar ahí como un guiño de Rafael a perspectivas más complicadas. Hemos añadido a varias rectas movibles para jugar con líneas sobre este cuadro.

Esc:6↑

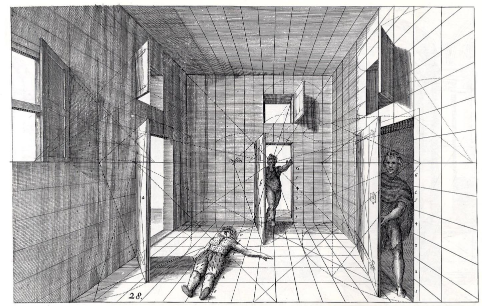
En el mundo real no hay líneas. Hay aristas que sugieren segmentos y estos, a su vez, sugieren su continuación abstracta como líneas. Análogamente, cada porción de plano en una escena (por ejemplo, una pared, un piso, un escalón, un techo o una puerta entreabierta) genera a un plano –su continuación en todas sus direcciones, abstracta e infinita– y como tal define su *línea horizonte* en el lienzo. Es donde intersecta a éste último, el plano paralelo que pasa por el ojo del pintor; justo ahí donde veríamos que se "acaba el plano" si en realidad fuera infinito, ya que al girar la vista un poquitito más dejaríamos de verlo pues el rayo "de atención" que sale de nuestro ojo ya no le pega.

Más aún, el punto de fuga de cualquier línea (y volvemos a insistir, no es que haya líneas en la escena real pero sí hay muchos segmentos que generan, cada uno, su línea abstracta) es donde intersecta al lienzo la línea paralela (y también abstracta) trazada por el ojo; ahí dónde estaríamos enfocando al infinito (hipotético) de la línea –justo ahí dónde debemos voltear cuando se nos señala una estrella: el indice y el ojo del que señala definen una línea, pretende que enfoquemos y pongamos atención en la dirección paralela.

Así, el horizonte que traza Alberti es la línea correcta (horizontal y a la altura de los ojos). Es la línea horizonte del plano que define el piso, pero también lo es del techo y de cualquier otra porción de plano horizontal que aparezca en la escena –una mesa o un baúl, por ejemplo. Y el centro de esa línea (donde habíamos puesto nuestro punto V) es el punto de fuga de todas las líneas perpendiculares al lienzo (las de la dirección de la profundidad) cuando suponemos que el lienzo es vertical y que el ojo del pintor está frente al centro del cuadro.

En el grabado atribuido a Alberti que reproducimos aquí, se muestra que tenían claro, al menos él y su maestro Brunelleschi, cómo es que las líneas paralelas (de las puertas y ventanas entreabiertas) deben dibujarse convergiendo a puntos de la línea horizonte que comparten el piso (del cuarto) y el techo, y que al pasar por los ojos de dos personajes implica que el pintor está a su altura. Pero además, también sabían cómo se deben trazar los círculos y podían deducir proporciones visuales de personajes no verticales.

Sin embargo, hay un error de perspectiva: el piso que se ve tras dos de las puertas entreabiertas debía de concluir a la altura de los ojos de los personajes, pues es el horizonte. Y que el horizonte se vea a la altura de las rodillas del personaje en la puerta del fondo, implica que el piso del cuarto está inclinado hacia el espectador y eso nos da una sensación de incomodidad –algo está mal.



Capítulo 2

Movimientos

Dejando de lado a la perspectiva, concentrémonos en ésta sección en los movimientos.

Si el lector hizo su tarea, al mover las escenas anteriores deambulamos ya dentro de dos *grupos de Lie*.

En la primera construcción, que depende de cuatro puntos libres (la loseta básica), viajamos por los llamados *movimientos proyectivos* o *proyectividades* que tienen dimensión 8.

En la siguiente escena, con el horizonte fijo, deambulamos por su *subgrupo* de *movimientos afines* o *afinidades*, que tiene dimensión 6. Se pueden pensar a éstos como movimientos de un plano euclidiano vistos, o dibujados, en perspectiva.

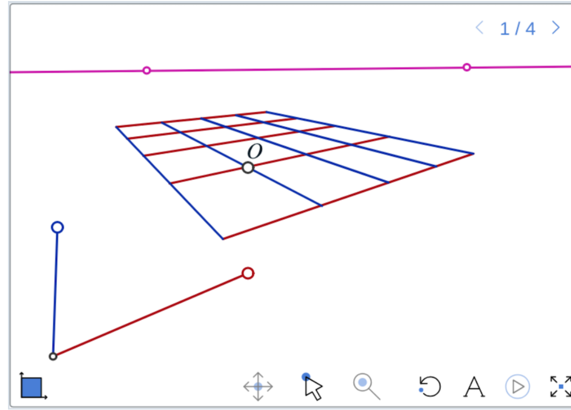
Veremos ahora que este último grupo se puede descomponer en dos, y uno de ellos ya muy cerca de nuestra experiencia cotidiana que es la que educa a nuestro aparato perceptivo para intuir tridimensionalidad.

2.1. Traslaciones y transformaciones lineales

Escena 7. Movimientos AfinesConTransl.

7.1 En esta construcción, al mover al punto O vemos que se traslada un rectángulo dentro de un plano horizontal visto en perspectiva; nos movemos ahora dentro del *grupo de traslaciones* del plano que tiene dimensión 2 (está controlado por un punto en el plano). Y este grupo sí que está registrado en nuestra experiencia visual, y desde nuestra más tierna infancia; piénsese, por ejemplo, en empujar un libro sobre una mesa: así se ve.

Por otro lado, al mover los puntos rojo y azul en la esquina inferior izquierda, se deforma la geometría del rectángulo –que, más precisamente, es un paralelogramo–, y siguiéndolo a él cambia la geometría de todo el plano. Tenemos 4 grados de libertad y, pensando que el punto O es el origen del plano, este grupo de movimientos es conocido como las *transformaciones lineales*. Éstas fueron extensamente estudiadas en el siglo XIX y, en su



versión general con coordenadas, son una de las piedras de toque de la matemática actual.

Así que las transformaciones afines (las de la escena anterior) son las líneales compuestas con las traslaciones, pues lo único que hemos cambiado es la manera de controlar estos movimientos, de deambular en ellos.

¿Cómo se logra esta construcción? 7.2

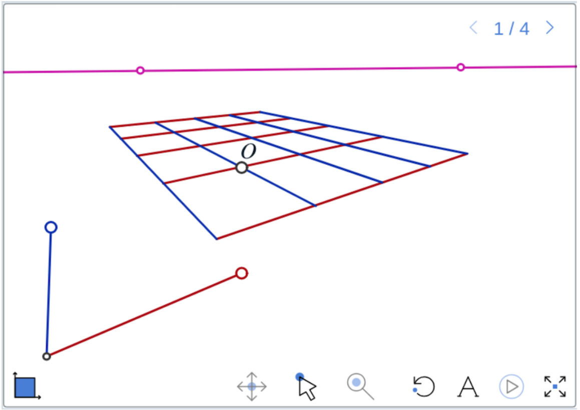
El punto clave es que con el horizonte fijo, podemos trasladar. Los segmentos dirigidos (o *vectores* *abstractos* en la esquina inferior izquierda) que rigen la geometría del plano se pueden trasladar a cualquier punto O, pues, como ya vimos,

> *las paralelas del piso se dibujan como líneas que concurren en el horizonte.*

Así que se traza la línea del “origen abstracto” a O y del punto de fuga de esta línea, o dirección, se trazan líneas a los extremos de los dos vectores. La dirección de los vectores trasladados se obtiene, de nuevo, de sus dos puntos de fuga en el horizonte, y entonces, los puntos de intersección correspondientes nos dan los extremos de los vectores trasladados.

7.3 Ya tenemos los tres puntos de la loseta básica y el horizonte, así que de aquí en adelante se traza la cuadrícula en escalerita como antes.

7.4 Finalmente, se trazaron segmentos en vez de las líneas del andamio constructivo y se ocultaron los colores de las construcciones auxiliares, para dar la sensación de movimientos reales con las traslaciones. *(En el menú de colores, los colores que tienen tache están ocultos y se les puede pintar, u ocultar,*

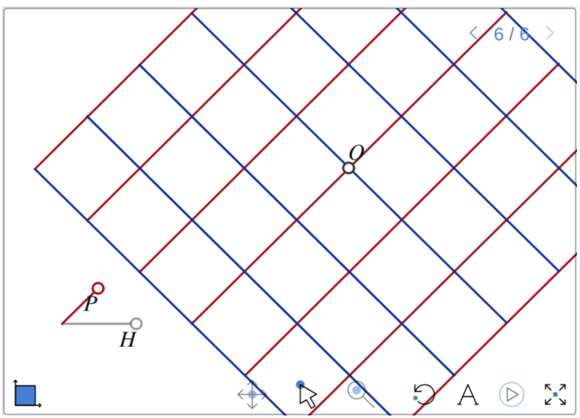


volviendo a pulsar el color correspondiente –y teniendo activa la herramienta “explorar”.) Esc:7↑

EJERCICIO. Para obtener los movimientos afines, dados por traslaciones y transformaciones lineales en el plano euclidiano clásico (no visto en perspectiva): a partir del paso 6 de la construcción anterior, en el que ya están definidos los dos vectores abstractos y el origen O, se puede copiar paso a paso la construcción usando la herramienta “Paralelas” para trazar las líneas definidas por un punto en el horizonte. Es decir, con el horizonte en el infinito. Hazlo. Quizá ayude ver el ejemplo de los movimientos rígidos que hacemos a continuación.

2.2. Movimientos rígidos (y lo que viene)

Los movimientos que nutren nuestra basta experiencia geométrico-espacial, son los *rígidos*: que no cambian distancias entre puntos.



Mover cualquier objeto involucra a uno de ellos. Pues todos sus puntos pasan de un lugar a otro en el espacio, y lo común en el mundo real es que en los sólidos que manipulamos no se alteren las distancias entre sus puntos o componentes.

A sus análogos abstractos en el plano también se les llama *movimientos rígidos*. Las traslaciones son un ejemplo que ya vimos y el otro ejemplo básico son las *rotaciones*: fijar un punto (que trabaje como tachuela) y girar al plano a su alrededor un cierto ángulo. Mover, por ejemplo, a un libro sobre una mesa, involucra a ambos tipos de movimientos. Y más aún, cualquier movimiento rígido en el plano –o su efecto final, mejor dicho– queda específicado con estos dos datos (ángulo de rotación y vector de traslación)[1].

Escena 8. Movimientos Rigidos En Euclidiano.

En esta escena, los movimientos rígidos en el 8.1
plano euclidiano de la pantalla están controlados por un punto libre, O, que da las traslaciones y un

[1] Donde –hay que especificar para los que saben– estamos suponiendo que los movimientos preservan orientación.

punto P en un círculo que determina a las rotacio-
nes. Además, tenemos otro control, H, restringido
a vivir en una línea que controla el tamaño; al in-
8.2 cluirlo, nos expandemos al grupo de *semejanzas*.

La dirección que determina P se pasa a la línea
roja por O con la herramienta de trazo de para-
lelas. Y se obtiene su ortogonal azul con la herra-
8.3 mienta de trazo de perpendiculares.

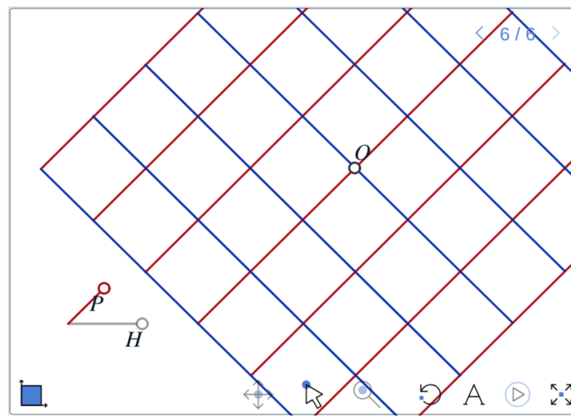
El círculo con centro en O y radio el segmento
que determina H, da por intersección los dos pun-
8.4 tos que definen a los vectores base.

Con paralelas, se encuentra al cuadrado básico
8.5 (o loseta), ... cuya diagonal y una paralela dan los
8.6 carriles ... para la construcción en escalerita, ... que,
8.7 finalmente, se presenta por segmentos.

Esc:8↑ Veremos ahora que también se pueden cons-
truir los movimientos rígidos vistos en perspectiva. Pero para lograrlo hay mucho trabajo por hacer. De hecho, ésta es la construcción más larga y delicada de todo el libro y la aprovechamos para describir y motivar el trabajo teórico que implica y que es el que abordamos en los siguientes capítulos.

Escena 9. Movimientos Rigidos.

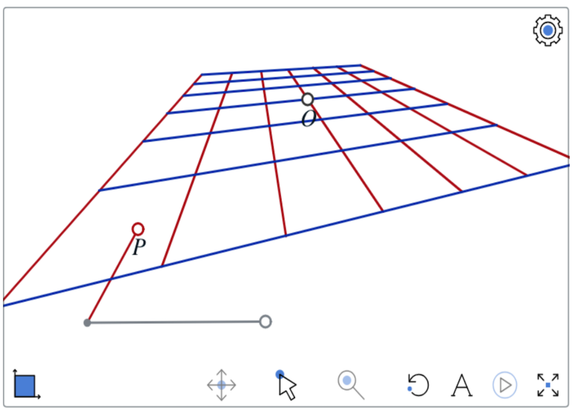
En esta escena se deambula en el grupo de los 9.1
movimientos rígidos de un plano y en el de sus semejanzas, pero ahora visto en perspectiva. Se controlan los movimientos rígidos con dos puntos como en la escena anterior: uno llamado O (y negro) que da las traslaciones de un cuadrado, y otro, P (rojo en la esquina inferior izquierda), que hace girar una línea alrededor de un punto fijo y con ello, controla a una rotación alrededor de O. Juegue con ellos: corresponde esta imagen abstracta

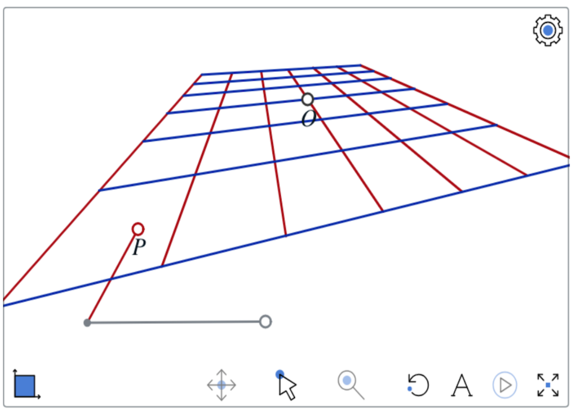


a nuestras vivencias visuales de movimientos sobre un plano.

Hay un tercer punto de control, el gris, que se mueve en una línea horizontal y actúa como *homotesia*, es decir, "zoom" o amplificación-disminución alrededor de O. Visto en perspectiva, tiene el efecto de hacernos sentir que el cuadrado se acerca o se aleja paralelo a sí mismo y con el punto O en trayectoria directa a nosotros (al ojo). Ésta es la interpretación visual más plausible conforme a nuestra experiencia perceptiva del mundo real. Pero también se puede interpretar a este movimiento como algo que sucede dentro del mismo plano: el cuadrado crece o decrece (y hoy día, también nos es familiar por la manipulación de fotografías en los teléfonos celulares). Es en éste último sentido que lo llamamos homotesia y amplia el grupo de movimientos rígidos al de las semejanzas. 9.2

El final de esta construcción es como antes: a partir de dos vectores y un horizonte se extiende





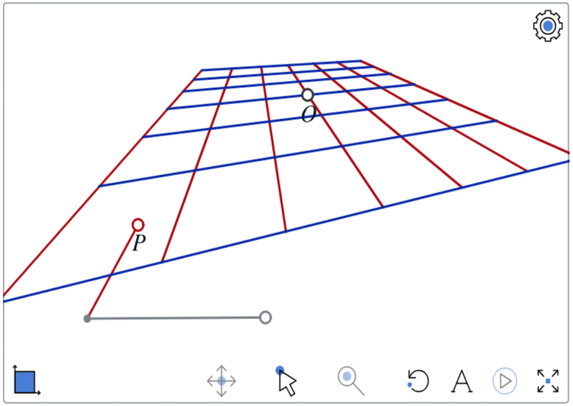
una cuadrícula en escalerita. Lo difícil es construir esos dos vectores para que se muevan como se verían dos vectores perpendiculares girando rígidamente en el piso (manteniendo fijo su tamaño y su ángulo como en la construcción anterior).

