

# Geometría Visual

las matemáticas que surgen  
de cómo vemos al mundo

José Luis Abreu y Javier Bracho

Diciembre 2020

# Introducción

Esta es la primera parte de un libro electrónico interactivo de geometría proyectiva. Esta geometría se podría describir como la teoría matemática que surge al intentar entender *cómo vemos al mundo*, en el mismo sentido en que lo hicieron los pintores renacentistas para poder pintarlo de una manera realista. Con un espíritu experimental, el primer capítulo retoma esa preocupación que condujo a las *técnicas de la perspectiva*, y concluye con el enunciado de los axiomas en que se fundamenta la geometría proyectiva. Ésta se aborda formalmente en los siguientes dos capítulos.

En los albores de las matemáticas —es decir, cuando los griegos hicieron el trabajo fundacional que sigue asombrándonos hoy día— además de los *teoremas* (enunciados nítidos demostrados con rigor lógico) tenían gran relevancia las *construcciones*. No había juicios de valor preferencial entre ambos tipos de productos matemáticos; tan importantes eran los unos como las otras. Pero con el paso del tiempo, este balance se quebró.

La geometría se dividió entre lo que se llama ahora *geometría sintética*, que incluye a la geometría clásica manteniendo su estilo de argumentación, y la *geometría analítica* que se basa en el método de coordenadas. En esta última manera de pensar la geometría, que auspició avances espectaculares en los últimos siglos, las construcciones como tales perdieron interés, pues el álgebra y el análisis proporcionaban herramientas para sustituirlas; o bien, cuando ciertas construcciones eran inevitables, se les mimetizaba dentro de las demostraciones de los teoremas, que entonces se convirtieron en casi la única unidad de expresión válida en el avance y en la comunicación de las matemáticas. Las construcciones como tales perdieron su valor y quedaron como anécdota que, si acaso, se usaban para el apoyo didáctico en la enseñanza media.

La preeminencia casi absoluta del teorema, se vuelve a trastocar irremediablemente cuando la computación —como parte integral de las matemáticas— irrumpe en la escena en la segunda mitad del siglo XX. La importancia del *algoritmo*

para resolver mecánicamente un problema —como un producto matemático en sí mismo— con un enorme valor práctico y teórico, cambia por completo el panorama. Las construcciones clásicas de los griegos recobran importancia como los primeros y más nítidos ejemplos de algoritmos y, entre otras cosas, surge el área de *geometría computacional* en la que el algoritmo (o la construcción) toman el primer plano. También surgen los programas de *geometría dinámica* en los que se toma a la pantalla como un plano y proveen al usuario de las *herramientas* para hacer construcciones geométricas en el sentido más clásico; la regla y el compás se vuelven virtuales, pero ganan exactitud y precisión en los dibujos y mantienen o recobran su estatus teórico de *herramientas constructivas*. Las construcciones clásicas de los griegos encuentran, dos milenios y medio después de ser concebidas, su plena expresión gráfica.

En este libro (si aún se le puede llamar así, pero lo hacemos en su sentido más emblemático), las construcciones retoman un papel protagonista como unidad de expresión matemática. Pero aho-

ra, como son construcciones dinámicas y forman parte integral de una exposición didáctica escrita, las llamaremos **escenas**. Éstas están basadas en una construcción clásica, es decir, en una secuencia de operaciones geométricas —en un algoritmo que produce una figura— pero ahora, y gracias a la computadora que las transmite a una pantalla, tienen dinamismo en al menos tres sentidos.

Primero, como figuras se presentan en *pasos*, que son etapas acumulativas de la construcción. Ayudan así a entenderlas y permiten hablar de ellas en diferentes momentos o desde diversos ángulos. Dentro de una escena, el texto referente al paso que se muestra en su ventana está resaltado en color más oscuro, y el texto correspondiente a pasos por venir está en un color más tenue. El cambio de paso es con el mismo control que el cambio de página; típicamente, tiene el efecto de resaltar el siguiente párrafo del texto y aumentarle elementos a la figura. Y cuando se tiene que cambiar de página sin que aún haya concluido la escena, la ventana en la que ésta se está desplegando se mantiene preferentemente en su posición en la

pantalla (cambia la hoja escrita pero no la figura).