El giro de un vector de tamaño fijo en un plano, produce un círculo y éste se ve como una *elipse*.

Sí: nuestro mundo visual está lleno de elipses. Los platos, las tazas, las ruedas de los coches, etc. Aunque sepamos que son círculos, lo que vemos son elipses. Levante la vista: casi seguro hay elipses en su entorno, y si no, vaya por un vaso de agua y observe con un ojo cerrado su boca en distintos ángulos. Lo que ve son elipses.

9.3 El meollo de esta construcción es trazar la elipse que veríamos si un cuadrado y el círculo que pasa por sus vértices están en el piso, pero el pintor nos entrega nada más el dibujo del cuadrado, es decir, los cuatro puntos de una loseta básica (en rosa). (Llévese a O cerca del horizonte para apreciar sin intromisiones a la *elipse básica*, y juegue con su dependencia orgánica de los cuatro puntos de la loseta; observe además, que al horizonte lo determina como en los primeros pasos de la primera construcción de una cuadrícula.)

Para ver que la geometría de la cuadrícula está gobernada por la loseta, regrese a O de su exilio (de estar cerca del horizonte) y llévelo justo al centro de la loseta; ajuste el tamaño (con H) para que algún vértice caiga en la elipse, y luego gire (con P). Hay un momento –o mejor dicho, cuatro– en que coinciden el cuadrado y la loseta. Los cuatro vértices recorren la elipse como si la loseta (y



ahora el cuadrado cuadriculado) girara en el piso (o en el plano que determina la loseta si ya no lo tiene horizontal). Al mover los vértices rosas que controlan la loseta, se mueve el plano como en la primera construcción; pero ahora tenemos que en cada instancia hay, bien definida, una noción de rotaciones (para verlas, quizá convenga reajustar a O y a H para que el origen, O, regrese al centro de la loseta y un vértice de la cuadrícula retorne a la elipse básica).

Resulta que con los cuatro vértices de la loseta se define una elipse única y más aún, que ésta se puede trazar usando únicamente a las herramientas de incidencia (trazo de líneas e intersección de ellas). Esto lo veremos y demostraremos con cuidado en los siguientes capítulos:

En el Capítulo 2 se define el concepto de *armonía* para cuartetas de puntos colineales –así como de líneas concurrentes– y se demuestran sus propiedades básicas. Con base en ello se definen las *reflexiones armónicas* que serán el fundamento para entender y construir formalmente a los grupos de movimientos con los que ahora estamos trabajando experimentalmente. 9.4

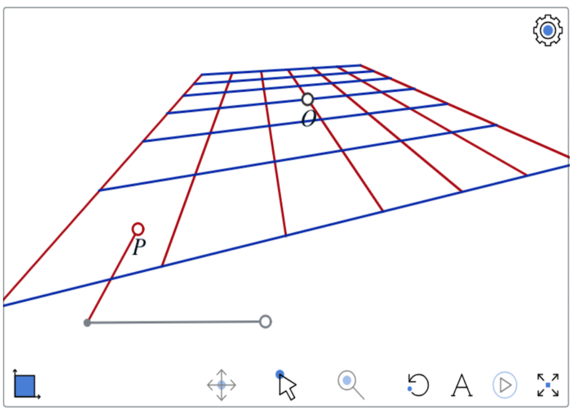
En el Capítulo 3, se define a la *curva de armónia de cuatro puntos* como el lugar geométrico de los puntos en el plano que los *ven* como cuarteta armónica y de las cuales, ésta elipse rosa asociada a la loseta es un ejemplo. Vienen con la noción de *líneas tangentes* integrada (hemos trazado, en naranja, a las de la loseta básica). Luego se define el concepto más general de *curva armónica* y se demuestra el Teorema de Polaridad que las caracteriza por la enorme simetría proyectiva que ostentan. Esta manera de tratar y definir a las clásicas *curvas cónicas* es inédita.

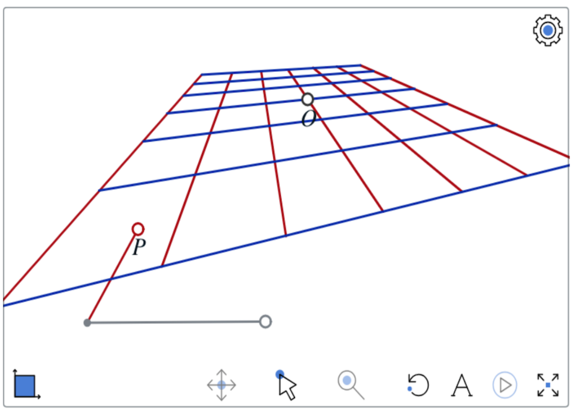
En el Capítulo 4 se ve como la simetría de las curvas armónicas conduce a la descripción Kleiniana de las diversas geometrías planas dentro de la geometría proyectiva de una manera mucho más precisa y formal de lo que lo estamos haciendo ahora. Y en particular se ve la noción de perpendicularidad a la que dan lugar una curva armónica y un horizonte lejos de ella. 9.5

Esta noción de perpendicularidad es la que se usa en la construcción para encontrar una base ortogonal de vectores centrada en la elipse y compatible con su geometría (en esta parte de la construcción también está incluida la influencia del factor de crecimiento H como una traslación). Así, se obtienen dos puntos que, con el centro de la loseta forman la base que se traslada a O para proceder con la construcción de la cuadrícula como siempre.

9.6 En términos constructivos, en la escena anterior de movimientos rígidos en el Plano Euclidiano, se utilizaron las herramientas de trazo de círculos, de paralelas y de perpendiculares. La construcción actual se lográ, en principio, con sólo dos herramientas: la de trazo de líneas y la de intersección; las llamadas *herramientas de incidencia*. Sin embargo, se obtiene algo mucho más general que incluye a la construcción anterior cuando la loseta básica es un cuadrado: observe ésto experimentalmente.

Para las construcciones geométricas clásicas –a Esc:9↑





la griega– se usaba el calificativo *con regla y compás* que especificaba a esas dos *herramientas*. El compás se hace cargo de trazar círculos y de llevar distancias a otros lugares; la regla se usa para trazar líneas por dos puntos. Cuando con estas dos herramientas se logra una construcción (como por ejemplo, *el trazo de una paralela, o una perpendicular, por un punto dado*), se le puede incorporar como herramienta que ahorra tiempo y pasos, sin que se pierda la esencia de seguir siendo con regla y compás. En este espíritu, la primera construcción de movimientos rígidos (que llamamos euclidiana) es una construcción con regla y compás en su sentido más clásico. Para la segunda (en perspectiva) no se uso nunca al compás. Es sólo con regla ... aunque, dicho así, hay que precisar.

Al implementar en computadora a las construcciones clásicas, hay que incorporar una nueva herramienta de *intersección* que da puntos a partir de dos líneas (u otros objetos más complicados como las curvas de armonía). Los griegos obviaban esto como herramienta: ahí estaba el punto de intersección; saltaba a la vista. Pero a las computadoras hay que señalárselos con cuidado y precisión: ¡míralo!; nótalo e incorpóralo a tu base de datos. Para todas nuestras construcciones está es una herramienta básica. Veremos, en la última sección de este capítulo, como esta herramienta de intersección de líneas cobra una gran importancia para la geometría proyectiva, de alguna manera, se incorpora como axioma.

Observemos, para concluir ésta sección, que si no cambiamos de escala, el grupo de movimientos rígidos es de dimensión 3: dos grados de libertad por las traslaciones y uno más por las rotaciones. Además, para cada punto tenemos un subgrupo de estos movimientos llamado su *estabilizador*: las rotaciones con ese punto como centro y que se puede pensar como un *círculo de movimientos*. Por supuesto, y como ya hemos indicado, al incluir a las homotesias (o zooms), el grupo crece a uno de dimensión 4: el de las llamadas *semejanzas*.

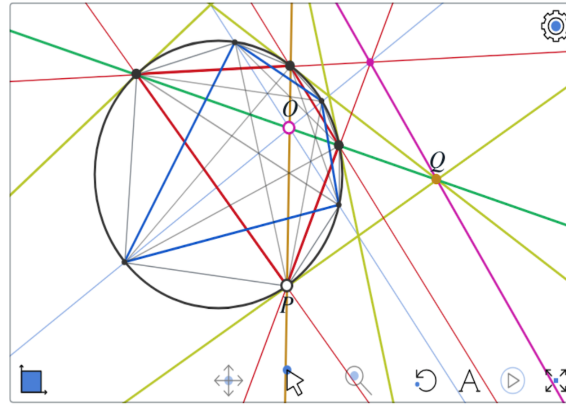
2.3. Movimientos hiperbólicos

El meollo de la construcción de los movimientos rígidos en perspectiva, es usar a la curva de armonía de una cuarteta de puntos (la elipse rosa). Resulta que una misma curva se puede expresar así para muchas cuartetas. Es en este sentido, ya sin una cuarteta fija de puntos que la defina, que la llamamos *curva armónica*. El ejemplo emblemático es un círculo y es el que vamos a utilizar ahora para dar una construcción capaz de recorrer a todas las posibles cuartetas de puntos que definen al círculo como curva de armonía.

Al transitar por sus posibilidades dinámicas, también se puede pensar a esta construcción como la de un grupo de movimientos proyectivos: los que dejan en su lugar al círculo. Es el grupo que Felix Klein distinguió como el de *movimientos hiperbólicos* y argumentaremos brevemente por qué da lugar a una geometría no euclidiana.

Escena 10. Circulo Hiperbolico.

10.1 Necesitamos usar herramientas euclidianas (i.e., al compás). Primero, para trazar un círculo con centro en el punto gris que pronto ocultaremos.



Además de este círculo que se mantendrá fijo y al que conviene referirse por un nombre, $\mathscr{C}$ llamémoslo, sean O un punto en el interior del círculo y P un punto en él (esto se puede escribir $\mathrm{P} \in \mathscr{C}$, para leérse “$\mathrm{P}$ en $\mathscr{C}$”). Estos son los datos iniciales. Tenemos entonces 3 grados de libertad –dos que da O y uno más de P– con las mismas características locales que en la construcción de movimientos rígidos, nótese. 10.2

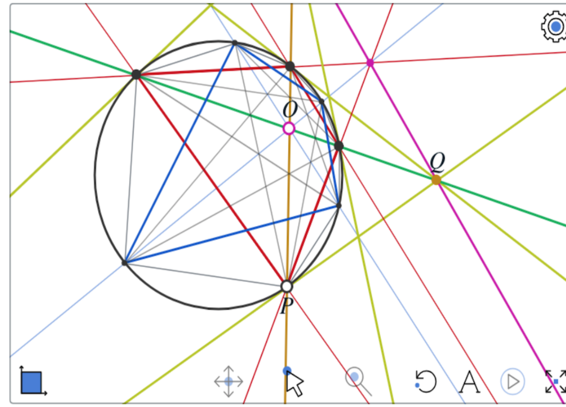
La línea OP corta a $\mathscr{C}$ en otro punto además de P. Trazamos las tangentes al círculo en estos dos puntos, usando a la herramienta de trazo de líneas perpendiculares. (Este es nuestro último uso de las herramientas euclidianas; a partir de aquí ya sólo usaremos las de incidencia.) La intersección de las dos tangentes da un punto Q afuera del círculo $\mathscr{C}$.

10.3 La línea OQ corta al círculo en dos nuevos puntos, que junto con los dos que ya teníamos definen un cuadrilátero (en rojo) inscrito en $\mathscr{C}$; pero más que eso, es lo que llamaremos una *cuarteta armónica* en $\mathscr{C}$ en el sentido de que la curva de armonía que define es precisamente $\mathscr{C}$.

10.4 Resulta entonces –y en su momento quedará demostrado– que el horizonte del cuadrilátero rojo contiene a Q.

Podríamos extender la cuadrícula de esta loseta, pero ahora nos interesa ver qué pasa adentro del círculo más que lo que sucede afuera.

10.5 Para ello, trazamos desde los dos puntos básicos en el horizonte, líneas a O, y obtenemos otros cuatro puntos en el círculo $\mathscr{C}$ con su correspondiente cuadrílatero (azul).

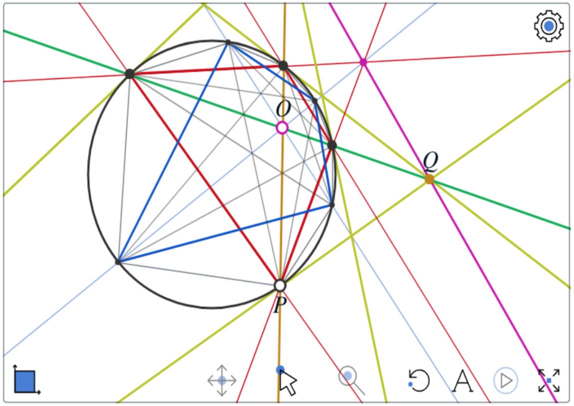


10.6 El resto de la construcción consta de trazar segmentos del octágono que tenemos definido en el círculo $\mathscr{C}$, y un par de tangentes más (en amarillo) –pero ahora ya las podemos trazar por incidencia: usando al punto que, de los cuatro que hay, se sentía solito en el horizonte (quizá haya que mover a P en el paso anterior para encontrarlo).

Disfrute por un momento de estos movimientos pues hay algo orgánico en ellos; no nos son totalmente ajenos o nuevos, nuestro aparato perceptivo intenta darles sentido... producen sensación de *déja-vu* y hay quien dice sentir tridimensionalidad.

Se puede mover a O por todo el interior del círculo (al que llamaremos *el disco* en el entendido de que es *abierto*, de que no incluye a los puntos de su límite $\mathscr{C}$). Aunque nos interesan los movimientos del disco en sí mismo, hay que notar que O acarrea consigo no sólo al disco, sino a todo el plano (a toda la pantalla y más allá), pero siempre partido nítidamente en tres pedazos: lo de afuera, el disco y lo que los separa, su frontera común, el círculo $\mathscr{C}$.

Si ahora movemos a P, todo gira agradable y coordinadamente alrededor de O –donde quiera del disco que éste. *(Es bonito animarlo al seleccionar a* P *y oprimir el botón de "play", para que* P *de la vuelta a lo largo de su carril que es el círculo* $\mathscr{C}$*)* ; y este giro, visto afuera del disco se describe mejor como "empujar" o "trasladar" a lo largo del horizonte. Observe que entre más cerca del centro del disco esté O, el horizonte se aleja, y estas rotaciones se van pareciendo más a las euclidianas. Y además, en el centro coinciden, son justo las ro-



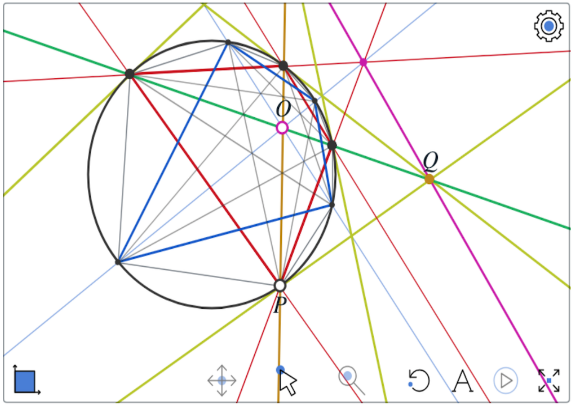
taciones euclidianas. Ahí también (O en el centro de $\mathscr{C}$), los tres cuadriláteros –dos inscritos y uno circunscrito– se cuadran (se vuelven cuadrados).

Lo que queremos resaltar es la enorme similitud de este grupo de movimientos con los movimientos rígidos (euclidianos) de la escena anterior (sin considerar las homotesias). No solo por las tres dimensiones que tienen ambos grupos, sino por cómo se obtienen éstas. Un punto (O en ambas escenas) se mueve con dos grados de libertad en lo que podemos llamar un *plano*, arrastrándolo consigo; y al dejarlo fijo en cualquier lugar, el otro punto de control, P, hace que todo gire a su alrededor.

Este es el grupo de *movimientos hiperbólicos*. Se llama así porque son los movimientos rígidos (que preservan distancia) del *plano hiperbólico*:

Si consideramos al disco (recuérdese, el interior del círculo sin incluirlo) como **los** *puntos*, a los segmentos de recta que lo cortan como **las** *líneas* y a todo esto como un plano geométrico en sí mismo, llamado **el** *plano hiperbólico* (o *Plano Kleiniano*); se cumple que por cada par de puntos pasa una única línea, el axioma básico de la geometría desde Euclides. Lo que **no** cumple este plano es el Axioma de las Paralelas: en el plano hiperbólico por un punto fuera de una línea pasa una infinidad de líneas que no la tocan y no una única que es lo que estipula el quinto postulado de Euclides. Tómese como ejemplo a una de las líneas rojas: por O están dibujadas 3 líneas que no la tocan.

Usando al grupo de movimientos podríamos, en principio, definir distancias en el plano hiperbólico como lo hacemos en el mundo real. Pues si decre-



tamos que dos puntos son **la** vara de medir, que están a distancia 1 –para fijar ideas, digamos que son O y el primer punto de intersección en la línea naranja hacia P–, podemos mover a esta vara a cualquier lugar para medir ahí con ella.

Además, también podemos medir ángulos: puesto que en el centro del disco las rotaciones corresponden a las euclidianas, a dos líneas que se corten las podemos llevar ahí para medir su ángulo. En particular, los pares de **rectas perpendi-**

culares son exactamente las que vemos resaltadas (en naranja y verde, cruzándose en O) y sus puntos límites corresponden a las cuartetas armónicas en el círculo límite $\mathscr{C}$ (repetimos: las cuartetas que lo tienen como su curva de armonía).

Esc:10↑ El primero que hizo el trabajo para obtener fórmulas explícitas para estas distancias y ángulos usando coordenadas, fue el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835–1900). Se encontraban así, modelos analíticos (es decir, dados por medio de coordenadas y fórmulas explícitas) de una geometría no euclidiana.

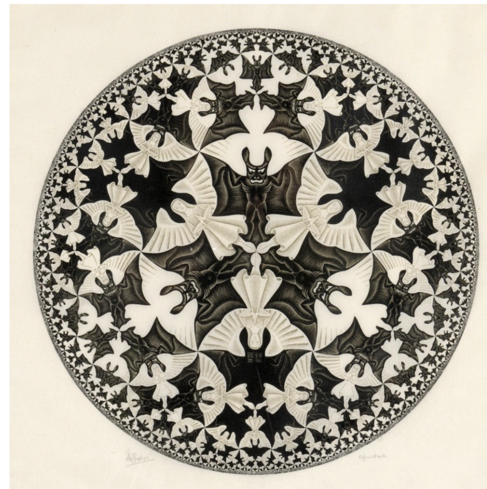
Sin embargo, ésta geometría ya se había empezado a estudiar en abstracto como sistema axiomático, o como geometría sintética, en la mejor tradición de Euclides. En este terreno, hay que destacar los trabajos independientes y casi simultáneos de János Bolyai (hungaro: 1802–1860) y Nikolai Ivanovich Lobachevsky (ruso: 1792–1856). Pero en la comunidad matemática se seguía dudando de la pertinencia de sus estudios, de la *existencia* de esta geometría, pues contradecía al postulado de las paralelas. ¡No correspondía a la realidad! Pontificaban.

Con éste modelo de Beltrami, y otros que viven dentro de la geometría euclidiana –la *geometría oficial*, podríamos decir–, se saldaba una discusión filosófica profunda, apasionada y larga sobre la posibilidad de geometrías donde el postulado de las paralelas no fuera válido: ¡sí existían esas *geometrías no euclidianas*! Acabamos de movernos dentro de una de ellas.

De manera independiente y casi simultánea al trabajo de Beltrami, Felix Klein en su programa de Erlangen que ya mencionamos, también propone este modelo del plano hiperbólico, haciendo énfasis en que vive dentro del plano proyectivo (o Plano Desarguesiano, que pronto definiremos) y en que el grupo de movimientos es una pieza de información fundamental (equivalente, o casi, a dar la métrica, como ya lo intentamos argumentar con varitas de medir). Por esta razón, a este modelo se le conoce como modelo de Beltrami-Klein, o modelo proyectivo y a veces se usa solo el nombre de Klein para él.

Pero hay otros modelos del plano hiperbólico;

y cabe destacar al de Poincaré[2] porque es el que ha tenido más roce social... los artistas lo conocen. En él se basó Escher para su famoso mosaico *Angeles y Demonios*. Este modelo tiene a los mismos puntos que el de Klein, el interior de un círculo –o un disco abierto–, pero las líneas son ahora arcos de círculos que cortan ortogonalmente a la frontera. No segmentos de línea como en el de Klein, por lo que las fórmulas explícitas para la distancia difieren. Pero el modelo de Poincaré tiene el encanto de ser *conforme*, es decir, los ángulos sí corresponden a lo que vemos aunque, por supuesto, no las distancias (todos los ángeles y todos los demonios son, hiperbólicamente, iguales).



[2]Nombre en honor de su autor, el matemático francés Jules Henri Poincaré (1854 –1912).

Capítulo 3

El Espacio Desarguesiano

Regresamos ahora a la perspectiva. Queremos fundamentar matemáticamente a la geometría con la que hemos estado experimentando al explorar las escenas anteriores y que, como muy pronto veremos, corresponde a la forma con que la evolución nos ha diseñado para percibir al mundo.

Primero, hay que tratar de dejar muy claro qué es una proyección, pues este es uno de los conceptos centrales de esta geometría "no métrica". De hecho es lo que le da su nombre, pues una manera común de definir a la geometría proyectiva (aunque es poco descriptiva y, en buena medida, tautológica) es como aquella geometría que es invariante bajo proyecciones. Hemos usado mucho a este término –nos hemos atrevido pues tiene un uso cotidiano muy claro– y hemos visto múltiples ejemplos con las cuadrículas, pero ahora queremos precisarlo.

Con esto claro y trás escudriñar con lupa a la línea del horizonte, nos lanzaremos a presentar la idea genial, y que parte aguas, de Desargues.

3.1. Proyecciones

Un cuadro con buena perspectiva nos hace sentir la tridimensionalidad de una escena pues para reconstruir en la mente al mundo que nos rodea, nuestro sistema o aparato perceptivo usa el mismo *principio de proyección* que adoptaron los pintores renacentistas para pintar sus cuadros.

Proyectar es asociar a cada punto en la escena (llamada también ***dominio*** o ***fuente*** de la proyección), el punto en el ***lienzo*** o ***rango*** de la proyección, en que lo corta la línea que une al punto-fuente con el ***foco*** de la proyección. Es decir, el ***principio de proyección*** es que un punto fuente (en la escena), su punto imagen (en el lienzo) y el foco (el ojo del pintor), siempre están alineados.

Puesto que la luz viaja en líneas, la evolución implementó una muy buena aproximación de este principio en nuestro ojo, cuyo diseño compartimos con todos los animales superiores.

La pupila (el hoyito por el que pasan los rayos de luz) y el cristalino (el pequeño lente que atraviezan) seleccionan a los rayos lumínicos que pasarían por un punto que es el foco de la proyección, y la retina juega el papel del lienzo o rango. Los "puntos", "pixeles" o células de la retina son sensibles a la intensidad y el color del rayo que les pega; mandan esta información al cerebro y éste compagina y procesa las imágenes de los dos ojos para acabar de armar en nuestra mente la idea del mundo tridimensional que nos rodea.

Por supuesto, la cámara fotográfica se basa en este mismo principio de proyección –un sistema óptico que simula al foco y como lienzo una película o detector bidimensional fotosensible– que produce al cuadro ideal al que aspiraban los pintores renacentistas para escenas reales. No es de extrañar que el paradigma de lo que es pintar haya tenido que cambiar tan drásticamente con la aparición de la cámara fotográfica; pues el día de hoy, ya traemos todos en el bolsillo proyecciones perfectas de escenas reales que eran el sueño de los pintores renascentistas. Y efectivamente, hoy reconocemos todos que las fotografías reflejan bien cómo vemos al mundo; que lo representan en dos dimensiones tan realistamente como es posible.

La única diferencia entre una “proyección de pintor” y una de “ojo o cámara fotográfica” está en el orden de los tres elementos involucrados: el lienzo (rango) del pintor está colocado entre el objeto (la fuente) y su ojo (el foco); mientras que la película sensible de la cámara (o la retina) está después del foco en el sentido en el que viaja la luz en las líneas: el foco está entre la fuente y el lienzo.

Sin embargo, en nuestras construcciones de cuadrículas en perspectiva de la Sección 1, nunca hubo consideración alguna sobre la dirección en la que viajaba la luz. Simplemente había puntos en el lienzo, éstos producían líneas ahí; se les trazaba y a veces se les intersectaba para obtener nuevos puntos. Y efectivamente, como veremos en seguida, si se consideran a esas construcciones como provenientes de una proyección, se incluye a ambos casos pues sólo se basan en que

- *las líneas se proyectan en líneas,*

y:

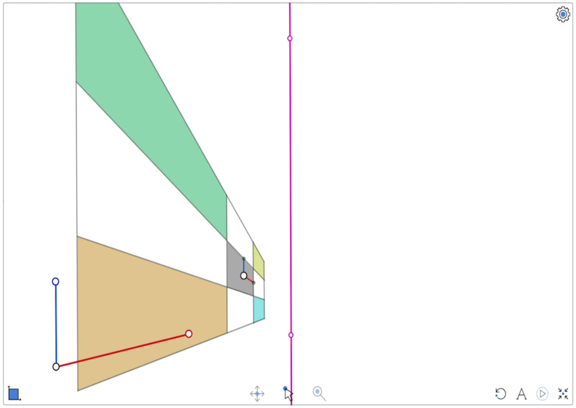
- *con dos de sus puntos se definen.*

3.2. El otro lado del horizonte

Consideremos a una variante de la construcción de movimientos afines determinados por dos vectores y un centro de traslación. Pero ahora tenemos al horizonte vertical en el centro del lienzo y una cuadrícula simple de tres por tres coloreada.

Escena 11. El otro lado del horizonte.

Para fijar ideas y poder referirnos a la figura con fluidez, consideremos a la imagen como el boce- 11.1



to (con perspectiva perfecta) de un edificio largo y chaparro a nuestra izquierda. Que estamos viendo fijo hacia adelante a mitad de su calle, con el lienzo enfrente de nosotros (vertical, a nuestra altura y perpendicular al edificio). Es simple la situación y la fachada, pero suficiente para nuestros fines que son acercarnos con cuidado racional al horizonte y cruzarlo.

Mover poco al centro del edificio, traslada al rectángulo dentro de un plano a nuestra izquierda: llamémos π (leído "*pi*") a ese plano abstracto y fijo a unos pocos metros de nuestra oreja izquierda.

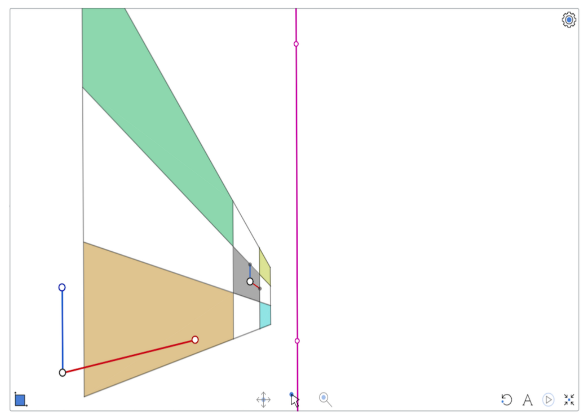
Llevémos ahora al centro del edificio, despacio, al otro lado del horizonte.

Nuestro aparato perceptivo asegura que el edificio se fue, bien alineadito dentro de su plano π y acelerando, hasta esconderse detrás de un punto cerca del horizonte; escondido tras ese punto-pollero saltó la frontera, y luego, regresó tan campante por la otra banqueta para posarse como un edificio gemelo, justo enfrente del original.

Sin embargo, lo que está pasando es bien distinto. Nuestro aparato perceptivo nos quiere obligar a ver lo que –para él y de acuerdo a su experiencia– parece verosímil –¡esa es su chamba!

Repita la operación y observe la posición de los colores. O, más drástico aún, siga moviendo al centro del edificio hacía la derecha hasta que por la izquierda aparezca su esquina delantera: y observe que ahí sí, los colores de arriba y abajo coinciden con el original.

Para explicar (racional y no visualmente) lo que está pasando, regresemos al centro del edificio al

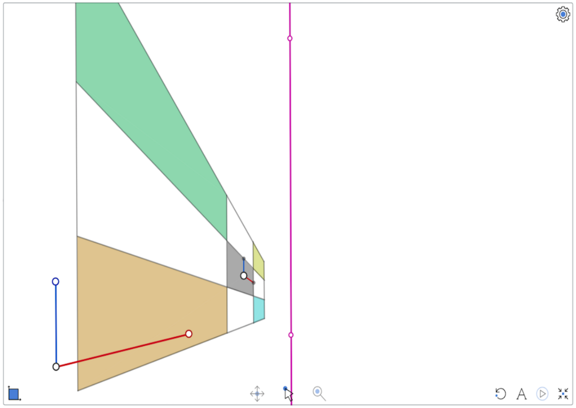


lado izquierdo y sigamos moviéndolo hacia la izquierda (en el lienzo). Esto equivale a trasladar al edificio hacia atrás en su plano π, que sigue impávido a nuestra izquierda y perpendicular al lienzo. Hay un momento en el que algo aparece por el extremo derecho de la pantalla. Es cuando el rectángulo de la fachada ha llegado lo suficientemente atrás para que las líneas que van de él a nuestra cabeza (donde está el foco de la proyección) vuelvan a tocar al lienzo-pantalla. Lo que estamos viendo es la proyección al estilo ojo-cámara (con el lienzo detrás del foco) que enfoca justo hacia atrás de nosotros. Pero entonces lo que se obtiene es el "negativo": lo de arriba, abajo; lo de abajo, arriba y la derecha intercambiada con la izquierda.

En los viejos tiempos de la fotografía por medios físico-químicos, no digitales, en la película fotosensible se imprimía lo que se llamaba el "negativo de la foto"; luego, había que pasar al positivo volviendo a proyectar con una fuente de luz y haciendo un proceso químico equivalente sobre el papel final. Ese proceso de volver a invertir la imagen lo hacen las cámaras de hoy (y nuestro cerebro) con un simple algoritmo.

En resumen, el lado derecho del horizonte corresponde a (es la proyección –tipo cámara– de) la parte trasera del mismo plano π, y por lo tanto, lo que se ve en la pantalla es su negativo; mientras que en el lado izquierdo vemos la clásica proyección tipo pintor.

El punto de control, obligado a vivir en la pantalla, da los centros de rectángulos en π tan al frente de nosotros, o tan atrás de nosotros, como quera-



mos (izquierda o derecha del horizonte y qué tan lejos está el edificio corresponde a qué tan cerca del horizonte esté el punto de control). A donde sí que no se puede llegar es a centros del edificio cerca de la dirección de la oreja izquierda, o en general en direcciones perpendiculares a nuestra vista (recuérdese, ésta se mantiene fija al frente) pues el lienzo (la pantalla) sigue justo enfrente y es chiquito. Ese tipo de puntos en π (muy cerca de nosotros) se proyectan en puntos muy lejanos en el plano-lienzo, al menos, caen fuera del lienzo-pantalla, que ésta muy confinado y acotado; es claramente finito.

Lo que sí hemos logrado en la configuración inicial de esta escena es tener rectángulos que aparecen en ambos lados y la razón es simple: el control que da el largo (o profundidad) de los rectángulos está puesto generosamente (juegue con él). Esto permite que pueden tener la esquina de adelante muy adelante y la de atrás, lo suficientemente atrás, para que, simultaneamente, ambos extremos puedan “salir en la foto”; o, mejor dicho: en la proyección.

La enseñanza clave que queremos sacar de esta escena y su análisis es la siguiente. 11.2

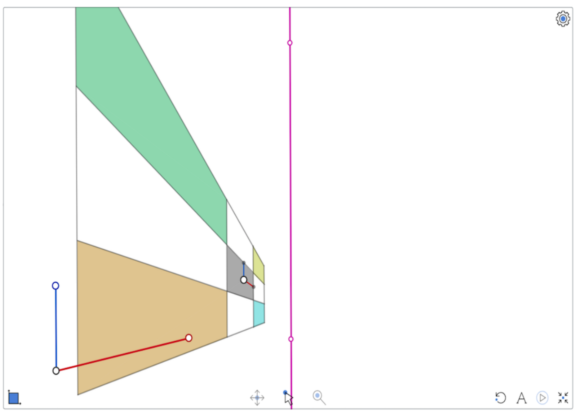
Dada una proyección de un plano π (la fuente) en un plano λ (léase “lambda”, el lienzo), el *horizonte de la proyección* es una línea en el lienzo λ que se asocia visualmente con “el infinito” del plano fuente π; y la proyección de una línea en π se aproxima por ambos lados del horizonte a un punto en él, que es su punto de fuga, los dos lados del horizonte corresponden a los dos extremos de la línea en π.

Dicho de otra manera, a un punto de fuga en el horizonte (en λ) se le puede aproximar visualmente (y de hecho se le llega) por los dos extremos de las líneas (en π) que están en el correspondiente haz de líneas paralelas.

Esc:11↑

Aunque físicamente se pueden diferenciar los dos procesos de proyección (pintor o cámara fotográfica) pues la luz viaja en las líneas con una dirección fija; en nuestras construcciones geométricas este elemento de dirección en las líneas de proyección nunca se tomó en cuenta. Se trazaron líneas en el lienzo, se intersectaron y ¡punto! Se amalgamaron entonces, teóricamente, ambos procesos físicos en un solo ente matemático: la proyección de un plano en otro desde un foco determinado.

Aunque hayamos deducido las construcciones de las cuadrículas en perspectiva pensando siempre en el problema del pintor, éstas abarcan más de lo que se pretendía con ellas: siguen funcionando del otro lado del horizonte; incluyen a la cámara, y más aún, compaginan geométricamente a ambos casos. Este fenómeno es recurrente en matemáticas. Alguna construcción o proceso diseñado para un problema específico: funciona, es aplicable o ayuda a entender mucho más de lo que se tenía en mente; sentimos que cobra vida propia.



3.3. Espacio (y Plano) Desarguesianos

Lo que Girard Desargues propone para hacer sentido preciso de lo que las técnicas de la perspectiva indicaban, y que más adelante habría de llamarse Geometría Proyectiva, es ampliar al Plano y al Espacio Euclidianos. Añadirles, en abstracto, nuevos puntos. A estos nuevos puntos que llamaremos *ideales* se les debe situar en el infinito.

Esto último parece causar serios problemas existenciales si se insiste (concientemente o no) en que el Espacio Euclidiano es éste mismo espacio en el que vivimos y entonces sentimos que ya no hay lugar para añadir nada más. Pero **NO**: éste en el que vivimos es el Espacio Físico y el otro, el Euclidiano, es una construcción abstracta –cimentada en axiomas– que nos ha ayudado mucho a entender al Espacio Físico, pues surge de nuestra experiencia cotidiana de vivir en él y de nuestro afán por dominarlo –¡que involucra entenderlo!–, pero que está muy, muy lejos de ser el Espacio Físico. En realidad, lo que sí podemos decir de los dos juntos es que si los sobreponemos en pequeña escala se corresponden tan, tan bien que hemos podido llevar a un hombre a la luna. Pero en el mejor de los casos, el Espacio Euclidiano es *"cómo debería de ser"* el Espacio Físico, aunque el teórico es solamente una aproximación o un modelo del real; y por tanto, al teórico se vale y se debe críticarle, y se le puede modificar o, como en el caso de Desargues, simplemente ampliar o extender.

Para cada clase de paralelismo de líneas en el Espacio Euclidiano, Desargues añade un nuevo punto, un ***punto ideal*** por el que pasan todas éstas líneas y que pensamos (sin necesidad de situar con mucha precisión) en el infinito. Justo lo que hemos visto en lontananza de los planos: que cualquier conjunto de líneas paralelas en ese plano concurre en un punto de su línea horizonte y que además, cualquier otra línea paralela –aunque ya no esté en ese mismo plano– también se ve que va a pasar por ahí.

Se les da identidad propia a los puntos de fuga más allá de su aparición utilísima en los lienzos. Puesto que ya aparecen como proyección en los dibujos, Desargues se atreve a conferirles existencia abstracta previa (antes de proyectarlos y fuera del lienzo), para incorporarlos así a la teoría.

En consecuencia, *a cada línea euclidiana hay que añadirle un nuevo punto ideal*: el correspondiente a su clase de paralelismo y se llega a él, continuamente, por ambos extremos de la línea (que es lo que se observa en las proyecciones).

Y como el elemento neurálgico y báscio de la geometría son las líneas, también se tiene que extender a este concepto:

Se decreta que *los puntos ideales que corresponden a las líneas en un plano dado forman una nueva línea* (en el infinito, y que se ve como su horizonte). Cuando lo proyectemos, pensamos que la línea-horizonte de la proyección es la imagen de sus puntos ideales. Es decir, los puntos ideales en el espacio abstracto se proyectan en los puntos de fuga correspondientes en los lienzos.

Y se deduce entonces que todos los planos paralelos al plano dado, también contienen a esa línea. (De nuevo, lo que ya habíamos observado: planos paralelos comparten horizonte.) Y por último, tenemos que introducir, o incorporar, a *un nuevo plano en el infinito formado por todos los puntos ideales*.

Hemos definido al ***Espacio Desarguesiano***: a sus puntos, a sus líneas y a sus planos.

Por un ratito más, estamos obligados a considerarlo como si tuviera dos clases de puntos: los euclidianos y los ideales. Pero en cuanto veámos que cumplen reglas democráticas (todos las mismas) los podremos tratar sin xenofobias o discriminación de origen (en este caso, quién los concibió ¿Euclides o Desargues?).

Veremos ahora que en el Espacio Desarguesiano se cumple la propiedad básica y primordial de la geometría desde Euclides:

- *Por cualquier par de puntos pasa una única línea.*

Si los dos puntos son euclidianos, la línea es la euclidiana correspondiente (con todo y su flamante punto ideal).

Si un punto es euclidiano y el otro ideal, la línea es la de la clase de paralelismo que indica el punto ideal y que pasa por el punto euclidiano (única según el quinto postulado).

Si los dos puntos son ideales: tómese cualquier punto euclidiano; por él pasan líneas que van a los dos ideales; estas líneas generan un plano pues se intersectan, y ese plano define en el infinito a la línea de puntos ideales que los contiene. □

Desargues se adelanta a su tiempo en la osadía de definir entes abstractos y le pega justo al clavo de la perspectiva; de la geometría de cómo vemos al mundo. Tan es así que todos los dibujos y construcciones que hemos presentado aquí, así como las imágenes de la bouyante industria de la animación por computadora, se basan en su concepción de cómo extender a la geometría euclidiana para que las proyecciones se comporten con la elegancia y precisión matemática que les corresponde. Pues en el Espacio Desarguesiano, como pronto veremos con cuidado, la proyección de un plano en otro ya es uno a uno, se vuelve una correspondecia biunívoca; lo que antes era una línea en el lienzo pero no en la fuente, el celebérrimo y multicitado horizonte, que ha sido la línea heroina de todas nuestras construcciones, es ahora la imagen de la nueva línea al infinito (la que ésta formada por los puntos ideales de líneas en ese plano fuente). Y al verla y trabajarla en los dibujos, debe quedar claro que es una línea que se comporta como cualquier otra.

Por diversas razones que, como autores, no nos atrevemos a enlistar, ésta geometría y éste espacio han sido difíciles de asimilar. Pero si usted, amable lector, está leyendo esto y jugó con la dinámica de algunas de las escenas anteriores, ya no es tan fácil decir que no es natural pues ya experimentó con él. Todas las construcciones están en el ***Plano Desarguesiano***, esto es, cualquier plano del Espacio Desarguesiano con su línea al infinito hecha de puntos ideales. Sin él simplemente no funcionan; nunca nos preguntamos si dos líneas que queríamos intersectar eran paralelas o no. De haber tenido ese prurito, hubiéramos tenido que avanzar a tropezones insufribles. Así que ya tiene vivencias de cómo se comporta el Plano Desarguesiano. Y sabe bien que en pequeñas porciones, es igualito al Euclidiano; en donde difieren es lejos de la pantalla y en su globalidad.

Pero los añadidos de Desargues sí implican una fuerte ruptura con la geometría euclidiana clásica y sobretodo en el tema del paralelismo. En el Plano Desarguesiano se elimina de tajo esa suerte de compadrazgo:

- *Cualquier par de rectas en un plano se intersectan en un punto.*

Si vienen de líneas euclidianas y éstas se intersectaban: ahí ésta ya el punto. Y si no se tocaban es que eran paralelas, pero entonces, ahora comparten su punto ideal.

Si una es la del infinito, la otra es euclidiana y comparten un punto ideal. □

Dentro de un Plano Desarguesiano se logra una democracia total: *cualesquiera dos puntos generan una línea y cualesquiera dos líneas se cortan en un punto*. Este simple hecho, como observación abstracta y lógica empieza un nuevo coqueteo con una simetría que, con el tiempo, acabó por llamarse "**dualidad**": hay puntos y hay líneas relacionados por algo que hemos llamado "incidencia" para que se pueda aplicar en dos sentidos –un punto incide ("está") en una línea si y sólo si esa línea incide en el punto (lo contiene); y hay dos operaciones "generar" o "trazar" –dícese de la línea que pasa por (o incide en) dos puntos–, y la de "cortar" o "intersectar" que de dos líneas siempre produce un punto (el que incide en ambas). A este nuevo fenómeno de *dualidad* que aparece en el Plano Desarguesiano, habremos de manejarlo con cuidado. A los matemáticos les llevó siglos familiarizarse con él, pero debemos mantenerlo presente pues devino en algo importante y profundo.

Y, regresando al Espacio Desarguesiano (de 3 dimensiones), también ahí se termina con los casos especiales; ya no hay paralelismo. Demostremos que:

- *Dos planos distintos se intersectan en una línea.*

Si uno de ellos es el del infinito, el otro es euclidiano y determina una línea de puntos ideales que es la intersección.

Si los dos son euclidianos y no son paralelos, sabemos desde Euclides que se cortan en una línea; y si sí son paralelos, comparten ahora una línea en el infinito. □

Y también tenemos que:

- *Un plano y una línea no contenida en él se cortan en un punto.*

Dejamos de ejercicio argumentarlo con detalle como en los casos anteriores.

Así que en el Espacio Desarguesiano no hay paralelismo. Y no es que se le haya eliminado sin piedad. Se le cambió por el concepto mas flexible (y mundano) de irse a tocar en un cierto lugar; los paralelos euclidianos son los que ahora se tocan en el infinito.

Por último, demostramos que en el Espacio Desarguesiano:

- *Una proyección de un plano en otro plano es una* biyección,

donde *biyección* es una correspondencia biunívoca o uno-a-uno (1-1).

Consideremos dos planos, π como fuente y λ como lienzo, y un punto F (fuera de ellos) como foco. La proyección de π en λ es una función que a un punto $X \in \pi$ (recuérdese, se leé "X en π"), le asocia la intersección de su línea al foco, XF, con el lienzo λ. Si le ponemos nombre a la función, digamos que ρ (léase "rho"), podemos expresar esto simbólicamente como

$$\begin{aligned} \rho : \pi &\longrightarrow \lambda \\ X &\mapsto (XF) \cap \lambda , \end{aligned}$$

(esta notación especifica en la primera línea, que ρ es una función con *dominio* o fuente π y rango o *codominio* λ; y en la segunda línea da la *regla de correspondencia*: a un elemento X —del dominio, se sobreentiende— ρ le asocia o lo manda en $(XF) \cap \lambda$ —que debe ser un elemento del codominio. En los términos funcionales que se usan en el cálculo, esta regla se escribiría $\rho(X) = (XF) \cap \lambda$.)

Esta función está bien definida pues cualquier línea (en este caso XF) intersecta a cualquier plano (en este caso λ). Obsérvese que en el Espacio Euclidiano, esta función ni siquiera está bien definida, pues quisiera mandar a ciertos puntos al infinito (cuando la línea por el foco es paralela al plano del lienzo).

Que una función sea biyección, equivale a que tenga una función inversa. Y en nuestro caso, la función inversa, que va de λ a π es la proyección desde el mismo foco F. Pues se tiene que $X \in \pi$ corresponde a $Y \in \lambda$ si y sólo si X, Y y F están alineados (F no distingue a X de Y). Por tanto, es una biyección como queríamos demostrar. $\square$

3.4. Cubo en perspectiva

Hasta aquí, solo hemos proyectado planos en planos. Todas nuestras construcciones se refieren a planos; aunque, por supuesto, hemos supuesto que éstos viven en el espacio. Queremos ver ahora que la extensión del Espacio Euclidiano al Desarguesiano se vuelve muy útil para hablar con precisión de cómo vemos al mundo, de las técnicas de la perspectiva para la pintura o de la representación plana del espacio mediante proyecciones.

Observemos primero que al fijar un lienzo λ (que es un plano) y un punto F fuera de él, que será el foco (el ojo del pintor o del obsevador), se puede extender la *función proyección* a casí todo el espacio.

Denotemos al Espacio Desarguesiano como $\mathbb{D}^3$ —el exponente 3 es por la dimensión y se lee "Dé tres"— y análogamente, denotaremos al Espacio Euclidiano $\mathbb{E}^3$ como es usual.

Para cualquier punto $X \in \mathbb{D}^3$ que no sea el mismo F, se puede trazar la línea a F e intersectar a esta línea con el lienzo λ. Esto nos da una *proyección* que es la función

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{D}^3 \setminus F &\to \lambda \\ X &\mapsto (XF) \cap \lambda\,, \end{aligned}$$

donde el símbolo $\setminus$ es *"menos"* a nivel de conjuntos ($\mathbb{D}^3 \setminus F$ se leé "Dé-tres menos eFe" y significa "todos los puntos menos eFe"), cuya regla de correspondencia es la misma que para planos; extiende a la proyección de un plano a otro lo más posible. Un cuadro o una escena en perspectiva es el resultado de usar a está función de proyección sobre algún subconjunto del dominio (los puntos que dan su color o textura a la imagen).

El punto clave que ha hecho que todas nuestras construcciones tengan sentido es que:

- *Una proyección manda líneas fuera del foco en líneas (en el lienzo).*

Efectivamente, una línea ℓ que no pasa por F tiene como imagen de la proyección ρ a la intersección del plano que generan (o que pasa por) la línea ℓ y el foco F, con el lienzo λ; simbólicamente (y pronto mejoraremos nuestra notación), debíamos escribir algo como

$$\ell \quad \text{se proyecta en} \quad (\ell \vee F) \cap \lambda\,,$$

donde $\vee$ es un símbolo para "el plano que generan". Así que si conocemos a dos puntos en el lienzo que están en la imagen de ℓ, ya sabemos a dónde va todo ℓ: a la línea que definen en λ; esto fue lo que se usó una y otra y otra vez. $\square$

El caso faltante de una línea, ℓ, es cuando sí pasa por el foco F, cuando incide en F, y es un caso muy importante. Todos sus puntos (distintos de F) se dibujan, se proyectan, en el mismo punto del lienzo: en la intersección de ℓ con λ; y *no se distinguen desde* F. Pero este punto en el lienzo se convierte entonces en el ***punto de fuga*** de la clase de paralelismo de ℓ; pues, como también es la imagen bajo la proyección ρ del punto ideal (que está en ℓ) de esa clase de paralelismo: por ahí tiene que pasar la imagen de cualquier línea paralela a ℓ.

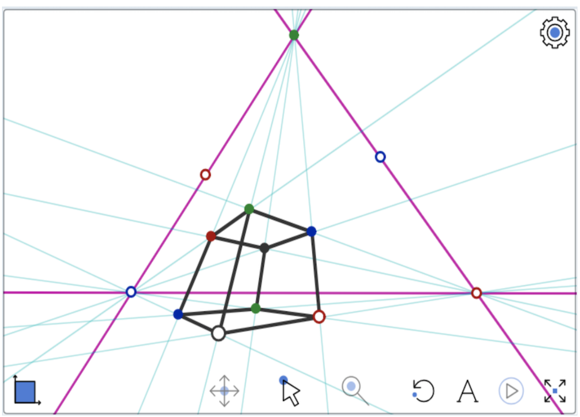
Ahora queremos usar lo que hemos aprendido y definido para proyectar a un cubo solido virtual: algo de tres dimensiones. Vamos a dibujar con buena perspectiva a lo que llamaremos un *cubo*, aunque estrictamente hablando sea una caja o un paralelepípedo (no queremos discutir tamaños o ángulos). Supondremos que el cubo está en el Espacio Euclidiano, $\mathbb{E}^3$, y algunos de los puntos ideales, que introdujo Desargues ($\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{E}^3$) intervendrán para ayudarnos a dibujarlo, con lo que se puede llamar "la técnica de perspectiva renascentista".

Escogimos a un cubo pues sus aristas y sus caras tienen relaciones de paralelismo muy nítidas y distintivas del espacio tridimensional. Sus 12 aristas se agrupan en tres cuartetas de segmentos paralelos y entonces, las líneas que generan determinan a tres puntos ideales, que se proyectan en los de las "perspectivas de tres puntos de fuga ". Además, las líneas por esos tres puntos serán los horizontes de las caras por parejas opuestas.

Escena 12. Cubo en Perspectiva.

Empezamos con ese triángulo (que vive en el plano al infinito ($\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{E}^3$) pero que se proyecta bi- 12.1
yectivamente al lienzo y de él surge el andamio

constructivo auxiliar). Lo hemos definido con los dos puntos de fuga horizontales (de los ejes x y y, podríamos decir), y —para poder mover lejos al tercer punto de fuga (el del eje z) y no tenerlo confinado a vivir en la pantalla— hemos definido a las líneas horizonte de los dos tipos de planos verticales con sendos puntos libres a los que asignaremos el papel de *infinitos diagonales*. Además, necesitamos un punto como esquina del cubo, que llamaremos *origen* (a éste sí lo pensaremos como la proyección de un punto euclidiano, el primero pues los demás han sido ideales), y necesitamos un segundo punto euclidiano en la dirección de uno de los ejes, para controlar con él al tamaño del cubo. 12.2



Trazos al infinito diagonal y al vertical nos dan una nueva esquina, o vértice, del cubo. Y con él, 12.3
trazando a los puntos de fuga correspondientes, podemos construir la primera cara. 12.4

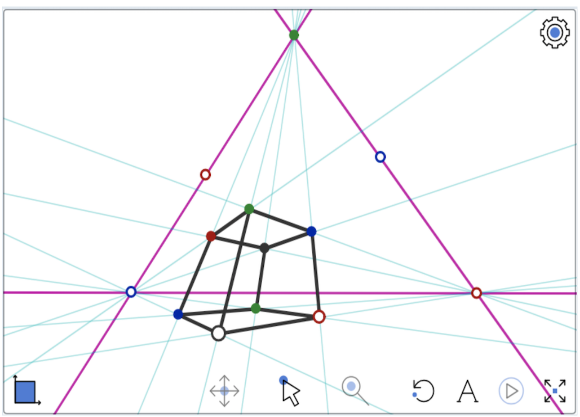
Puesto que ya tenemos uno de sus lados, usando al otro infinito diagonal construimos de manera análoga a la segunda cara vertical. 12.5

De aquí, ya se pueden construir como siempre las dos caras horizontales. Y, como por arte de ma- 12.6
gia, la arista vertical faltante se alínea con su punto de fuga.

Pero no es magia, pues hemos construido al cubo usando que cada cara es paralela a su opuesta.

Es interesante jugar con esta figura. Además, es ilustrativo de cómo vemos al mundo, pues se puede lograr, en principio, a cualquier vista de cualquier paralelepípedo. Se lo dejamos como tarea formativa y lúdica al lector: por ejemplo, ver la esquina de un edificio o de un ring de boxeo visto desde arriba (hay que pasar al infinito vertical, o del eje-z, a que esté abajo); cambiar las proporciones con los infinitos diagonales; pasarse de las líneas-horizonte, etc.

A partir de la figura que tenemos ahora (si se le movió, quizá convenga recargarla para tenerla en la posición inicial mientras hablamos de ella), podríamos construir cuadrículas en los tres planos básicos que compaginarían bien para "cubicular" al espacio y así poder situar con precisión a cualquier objeto en la escena tridimensional respecto al cubo. Pero preferimos observar algo simple y elegante que después nos será útil. 12.7



Los tres puntos ideales de las diagonales de las caras (sólo nos faltaba definir a uno) tienen una propiedad muy especial que llamaremos ser una *configuración de Ceva* (pues hay que asociarla al nombre del matemático italiano Giovani Ceva (1647-1734) por la hipótesis de su famoso teorema –cuya conclusión, ahorita no viene al caso). 12.8

A saber, ser una ***configuración de Ceva*** consiste de *tres puntos en los tres lados de un triángulo cuyas líneas al vértice opuesto son concurrentes*.

La razón de ser de este hecho, surge de observar que las líneas descritas (de un infinito diagonal al vértice opuesto en el triángulo de horizontes) son los horizontes de los planos diagonales que cortan al cubo en dos mitades simétricas: 12.9

hay un plano rojo, 12.10

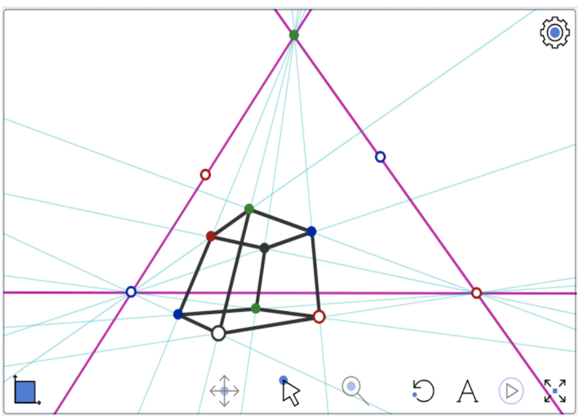
otro pintado de verde 12.11

y el tercero es azul. 12.12

Estos tres planos comparten a la "tri-diagonal": la línea (gris) que va del origen al vértice opuesto.

Por tanto su punto de fuga tiene que estar en sus tres horizontes: es el punto deseado (el de Ceva); este mismo argumento se pudo haber hecho con los puntos y líneas ideales, en el infinito, en vez de aquí en el lienzo con puntos de fuga y horizontes, pues como hemos demostrado, la proyección del plano al infinito en el lienzo es una biyección que preserva líneas.

12.13 Y ya que estamos aquí, observemos que las otras diagonales de las tres caras del cubo en el origen están en un plano (el amarillo); así que sus puntos de fuga están alineados en su horizonte. Esto es lo que debe llamarse una ***configuración de Menelao***, asociada al nombre del matemático griego Menelao de Alejandría (70-140), pues es justo la hipótesis de su célebre teorema —tres puntos en los lados de un triángulo que están alineados. Esc:12↑



Ésta escena, o más bien dicho, el fenómeno que está ocurriendo —atrás, en el plano al infinito— lo volveremos a ver con cuidado y más formalidad en el siguiente capítulo. Falta tener bien definido el concepto de armonía, que en este caso, es el que relaciona a ambas ternas, la de Ceva y la de Menelao. Por el momento, que quede como muestra del tipo de resultados matemáticos a los que se puede aspirar en la geometría que arrancó Desargues; de hecho, su Teorema será un ingrediente protagónico en la demostración.

Ejercicio. Conociendo al punto de fuga (o ideal) de la tridiagonal del cubo, ¿se podrá construir directamente (sin usar los otros puntos diagonales infinitos) al cubo que le sigue en esa línea?

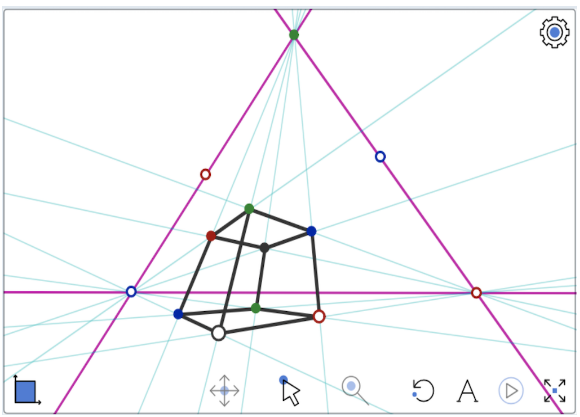
EJERCICIO. Haz la construcción de un cubo en perspectiva empezando con su vértice origen, sus tres aristas adyacentes (uno en cada dirección) y dos líneas horizonte de sus caras.

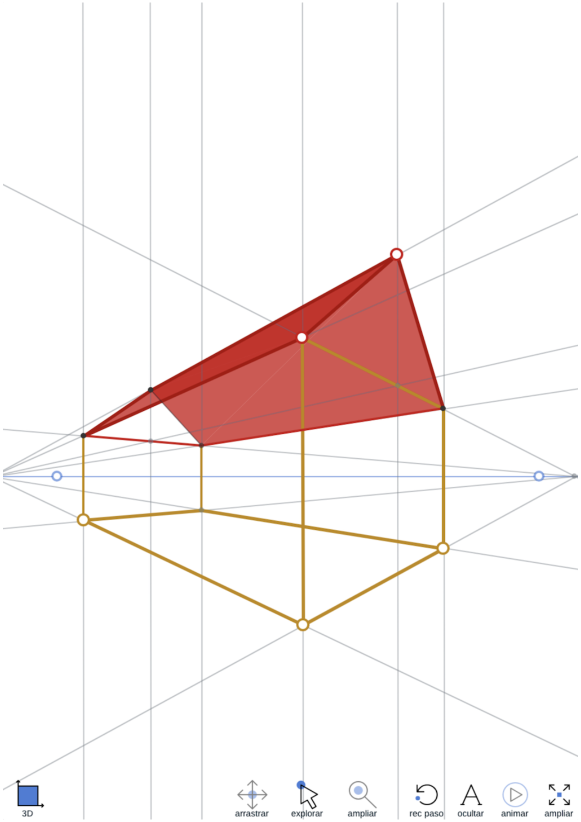
Escena 13. Casita.

13.1 Concluimos esta sección con una construcción de una casita en perspectiva que es una variante muy usada de la construcción anterior.

La línea horizonte (del piso) está fija. Los dos puntos de fuga en ella se controlan con la *planta* de la casita (tres puntos) y el punto de fuga de la dirección vertical se fija en este caso en el infinito; en el punto ideal del plano desarguesiano del lienzo que corresponde a la dirección vertical del espacio (se supone que el lienzo es vertical), así que todas las verticales deben dibujarse paralelas (y en este caso son perpendiculares al horizonte).

Lo que quedará claro en el capítulo siguiente es cómo se escogió al punto medio de un segmento para subir ahí al techo (es buen momento para pensarlo por sí mismo pues conduce a la armonía). Esc:13↑




3D
arrastrar
explorar
ampliar
rec paso
ocultar
animar
ampliar

Capítulo 4

Historía de la Geometría Proyectiva

Parte II

Formalización

Capítulo 5

Axiomas

Una de las aportaciones más valiosas de la matemática griega fue el método axiomático-deductivo: a partir de unos axiomas que se aceptan como válidos, se deducen otras afirmaciones, llamadas teoremas, y poco a poco se conforma una teoría.

El ejemplo emblemático es la Geometría Euclidiana. Los cinco postulados de Euclides fundamentaron a la primera teoría científica exitosa (en el sentido de modelar y poder predecir con impresionante precisión a la realidad en el ámbito métrico inmediato). *Los Elementos* de Euclides (325-265 ac, aprox.) es la referencia para esta teoría; es un compendio de libros que fue lectura obligada de la gente culta casi hasta la fecha y fue un ejemplo paradigmático para lo que hoy llamamos ciencia.

Aunque los postulados de Euclides se refieren al plano que es un objeto abstracto, la teoría se extiende al espacio tridimensional sin que esté claro, o bien determinado, cómo se extiende el sistema axiomático para incluir al espacio de tres dimensiones. Sin embargo, es un hecho que la idea del Espacio Euclidiano y sus propiedades básicas están perfectamente aceptadas y socializadas desde

Euclides y la matemática griega, pues es muy fácil confundirlo con el espacio físico que nos rodea. En el presente libro, hemos llegado hasta aquí basados en esa teoría, que es exactamente la misma que conocían bien y usaban tanto Euclides como Desargues y los pintores renascentistas.

Que los axiomas para la Geometría Euclidiana tridimensional no estén estandarizados, tampoco es relevante históricamente, pues la axiomática euclidiana de la geometría pasó a un segundo plano (teórico, mas no didáctico) con el surgimiento de la geometría analítica (recuérdese, Rene Descartes su autor, es contemporáneo y paisano de Desargues). En cuanto se demuestra que hacer geometría en el plano euclidiano es equivalente a trabajar con parejas de números reales, la responsabilidad del método deductivo se transfiere al sistema axiomático que define a los números reales, pues con ellos se puede modelar al Plano Euclidiano y a la geometría clásica. Pero entonces, con ternas de números reales se modela al Espacio Euclidiano... y ¿por qué pararse en tres? Con n-adas de números reales se modela a lo que ahora llamamos el Espacio Euclidiano de dimensión n, aunque Euclides ni haya soñado en su posibilidad.

Hemos definido al Espacio Desarguesiano con base en el Espacio Euclidiano clásico o sintético (sin coordenadas), como la extensión de él que da sentido matemático formal a la perspectiva. Pero cobra vida propia: las escenas dinámicas que hemos visto lo indican, y se entreve una coherencia y elegancia teórica que invita a su exploración. Veremos ahora, para concluir con este capítulo de presentación, que con cuatro axiomas muy simples, inspirados en los postulados de Euclides, se puede capturar la escencia de esta nueva geometría, que además, como observó Klein y ya vislumbramos, incluirá a las otras geometrías –tanto a la clásica Euclidiana como a las no euclidianas. Al definir a la *Geometría Proyectiva* en términos axiomáticos se logra esa homogeneidad que queríamos; ya no habrá distintos tipos de puntos, todos son iguales pues cumplen y están sujetos a las mismas reglas. Pero entonces, la argumentación se debe basar en los axiomas y hay que hacer un trabajo de reconstrucción: demostrar en este nuevo contexto general lo poco que, formalmente, ya sabíamos (lo vivido, nadie lo quita).

Uno de los ingredientes distintivos de la axiomática que presentamos es que la tercera dimensión queda integrada desde un principio. Además, será una idea central en las primeras demostraciones fundamentales (las de los Teoremas Armónico y de Desargues en el Capítulo 2).

A la larga, en el Capítulo **??**, veremos que estos cuatro axiomas conducen a una “aritmetización” de la geometría, las líneas no pueden ser cualquier conjunto: la geometría les impone una estructura algebraica. Aquí, los axiomas de los campos numéricos se convierten en teoremas, y esa profunda intuición griega de que la geometría está en el meollo de lo que se puede entender,[1] reafirma su relevancia.

[1] La palabra *Matemática* significaba para los antiguos griegos: “lo que se debe enseñar porque se puede entender”.

5.1. El Primer Axioma (puntos y líneas)

El Primer Postulado de Euclides, “por dos puntos pasa una línea única”, seguirá siendo nuestro axioma básico. Además, como énfasis a su importancia histórica y a su profundidad teórica, lo usamos para darle un sentido formal a la palabra “geometría”.

En *Los Elementos* se precisa, con el Segundo Postulado, que “las líneas se extienden tanto como uno quiera en ambas direcciones”. Lo cual hace pensar que la idea de línea ha cambiado de entonces a la fecha. Quizá sea por la influencia de la geometría analítica. Pero ahora ya no sentimos la necesidad de aclarar o especificar —por supuesto, pensamos, es infinita en las dos direcciones; esa es la idea contemporánea de línea. Es posible que para los griegos la idea de línea sea más cercana a lo que ahora entendemos como segmento. Sin embargo, algo de razón tenía Euclides: no es tan evidente qué es lo que pasa fuera de un segmento o, en nuestras condiciones actuales, fuera de la pantalla; pues en el caso del Espacio Desarguesiano lo de las dos direcciones tampoco es muy claro globalmente. Así que mejor lo dejamos así y lo hacemos preciso con una definición formal.

Definición. Una ***Geometría*** consta de un conjunto a cuyos elementos les llamamos ***puntos***, junto con una familia de subconjuntos distinguidos llamados sus ***líneas*** que cumple:

> **Axioma I.** *Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una única línea.*

El concepto de línea, y a veces usamos *recta* como sinónimo, se reduce a ser un conjunto de puntos sin ninguna atribución mágica respecto a distancias o tiempos —conceptos externos a una geometría como la estamos definiendo. Las líneas tampoco tienen definido eso de sus "extremos" o "direcciones"; su poder va a radicar exclusivamente en sus propiedades de *incidencia*. Donde decimos que un punto ***incide*** en una línea si es elemento de ella y al revés, que una línea ***incide*** en un punto si lo contiene y en este caso, también decimos que *pasa* por él, como en el enunciado.

En ocaciones, ampliaremos el significado de los términos para decir que dos líneas *inciden* si hay un punto que incide en ambas, y también diremos que se *cortan* o *intersectan* (es decir, las usamos como abreviación de la frase *"tienen intersección no vacía"*).

Resulta ser una afortunada coincidencia linguística (o bien, un acierto de la terminología matemática), como señala Stillwell en [ref??], que converjan las dos acepciones de *coincidencia*. Por un lado, con el significado técnico que acabamos de precisar, que tres puntos sean *colineales* significa que *inciden* en una misma recta (*co-inciden*), y eso resulta ser una *coincidencia* en la acepción común de la palabra, pues por lo general formarían un triángulo y generarían tres rectas. Y por el otro lado, que tres (o más) líneas sean *concurrentes* significa que *inciden* en un mismo punto; es una *co-incidencia* y también una notable *coincidencia*.

Al Axioma I, se le puede pensar como una *operación* que de una pareja de puntos nos produce a una línea de la geometría. Convendrá tratar a esta operación como tal, y para esto usar una notación pertinente. Como en algún momento ya lo hicimos, usaremos el símbolo $\vee$ que se puede leer "*cuña*", o "la línea generada por", y entonces podemos reescribir al Axioma I de manera más técnica como

Axioma I. *Por dos puntos distintos* A *y* B *pasa una única línea:*

$$A \vee B = B \vee A\,.$$

Debemos remarcar que una implicación muy usada del Axioma I es que:

- *Dos líneas distintas tienen a lo más un punto en común.*

Pues si tuvieran dos, la unicidad en el enunciado del Axioma I, implica que son la misma. Algunos autores prefieren enunciar este hecho como otro axioma, pero con añadir la palabra *única* se hace innecesario.

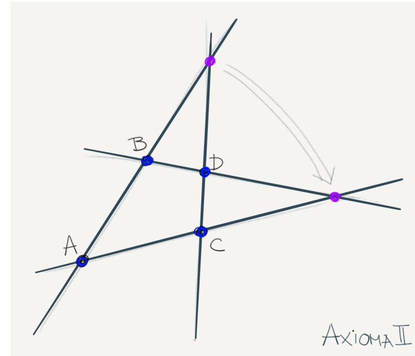
Por último, debemos señalar que para efecto de las construcciones, el Axioma I está representado en la herramienta "Punto/Línea". Al picar en la pantalla con esa herramienta activa, se define un punto y al arrastrar de un punto a otro se define una línea: la que el Axioma I prevé para los dos puntos dados.

5.2. Segundo Axioma (intersección de líneas)

Los postulados tercero y cuarto de Euclides se refieren a círculos y perpendicularidad de líneas. Son justo con lo que no nos queremos involucrar. La gran diferencia con la Geometría Euclidiana es que aquí no hay concepto de distancia ni de ángulo –como medida. Esas nociones o sus equivalentes no serán únicas o parte del sistema de axiomas sino que, en su momento, se construyen y se escogen entre muchas posibilidades.

Por último está el Quinto Postulado, el famoso de las paralelas. Tiene varias maneras de enunciarse que son equivalentes. La original se refiere a cuándo y dónde (en qué dirección) se van a cortar dos líneas. No queremos entrar en detalle, sino señalar que es una afirmación sobre cuándo dos líneas se cortan o intersectan. El axioma proyectivo correspondiente es más fácil de enunciar pues lo que pretende establecer es que todas las líneas en un plano se tocan. Sin embargo, el concepto de *plano* aún no está definido formalmente en el sistema axiomático, así que se le da la vuelta a ese hecho con incidencia como sigue.

Axioma II. *Dados cuatro puntos distintos* A, B, C, D, *si las líneas* $A \vee B$ *y* $C \vee D$ *inciden en un punto, entonces también las líneas* $A \vee C$ *y* $B \vee D$ *inciden en un punto.*



Primero hay que notar que el Axioma II no se cumple en la Geometría Euclidiana; es muy fácil dibujar un contraejemplo moviendo a uno de los puntos A o C para que la línea $A \vee C$ sea paralela a $B \vee D$. Pero es justo el caso en el que los nuevos puntos ideales que añadió Desargues entran en juego. Así que éste es el axioma que marca una gran diferencia entre las geometrías, eliminando al paralelismo; y en el Espacio Desarguesiano se cumple. En cierta manera, y para este caso en que las dos líneas son paralelas, es tan abstracto como el quinto postulado de Euclides, pues habla sobre lo que pasa fuera y muy lejos de la hoja de papel, la pantalla o el pizarrón. Uno asegura que *nunca de los nuncas* se van a tocar, pero entonces nos exige una precisión endiablada en nuestras mediciones; el otro se hace de la vista gorda con lo que pase muy muy lejos, pero declara que sí: que siempre haya un punto en la intersección. Ambos son abstractos; afirman algo que no vemos con precisión.

El Axioma II, que a veces llamamos *de intersección*, produce un punto a partir de una pareja de líneas ($A \vee C$ y $B \vee D$). Más no en cualquier situación. Hay una condición que ingeniosamente pide que estén en un plano, sin que este concepto esté definido formalmente. Pronto veremos que en el caso en que sólo haya un plano (que la geometría sea de dimensión 2) entonces este axioma equivale a que cualquier par de líneas se intersecten y se convierte en el *dual* del **I** (que resa "dos puntos *generan* una línea", y **II**: "dos líneas se *intersectan* en un punto").

En el dibujo está el esquema del caso general del Axioma II. Pero hay dos casos particulares.

Primero, cuando uno de los cuatro puntos está en la recta de los otros dos (y entonces la intersección que se pide como hipótesis es ese punto).

Y segundo, cuando los cuatro puntos (distintos) están en una misma línea.

En estos dos casos, la conclusión del axioma es cierta por simples argumentos conjuntistas (no se necesita establecer pomposamente a un axioma para asegurarlo).

Por último, debemos remarcar que el mismo Axioma II —junto con el Axioma I, por supuesto— determina la existencia de otro punto más. A saber, si cambiamos los nombres de los puntos en una de las líneas de la hipótesis, digamos A y B, obtenemos del mismo Axioma II que las líneas $B \vee C$ y $A \vee D$ también inciden en un punto. Aquí, ésta interviniendo la combinatoria de cuatro puntos distintos. Hay seis posibles parejas y si no hay ninguna terna colineal (lo que se llama *estar en posición general*), generan seis líneas. Hay tres maneras de tomar dos de estas líneas para que no incidan ambas en ninguno de los cuatro puntos (cuando los pares que las definen son ajenos). Entonces, otra forma de enunciar al Axioma II es que esas tres parejas de líneas se cortan (en tres nuevos puntos) o no se corta ninguna (es decir, las seis líneas producen por intersección además de a los cuatro originales a tres puntos más o a ninguno). Esto corresponde a que estén en un plano o no; en el momento en que los cuatro puntos son coplanares y dejan de "ser" un tetraedro en el espacio, aparecen tres puntos nuevos como intersecciones. De aquí, sale el siguiente axioma.

5.3. Axiomas de dimensión y de no trivialidad

Que la Geometría tenga más de dos dimensiones se captura en el siguiente enunciado.

> **Axioma III.** *Existen dos líneas ajenas, es decir, que no se tocan.*

Esto es lo que pasa en el Espacio Desarguesiano y lo que lo hace distinto de cualquiera de sus planos. Lo hereda de que el Axioma III se cumple en nuestro espacio físico inmediato –con la idea euclidiana intuitiva de lo que son las líneas– y captura su no planaridad: hay líneas no paralelas que no se tocan. En cualquier espacio arquitectónico moderno, vemos o intuimos líneas en las intersecciones de los planos que sugieren paredes, pisos y techos, y entre estas líneas se encuentran múltiples ejemplos de parejas no incidentes; por ejemplo, una vertical en alguna pared y una horizontal en la pared de enfrente. Aunque pensemos que se alargan en ambas direcciones indefinidamente, nunca se tocarán, pues su zona de mayor cercanía fue dentro del cuarto.

Ya hemos enunciado los tres axiomas básicos que definen a la geometría proyectiva. Pero hay un ejemplo "bobo" o "mala leche" que es tomar cualquier conjunto y declarar que las líneas son todas sus parejas (sin más nada). Cumple claramente el Axioma I. El II lo cumple por vacuidad (no hay cuatro puntos distintos que satisfagan la hipótesis) y también cumple el III cuando el conjunto tiene al menos cuatro puntos. Pero este ejemplo no califica para ostentar el nombre de "geometría", en donde las líneas deben ser algo más que dos puntos para que se ponga interesante.

> **Axioma NT.** *Cada línea tiene al menos tres puntos.*

Le hemos puesto el nombre NT, de “no trivialidad”, pues es de índole distinta de los axiomas anteriores. Sirve para evitar el ejemplo simplón anterior que tiene interés combinatorio (se le conoce como una *gráfica completa*) pero tiene muy poco interés geométrico.

Y ahora sí, podemos concluir:

Definición. Una ***geometría proyectiva*** consta de un conjunto de ***puntos*** con una familia de subconjuntos distinguidos llamados sus ***líneas*** que cumple los **Axiomas I**, **II**, **III** y **NT**.

Tenemos un ejemplo destacado, el Espacio Desarguesiano cuyo estudio nos ha traido hasta aquí, pero en principio puede haber más geometrías proyectivas y de hecho, como veremos en su momento, las hay.

5.4. Notación, subespacios, operaciones y dimensión

Hasta ahora hemos denotado con letras mayúsculas a los puntos: mantendremos esta tradición. Cuando haya que dar nombre a una línea, usaremos letras minúsculas como $a, b, c, \ldots, \ell, \ldots, x, y, z$. Y a los planos –que aún debemos definir en la nueva generalidad axiomática– los denotaremos con letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$ o bien, π y λ, como ya lo hemos hecho en el Espacio Desarguesiano.

Estos tres tipos de subconjuntos –puntos sólitos donde identificamos A con $\{A\}$, líneas y planos– serán nuestros objetos de trabajo básicos. Para hablar de todos ellos usaremos el término *subespacio*. La propiedad que los caracteriza es:

Definición. Un conjunto de puntos es ***cerrado*** si para cualquier par de puntos en él, se tiene que la línea que definen está totalmente contenida en él; es decir, si es *cerrado* bajo el trazo de líneas. A un subconjunto cerrado se le llama ***subespacio***[2].

La relación de ***incidencia*** entre puntos y líneas se extiende de manera natural a todos los subespacios como la *contención de conjuntos*. Entonces, es natural usar terminología de orden; por ejemplo, ser *menor que* en vez de "estar contenido en". Los subespacios forman un *orden parcial* con un elemento máximo, el total de puntos de la Geometría y un mínimo, el vacio. *Arribita* del vacio, están los puntos que son los subespacios de *dimensión* 0 (son cerrados por vacuidad, no hay parejas a las cuales cuestionar); le siguen las líneas de *dimensión* 1 y pronto veremos que de allí siguen los planos. Como ya dijimos, los subespacios serán nuestros objetos de trabajo básicos y tenemos como herramientas para trabajarlos a dos operaciones en ellos que vienen de los dos primeros axiomas.

Conviene primero definir la operación de ***intersección***, pues es la clásica intersección de conjuntos. Pero que denotaremos con el símbolo $\wedge$, llamado "pico" (pues se parece mucho al símbolo $\cap$ de intersección, pero gráficamente se aparea bien con su símbolo dual: la cuña, $\vee$). La intersección de subespacios es también un subespacio, pues es inmediato ver que la intersección de conjuntos cerrados es cerrada: si dos puntos están en todos los conjuntos a intersectar, y también lo está la línea que generan (por ser cerrados), entonces se tiene que ésta línea tambén está en la intersección. Y obsérvese que como es la intersección, *esta operación es conmutativa y asociativa*.

Así, por ejemplo, $\pi \wedge \ell$ significa la intersección del plano π con la recta ℓ, que vimos que es un punto en el Espacio Desarguesiano —o la propia recta ℓ si $\ell \subset \pi$, i.e., si ℓ esta "contenida" en π. Pero ahora, debemos demostrar este hecho a partir de los axiomas en la nueva generalidad.

La otra operación es de ***generación*** o la operación ***cuña***, que denotamos con el símbolo $\vee$. De dos subespacios nos da al subespacio más chico que contiene a ambos. Se puede pensar en dos pa-

[2]En inglés, para "subespacio" se usa la palabra *flat*, que como adjetivo significa "plano", pues se tiene a la palabra *plane* para lo que nosotros llamaremos *plano*; lástima que en español el adjetivo y el sustantivo son la misma palabra.

sos: primero se toma la unión y luego se le *cierra* o se toma a su *cerradura*; donde, la ***cerradura*** de un conjunto cualquiera es el conjunto cerrado más chico que lo contiene, o bien, es la intersección de todos los cerrados que lo contienen.

Como el primer paso para obtener la cuña, es la unión de conjuntos que *es conmutativa y asociativa, la cuña también lo es*. Es la extensión natural a subespacios de la generación de líneas por parejas de puntos. Así, el generado por una línea y un punto fuera de ella ($\ell \vee A$ con $A \notin \ell$) será un plano; y también el generado por tres puntos no colineales ($A \vee B \vee C$).

Hemos definido a la operación *cerradura* –que de un conjunto nos da otro– de manera muy abstracta, como el "subespacio más chico que lo contiene". Para *cerrar* a un conjunto constructivamente, hay que tomar las líneas por todos sus pares de puntos, luego a las líneas que unen a los nuevos puntos y se sigue uno haciendo esto hasta que ya no sea posible encontrar nada nuevo, trazar líneas y líneas como un niño rayando con un crayón. Pero en los casos que nos interesan, también se le puede definir de manera más concreta y limpia como una unión muy específica de líneas.

Llamaremos ***plano*** al subespacio generado por una línea y un punto fuera de ella.

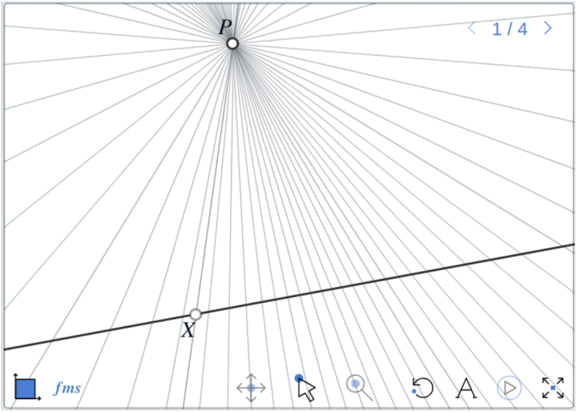
Lema 1 (la cerradura como unión) *Sean ℓ una línea y P un punto fuera de ella. El plano que generan ℓ y P, $\ell \vee P$, es la unión de todas las líneas que van de un punto en ℓ a P; es decir,*

$$\ell \vee P = \bigcup_{X \in \ell} (X \vee P)\,.$$

Escena 14. .

Cerradura Es Union **(Demostración)** La igualdad de 14.1
dos conjuntos se demuestra con dos contenciones. Llamemos $\mathscr{U}$ a la unión de las líneas (el lado derecho de la ecuación).

Que la unión $\mathscr{U}$ esté contenida en $\ell \vee P$ se debe a que cada línea $X \vee P$ con $X \in \ell$ está contenida en $\ell \vee P$ (pues éste conjunto es, por definición, cerrado y contiene a X y a P), así que la unión de todas esas líneas sigue estando contenido en $\ell \vee P$.



Para la otra contención, basta demostrar que $\mathscr{U}$ *es cerrado*. Pues como contiene a ℓ y a P, entonces el cerrado más chico que los contiene, que es $\ell \vee \mathrm{P}$, tiene que estár contenido ahí, en $\mathscr{U}$.

14.2 Para demostrar al lema hay que probar que para dos puntos distintos $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{U}$, se tiene que

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \subset \mathscr{U}\,.$$

14.3 Y esta contención de conjuntos se demuestra considerando a un punto cualquiera $\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ y demostrando que $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$. 14.4

Puesto que A y B están en la unión $\mathscr{U}$, existen $\mathrm{A}', \mathrm{B}' \in \ell$ tales que $\mathrm{A} \in \mathrm{A}' \vee \mathrm{P}$ y $\mathrm{B} \in \mathrm{B}' \vee \mathrm{P}$. Si $\mathrm{A}' = \mathrm{B}'$ entonces $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = \mathrm{A}' \vee \mathrm{P} \subset \mathscr{U}$ y ya acabamos. Suponemos entonces que $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$. 14.5

Como $\mathrm{P} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{A}') \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{B}')$, el Axioma II nos da un punto

$$\mathrm{D} = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A}' \vee \mathrm{B}') = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge \ell\,.$$

Y sin perdida de generalidad, como $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, podemos suponer que $\mathrm{D} \neq \mathrm{A}$. 14.6

Consideremos a $\mathrm{Y} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$; hay que concluir que $\mathrm{Y} \in \mathscr{U}$. Si $\mathrm{Y} = \mathrm{D}$ ya acabamos pues $\mathrm{D} \in \ell \subset \mathscr{U}$. Así que $\mathrm{Y} \neq \mathrm{D}$, de tal manera que $\mathrm{D} \vee \mathrm{Y} = \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$ y otra vez el Axioma II, usando que

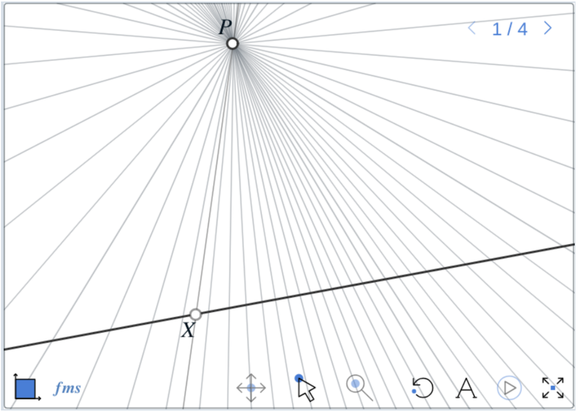
$$\mathrm{A} = (\mathrm{D} \vee \mathrm{Y}) \wedge (\mathrm{A}' \vee \mathrm{P})\,,$$

nos da un punto 14.7

$$\mathrm{Y}' = (\mathrm{D} \vee \mathrm{A}') \wedge (\mathrm{Y} \vee \mathrm{P}) = \ell \wedge (\mathrm{Y} \vee \mathrm{P}) \in \ell\,.$$

Lo cual implica que $\mathrm{Y} \in (\mathrm{Y}' \vee \mathrm{P}) \subset \mathscr{U}$. $\square$

Esc:14↑



Este lema captura la esencia de la geometría proyectiva. El Plano Euclidiano, que tiene paralelas y no cumple el Axioma II, tampoco cumple al lema: dada una línea ℓ y un punto P fuera de ella, la unión de las líneas de P a puntos de ℓ no llena al plano; deja un hueco en la paralela a ℓ por P.

Basados en este lema y su demostración, vamos a reconstruir lo que ya sabíamos del Espacio Desarguesiano. Para ello, probaremos que:

- *Un plano está generado por cualesquiera tres puntos no colineales en él.*

Supongamos que el plano π está generado por una línea ℓ y un punto $P \notin \ell$, es decir, $\pi = \ell \vee P$.

Sean A, B, C puntos no colineales en π. Queremos demostrar que $\pi = A \vee B \vee C$.

La contención $A \vee B \vee C \subset \pi$ se sigue de que los tres puntos están en π, éste es cerrado y el generado a la izquierda es el mínimo tal.

Para la otra contención, con el mismo argumento de cerradura basta probar que $A \vee B \vee C$ contiene a ℓ y a P. Que contiene a ℓ se sigue del primer argumento del lema anterior que, por el Axioma II, da que cualquier línea en π corta a ℓ; al aplicarlo a dos líneas del triángulo ABC, nos da dos puntos de ℓ en $A \vee B \vee C$, y por ser este cerrado, da a la contención de todo ℓ. De aquí, como alguno de los tres puntos no está en ℓ, digamos que A, igual que en el lema se tiene que existe $A' \in \ell$ tal que $P \in A \vee A'$. Y esto ya implica que $P \in A \vee B \vee C$ y por tanto, que

$$\pi = \ell \vee P \subset A \vee B \vee C\,.$$

□

Con esto, se deduce que:

- *Dos líneas son coplanares si y sólo si son concurrentes.*

Consideremos dos líneas $A \vee B$ y $C \vee D$. Si son *coplanares* viven, por definición, en un plano π y debemos ver que tienen un punto en común. Podemos suponer que $C \notin A \vee B$, que implica por la afirmación anterior, que

$$\pi = A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C\,.$$

Entonces $D \in \pi$ nos da, por el Lema 5.4, un punto $X \in A \vee B$ colineal con D y C, que es el que buscábamos ($X \in C \vee D$).

Si dos líneas son concurrentes, una de ellas junto con cualquier punto de la otra que no sea la intersección, generan un plano que las contiene a ambas. □

Ya tenemos que en un plano, cualquier par de líneas se corta en un punto. Así que el Axioma III dice que al haber dos líneas ajenas, ellas no son coplanares y tiene que haber algo más que un plano. Diremos que un plano tiene *dimensión* 2, y entonces el Axioma III implica que la dimensión tiene que ser al menos 3. Los espacios de dimensión 3 se obtienen de los planos de manera análoga a los planos a partir de las líneas pues:

- *La unión de las líneas de puntos de un plano a un punto fuera de él, es cerrada.*

Supongamos que π es un plano y P un punto fuera de él. La afirmación es que el conjunto

$$\mathscr{U} = \bigcup_{X \in \pi} (X \vee P)$$

es cerrado y por tanto un subespacio.

La demostración sigue literalmente a la del Lema 5.4. Pues hay que ver que dados dos puntos A y B en $\mathscr{U}$, la línea que pasa por ellos, $A \vee B$, está contenida en $\mathscr{U}$; y entonces, toda la argumentación se hace dentro del plano $A \vee B \vee P$. A menos que este subespacio sea una línea, pero en este caso, es aún más fácil ver que $A \vee B \subset \mathscr{U}$. □

Así, un espacio de dimensión 3 está generado por cuatro puntos que no son coplanares: tres de ellos dan un plano y el cuarto genera algo nuevo como unión de líneas a él. Y la cosa se puede seguir: un subespacio de dimensión n se obtiene como la unión de rectas desde un subespacio de dimensión $n-1$ a un punto que no está en él; y además, está generado por $n+1$ puntos. Hay una noción de *independencia geométrica* entre los puntos que es que generen tanto como es posible, dada su cantidad, y una buena noción de ***dimensión***: uno menos que el mínimo número de puntos con que se genera (que concuerda con los casos pequeños que habíamos visto). Pero hacer esto con cuidado nos lleva en otra dirección, que tomamos en el Apéndice **??**.

Llamaremos ***espacio proyectivo*** a una geometría proyectiva de dimensión 3, que será *nuestro universo de trabajo de aquí en adelante*, y se tiene que *cualquier cuarteta de puntos que no es coplanar genera al total*. Entonces es fácil demostrar que:

- *Un plano y una línea no contenida en él se intersectan en un punto.*

Sean $\pi = A_0 \vee A_1 \vee A_2$ un plano y $\ell = B_0 \vee B_1$ una línea no contenida en él. (Nótese que esto ya implica que que los tres puntos "A" no son colineales y que los dos "B" no son iguales; que son *gemétricamente independientes*.) Podemos suponer que $B_0 \notin \pi$ (pues si no es así, ya acabamos), entonces $\pi \vee B_0$ ya es todo y, por tanto, contiene a B_1. Entonces, al ver al espacio generado por π y B_0como unión de líneas de π a B_0, existe $X \in \pi$ tal que $B_1 \in X \vee B_0$. Y esto implica que $X = \pi \wedge \ell$. □

Y siguiendo ésta ruta de argumentación:

- *Dos planos distintos se intersectan en una línea.*

Consideremos dos planos $\alpha = A_0 \vee A_1 \vee A_2$ y $\beta = B_0 \vee B_1 \vee B_2$, distintos. Podemos suponer que $B_0 \notin \alpha$. Por la afirmación anterior, tenemos puntos $X_i = \alpha \wedge (B_0 \vee B_i)$ para $i = 1, 2$, que son distintos pues las líneas que los definen se cortan fuera de α (en B_0). Entonces:

$$X_1 \vee X_2 = \alpha \wedge \beta$$

es la línea que buscamos. □

Si la geometría proyectiva tuviera más puntos que un espacio de dimensión 3, en la argumentación anterior podríamos escoger a B_1 fuera de $\alpha \vee B_0$ para obtener dos planos que se intersectan en un punto. Lo cual implica que pedir que la dimensión sea 3 (lo que estaremos llamando un espacio por comodidad) es equivalente a cualquiera de las dos afirmaciones anteriores.

5.5. Proyecciones

Como último paso en la reconstrucción de lo que ya teníamos en el Espacio Desarguesiano, debemos considerar a las *proyecciones* –que son tan relevantes que imponen su nombre a esta geometría–, pero ahora consideradas dentro de la nueva generalidad axiomática.

Dados dos planos α y β (antes eran π y λ, de piso y lienzo) y un punto P fuera de ellos, la ***proyección*** *desde* P (o con *foco* P) de α en β es la función

$$\begin{aligned} \rho_P : \alpha &\to \beta \\ A &\mapsto (A \vee P) \wedge \beta \,, \end{aligned}$$

que está bien definida pues un plano y una línea fuera de él siempre se cortan en un punto. Su función inversa es la proyección desde el mismo P pero ahora de β en α, pues dos puntos $A \in \alpha$ y $B \in \beta$ se corresponden bajo las proyecciones si y sólo si A, B y P están alineados.

Es importante hacer notar que bajo esta argumentación simple (y también bajo el lema de generación del espacio como unión de líneas a un plano), se encuentra agasapado un conjunto muy relevante: el ***haz de líneas por*** P que *es el conjunto de todas las líneas que contienen a* P; denotémoslo $\mathscr{L}_P$. Se puede parametrizar por los puntos de cualquier plano que no pasa por P. Explícitamente, si α es un plano tal que $P \notin \alpha$, las dos operaciones básicas dan dos funciones

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \to & \mathscr{L}_P \\ A & \mapsto & A \vee P \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathscr{L}_P & \to & \alpha \\ \ell & \mapsto & \ell \wedge \alpha \end{array}$$

que claramente son inversas. La proyección de un plano en otro es componer dos biyecciones de este tipo: del plano-fuente al haz por el foco y de éste al plano-rango.

Por supuesto, cuando el ambiente es un plano, se tienen los resultados análogos. Las proyecciones entre dos líneas desde un punto fuera de ellas son biyecciones bien definidas, y los haces de líneas por un punto se parametrizan por cualquier línea fuera de él (en reminiscencia del Lema 5.4, con el que arrancamos nuestro análisis después de las definiciones).

Históricamente, el estudio de estas funciones y de las que se obtienen al componerlas –que se conocen como *proyectividades*– se desarrolló a finales del siglo XVIII y en la primera mitad del XIX. Destacan los trabajos de Monge, Poncelet, Von Staudt y Reye. Nosotros veremos con cuidado este enfoque "funcional" hasta el Capítulo **??**. Lo que impresiona desde la perspectiva histórica con que gozamos ahora, es el avance tan profundo que se logró en la teoría antes de que el concepto de *función* (fuera de las numéricas dadas por fórmulas), e inclusive la noción de *conjunto* se establecieran (por Cantor hacía finales del siglo XIX). La influencia de esta geometría en ese proceso de abstracción debe haber sido considerable, pero lo abigarrado y específico de la notación que se implementó para su desarrollo la alejó de la enseñanza de la matemática elemental en el siglo XX. Entre los conceptos abstractos que se desarrollaron en esa época motivados por esta geometría, destaca el de *dualidad* que describimos en el siguiente apartado.

5.6. Dualidad

Como ya hemos mencionado y puesto que dos líneas son coplanares si y sólo si son concurrentes, cuando se trabaja en un plano proyectivo, el Axioma II, se reemplaza por el más simple:

> **Axioma II (Plano).** *Cualquier par de líneas se corta en un punto.*

Y el Axioma III de dimensión se tiene que modificar también, ahora importa no estar en una línea:

> **Axioma III (Plano).** *Existen tres puntos no colineales.*

Por supuesto, se mantiene el axioma de no trivialidad (el NT) y el básico de las geometrías (el I).

Cuando se tiene un plano proyectivo, surge entonces un nuevo plano proyectivo, aún más abstracto y llamado su ***plano dual***: se toma como conjunto de puntos al conjunto de líneas (piénsese en sus etiquetas, si se prefiere) y como líneas en el plano dual se declaran a los conjuntos de líneas que pasan por un punto, los haces de líneas por un punto (y por supuesto, esto para todos los puntos).

Si denotamos $\mathbb{P}$ a un plano proyectivo, a su plano dual se le denota $\mathbb{P}^*$ (se lee "Pe-estrella"). Demostraremos que

- $\mathbb{P}^*$ *es un plano proyectivo.*

Hay que ver que cumple todos los axiomas. El de trazo de líneas (en $\mathbb{P}^*$) se sigue del de intersección de líneas en $\mathbb{P}$, pues dos puntos en $\mathbb{P}^*$ corresponden a dos líneas en $\mathbb{P}$, y como éstas se cortan en un punto, la línea en $\mathbb{P}^*$ a la que da lugar su haz contiene a las dos dadas: es la línea deseada (aunque nos falta su unicidad).

Dos líneas en $\mathbb{P}^*$ (definidas por puntos en $\mathbb{P}$) se cortan en un punto (su línea en $\mathbb{P}$); como esta es única, se tiene que dos líneas distintas en $\mathbb{P}^*$ no tienen dos puntos distintos en común, lo cual concluye la demostración de que $\mathbb{P}^*$ cumple la unicidad en el Axioma I. Nótese que hemos probado que al incluir la unicidad en cualquiera de los dos primeros axiomas, se obtiene en el otro (y este argumento reivindica a los que prefieren enunciarla como otro axioma). Obsérvese además, que *concurrencia* y *colinearidad* se intercambian: líneas concurrentes en $\mathbb{P}$ corresponden a puntos colineales en $\mathbb{P}^*$ y las líneas correspondientes a puntos colineales en $\mathbb{P}$ son concurrentes en $\mathbb{P}^*$.

El Axioma III (Plano) también se cumple: por este axioma en $\mathbb{P}$ se tienen tres puntos no colineales que corresponden a tres líneas no concurrentes en $\mathbb{P}^*$. Las tres parejas dan por intersección a tres puntos no colineales —esto es el hecho de que da lo mismo definir a un triángulo por sus vértices o por sus lados. Y finalmente, el axioma de no trivialidad también se cumple, pues como acabamos de ver en el apartado anterior hay biyecciones naturales entre líneas en un haz (los puntos de una línea en $\mathbb{P}^*$) y puntos en una línea. $\square$

Esto implica al ***principio de dualidad***, que dice que si demostramos un teorema o hacemos una construcción basada en los axiomas, automáticamente lo estamos demostrando o construyendo también en el dual; esto quiere decir que en el "primal" hay un teorema o una construcción que se obtiene de traducir lo que sucedió en el dual pero con sus objetos correspondientes del primal. Un ejemplo simple es la construcción con cuatro puntos en un plano; si tomamos cuatro puntos en su dual, corresponde a cuatro líneas en el primal: ésta es la construcción dual. Si tres de los cuatro puntos originales cumplen con ser colineales, en la construcción dual tres líneas serán concurrentes. Veremos después ejemplos más interesantes.

Aunque el estudio de los planos proyectivos es muy activo en la actualidad y tiene problemas profundos aún no resueltos, en este libro estamos interesados en los que viven en un espacio (que cumplen el Axioma III de dimensión), pues varias demostraciones importantes usaran a la tercera dimensión. Y como está la cosa, no podemos usar el principio de dualidad en ellos. Tenemos que demostrar algo más. Para esto, llamemos ***expandible*** a un plano proyectivo, $\mathbb{P}$, para el cual existe una geometría proyectiva $\mathbb{G}$ y un plano π de $\mathbb{G}$, tales que $\mathbb{P}$ y π son ***isomorfos*** (esto es, existe una biyección entre sus puntos que manda líneas en líneas). Es decir, $\mathbb{P}$ es expandible, si se puede pensar como, o bien es, un plano en una geometría proyectiva (que cumple el Axioma III).

Para poder usar el principio de dualidad, tenemos que demostrar:

Lema 2 *Si $\mathbb{P}$ es un plano proyectivo expandible, entonces su plano dual $\mathbb{P}^*$ también es expandible.*

La demostración incluye una serie de observaciones, o afirmaciones, interesantes en sí mismas. Tenemos que la hipótesis nos da a una geometría proyectiva $\mathbb{G}$, que podemos suponer que es un espacio de dimensión 3, con un plano π, isomorfo a $\mathbb{P}$. Nótese primero que como cualquier par de planos de $\mathbb{G}$ son isomorfos vía una proyección desde un punto externo a ellos, lo anterior es como decir que $\mathbb{P}$ es un modelo abstracto de los planos en $\mathbb{G}$. Para demostrar al lema, primero es necesario generalizar la idea de dualidad a espacios.

Para una espacio proyectivo (geometría proyectiva de dimensión 3) que seguiremos llamando $\mathbb{G}$, su ***espacio dual*** o ***geometría dual***, $\mathbb{G}^*$, también tiene sentido. Sus puntos son los planos de $\mathbb{G}$. Y las líneas de $\mathbb{G}^*$ corresponden a las líneas de $\mathbb{G}$: como subconjuntos constan de todos los planos que contienen a una línea dada (el *haz de planos por una línea* que podemos pensar como un libro abierto). Así, el Axioma I en $\mathbb{G}^*$ se sigue de que cualquier par de planos en $\mathbb{G}$ se corta en una línea.

Antes de ver en detalle al Axioma II, conviene ver que

- *los* planos *de* $\mathbb{G}^*$*, corresponden a los puntos de* $\mathbb{G}$*.*

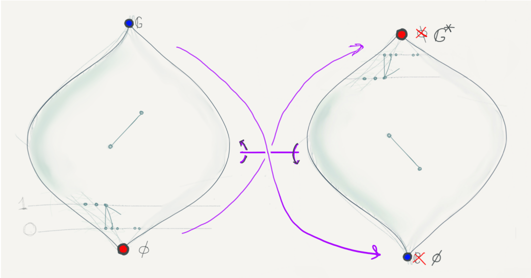
Si consideramos a todos los planos de $\mathbb{G}$ que inciden en un punto P, y denotamos a este conjunto como $P^* \subset \mathbb{G}^*$, es fácil ver que es cerrado. Pues dados dos puntos en él $\alpha^*, \beta^* \in P^* \subset \mathbb{G}^*$, corresponden a planos α y β de $\mathbb{G}$ cuya intersección es una línea que pasa por P y por tanto cualquier plano que la contenga (que representa a un punto de la línea $\alpha^* \vee \beta^* \subset \mathbb{G}^*$) tambien está en P^*. Con esto concluimos la afirmación, pues los planos son los cerrados entre las líneas y el total.

Para ver que el Axioma II se cumple en $\mathbb{G}^*$, considérense cuatro planos distintos en $\mathbb{G}$. En general, constituyen un *tetraedro*: ellos son sus caras; tiene cuatro vértices (en los que se intersectan las ternas), y seis *aristas* (líneas que son la intersección de los pares de caras). Que dos aristas opuestas sean coplanares (que en el dual se corten) equivale a que se intersecten en un punto, P digamos, e implica que los cuatro planos pasan por P (que los cuatro vértices del tetraedro se colapsan en un punto). Por tanto, las seis aristas también pasan por P. Esto implica que cualquier par de esas aristas genera un plano y, por tanto, que las líneas duales en $\mathbb{G}^*$ tienen un punto en común. De aquí, se sigue que el Axioma II vale en $\mathbb{G}^*$.

Y los Axiomas III y NT son inmediatos de corroborar en $\mathbb{G}^*$, así que es una geometría proyectiva.

Nos convendrá tener una imagen geométrica abstracta de lo que está pasando. Una especie de esquema pictórico, que ayude a pensar en esto. En los pizarrones de los cursos donde se habló de órdenes parciales es muy común encontrarse unos *cocoles* o *diamantes* representando a órdenes parciales (y a veces hasta se les da el nombre de *diagrama de Haze*; algo parecido a los *diagramas de Venn*). La idea es muy simple, se dibuja el orden hacía arriba, y no se pretende que el diagrama defina al orden parcial (excepto en casos muy pequeños como el orden parcial de subconjuntos de un conjunto de tres o cuatro elementos), pero al pintar un punto o vértice allí se representa a un elemento y al pintar una arista (¡nunca horizontal!) representa que el elemento de abajo es menor que el que representa el vértice de arriba. En el caso de las geometrías proyectivas, se representa al orden parcial de todos los subespacios bajo contención. Tienen un elemento mínimo, el vacío, y uno máximo, el total (y de ahí la forma de cocol). Y los subespacios se concentran en *pisos* correspondiendo a la dimensión: al vacío hasta abajo se le considera de dimensión -1, en el siguiente piso están los puntos (de dimensión 0), luego vienen las líneas, etcétera... hasta el total.

El asunto es que una geometría proyectiva esta determinada por (en cierta manera "es") su orden parcial y tomar a la geometría dual es simplemente voltearlo al revés. Y como las operaciones pico y cuña se pueden expresar en términos del orden parcial como "el máximo más chico que..." y "el mínimo más grande que...", respectivamente, en el dual también se intercambian.



Tenemos ahora que estudiar dos tipos distinguidos de subordenes parciales.

Dado un plano π de una geometría proyectiva tridimensional $\mathbb{G}$, el orden parcial de π como plano proyectivo, consiste de todos los elementos abajo de π en el orden parcial de $\mathbb{G}$ (incluyéndolo a él como máximo), y lo podemos denotar $\bigwedge^{\pi}$.

De manera dual, para un punto P en $\mathbb{G}$, denotemos por $\bigvee_{\mathrm{P}}$ a la ***visión*** de P: *lo que ve* P *hacía arriba en el orden parcial de* $\mathbb{G}$; es decir, $\bigvee_{\mathrm{P}}$ es el suborden parcial de subespacios mayores o iguales que P que es su mínimo. Veremos que

- *El orden parcial,* $\bigvee_{\mathrm{P}}$ *(lo que ve* P *en* $\mathbb{G}$*) define un plano proyectivo isomorfo al de los planos de* $\mathbb{G}$*.*

Para demostrarlo, consideremos a un plano π que no pase por P. Se tiene entonces que son *complementarios*, es decir:

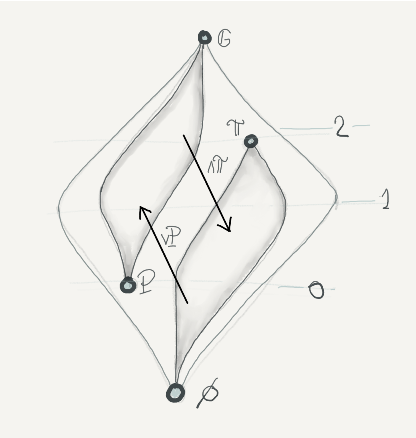
$$\mathrm{P}\wedge\pi=\emptyset \quad \text{y} \quad \mathrm{P}\vee\pi=\mathbb{G}\,.$$

Y esto es esencial para ver que las funciones entre ordenes parciales (y que ya habíamos definido en el primer nivel):

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^{\pi} & \to & \bigvee_{\mathrm{P}} \\ \sigma & \mapsto & \sigma\vee\mathrm{P} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \bigvee_{\mathrm{P}} & \to & \bigwedge^{\pi} \\ \sigma & \mapsto & \sigma\wedge\pi \end{array}$$

(donde usamos a σ como variable que representa a un subespacio de cualquier dimensión), son funciones inversas. Esto es, son biyecciones que preservan el orden (la incidencia) que es lo que habíamos llamado ser isomorfos.

... después de tantas vueltas parece que regresamos a lo que intuían los pintores renascentistas: “lo que vemos se puede representar en un plano”; cada línea por el ojo representa a un punto y cada plano a una línea.



Ya podemos demostrar el Lema 2. Si tenemos un plano proyectivo $\mathbb{P}$ isomorfo al plano de un espacio proyectivo $\mathbb{G}$. Entonces, podemos ver a su orden parcial como el de un plano (pegado abajo) o como la visión de un punto (pegado al máximo). Al voltear el orden parcial de $\mathbb{G}$ para obtener el de su dual, también se voltean los chiquitos y entonces, podemos identificar al de $\mathbb{P}^*$ con el de un plano de $\mathbb{G}^*$; que muestra que $\mathbb{P}^*$ también es expandible.

5.7. Hipótesis de trabajo y algo de historía

Al establecer un sistema axiomático es importante que incluya ejemplos relevantes para no estar trabajando en el vacío, e inmediatamente después se entra en el terreno ambiguo de qué tantos ejemplos hay; y en nuestro caso —adelantamos— hay mucho más de uno.

Aunque en principio puede haber muchos ejemplos de geometrías proyectivas, nuestro interés primordial será estudiar qué pasa en una; en el Espacio Desarguesiano que surgió de explicar cómo vemos al mundo físico. Y entonces, nuestra ***hipótesis de trabajo*** es ésta:

- *Nos interesa estudiar al Espacio Desarguesiano.*

Vamos a usar a los cuatro axiomas que definen a una geometría proyectiva pero no queremos ir más allá de la dimensión 3, para lo cual supondremos que *un plano y una línea siempre se intersectan*. Aún así, nos vamos a encontrar momentos de *bifurcación* en los que habrá varias posibilidades a escoger; y tomaremos por principio a la que incluye al Espacio Desarguesiano. Puede sonar ambiguo, y es natural la pregunta de ¿por qué no extender de una vez los axiomas para describir con más precisión al Espacio Desarguesiano? Damos dos argumentos históricos para no hacerlo.

En el cambio de siglo entre el XIX y el XX hubo una gran ilusión de encontrar un sistema axiomático que englobara y fundamentara a toda la matemática; a veces se le llama el *programa de Hilbert*. Esta ilusión terminó con un contundente y hermoso balde de agua fría. En 1931, Kurt Gödel demostró su célebre Teorema de Incompletez que, a muy grandes razgos, demuestra que en cualquier sistema axiomático suficientemente sensato, se van a encontrar afirmaciones coherentes que no son demostrables en ninguno de los dos sentidos (ni falsa, ni verdadera). Se puede añadir como axioma en ambos sentidos, se bifurca la teoría. Y es en este espíritu como lo tomaremos: cuando se nos aparezca el fantasma de Gödel, le haremos un guiño con el ojo y el rumbo que seguiremos lo marcará nuestra hipótesis de trabajo.

El otro argumento está relacionado con el libro de David Hilbert (1862 – 1943), *Foundations of Geometry*, publicado por primera vez en 1899 como notas de un curso que dió en la Universidad de Gotingen. En ese texto, cuya historia editorial es rica e interesante y que tuvo una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, Hilbert le corrige la plana a Euclides. Presenta un sistema de 20 axiomas independientes (ninguno se deduce de los otros) y consistentes (no conducen a una contradicción), que definen a la Geometría Euclidiana en su sentido clásico. Estos veinte axiomas se presentan en grupos temáticos. Los primeros ocho son los de *incidencia* y son los que tienen relación con nuestros cuatro. Con los otros 12 axiomas se determina, dicho a muy grandes razgos, que las rectas serán como la recta de los números reales. Creemos que esta parte de la teoría es de otra índole, que se acerca más a lo que ahora llamamos topología (que en el momento en que Hilbert escribió ese libro aún no estaba del todo afianzada como rama de las matemáticas y no se le diferenciaba aún de la geometría), y por eso no nos involucramos con esos 12 axiomas en primera instancia. Lo que en este tema dicta nuestra hipótesis de trabajo, es algo más simple: hay que suponer que las líneas son como las que intuían Euclides, Desargues, Descartes y Newton; que (ahora podemos decir) están modeladas por los números reales $\mathbb{R}$; es decir, que están en biyección *continua* (¡el término topológico por excelencia!) con $\mathbb{R}$ y que lo que hizo Desargues es añadirles un punto nuevo o ideal, ∞, al cual se llega en ambas direcciones, como lo indican nuestros dibujos dinámicos.

Lo que hace Hilbert en su libro, es demostrar que esos veinte axiomas definen a la Geometría Euclidiana entendida a la Descartes, dada por coordenadas. Lo cual se puede llamar *aritmetizar* a la geometría o convertirla en *geometría analítica*. Mientras que lo que pretendemos hacer nosotros, a partir de los cuatro axiomas y dos más que surgirán en su momento (en los Capítulos 3 y 4, respectivamente), es hacer *geometría sintética*: argumentar con base en las figuras y configuraciones como soporte visual a los razonamientos abstractos. Se le podría llamar Ceometría de Incidencia (pues nuestros cuatro axiomas son de esa índole), pero es más correcto *Geometría Visual* pues tanto los razonamientos como la motivación están muy relacionados con esa capacidad del ser humano.

Es significativo lo que se puede obtener con este enfoque y, a la vez, es un homenaje a los geómetras de los siglos XVIII y XIX que, con muy pocas herramientas conceptuales o de visualización como las nuestras, avanzaron e influyeron tanto en lo que ahora entendemos como geometría.