Segundo, en ciertos pasos, las figuras son dinámicas en el sentido interactivo de que el conjunto de puntos de que depende la construcción (y la figura en la pantalla) se pueden mover a voluntad del lector; a esto lo llamaremos *exploración* o *explorar* la escena en un paso dado.

Y tercero, en cualquier momento de una escena en estado de exploración (y todas las escenas tienen tal paso), el lector (o usuario) puede involucrarse en la construcción dentro del programa que la creó, llamado *ProGeo3D*. Es decir, puede cambiarla, rearmarla o proseguir más allá de ella. Esto es particularmente importante, pues desde siempre los textos matemáticos se leen con otro ritmo que los literarios; no se leen de corrido, sino que exigen pausas para que el lector reconsidere, sopesa y critique por sí mismo lo que se está planteando. Esta posibilidad de revisar a fondo y reconstruir las construcciones, ayuda en ese sentido introspectivo. Da mucho sobre lo cual rumiar o, como decimos los matemáticos, trabajar.

**Agradecimientos.** Debemos agradecer el invaluable apoyo técnico y altamente especializado que generosamente nos han proporcionado Joel Espinosa, Alejandro Radillo y Pablo Rosell para la elaboración y el diseño de este libro.



# Índice general

<b>I</b>	<b>Perspectiva y armonía</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Perspectiva, movimientos y axiomas</b>	<b>2</b>
1.1	Cuadrículas en perspectiva . . . . .	6
1.1.1	A partir de una loseta . . . . .	7
1.1.2	Con horizonte fijo . . . . .	13
1.1.3	Las recetas de Alberti . . . . .	14
1.2	Movimientos . . . . .	17
1.2.1	Traslaciones y transformaciones lineales . . . . .	18
1.2.2	Movimientos rígidos (y lo que viene) . . . . .	20
1.2.3	Movimientos hiperbólicos . . . . .	26
1.3	Geometría proyectiva . . . . .	32

1.3.1	Proyecciones . . . . .	33
1.3.2	El otro lado del horizonte . . . . .	34
1.3.3	Espacio (y Plano) Desarguesianos . . . . .	38
1.3.4	Cubo en perspectiva . . . . .	43
1.4	Axiomas . . . . .	50
1.4.1	El Primer Axioma (puntos y líneas) . . . . .	52
1.4.2	Segundo Axioma (intersección de líneas) . . . . .	54
1.4.3	Axiomas de dimensión y de no trivialidad . . . . .	56
1.4.4	Notación, subespacios, operaciones y dimensión . . . . .	57
1.4.5	Proyecciones . . . . .	64
1.4.6	Dualidad . . . . .	65
1.4.7	Hipótesis de trabajo y algo de historia . . . . .	71
<b>2</b>	<b>Armonía</b>	<b>74</b>
2.1	Motivación y definición . . . . .	75
2.1.1	Refinamiento de la cuadrícula . . . . .	75
2.1.2	Construcción del cuarto armónico . . . . .	77
2.2	Principios básicos . . . . .	82

2.2.1	Teorema Armónico . . . . .	82
2.2.2	Invarianza bajo proyecciones . . . . .	86
2.2.3	Simetría de la armonía . . . . .	88
2.2.4	Sucesiones armónicas, el Plano de Fano y característica . . . . .	91
2.3	Teorema de Desargues . . . . .	94
2.3.1	El Teorema en dimensión 3 . . . . .	94
2.3.2	Configuración de Desargues . . . . .	97
2.3.3	Demostración 2D . . . . .	98
2.3.4	Armonía entre Ceva y Menelao . . . . .	99
2.4	Reflexiones Armónicas . . . . .	101
2.4.1	Definiciones . . . . .	102
2.4.2	Líneas van en líneas . . . . .	105
2.4.3	Configuración del cuadrángulo extendido (y dos grupitos) . . . . .	107
2.4.4	Lema del triángulo de Klein . . . . .	112
<b>3</b>	<b>Curvas Armónicas y Reglados</b>	<b>116</b>
3.1	Curvas de armonía . . . . .	119
3.1.1	Definición . . . . .	119
3.1.2	Haces armónicos . . . . .	122
3.1.3	Las cónicas son curvas de armonía . . . . .	126
3.1.3.1	La elipse de una loseta . . . . .	128

	3.1.3.2	Parábolas . . . . .	129
	3.1.3.3	Hipérbolas . . . . .	131
	3.1.4	Polaridad y simetría . . . . .	132
3.2		Superficies regladas . . . . .	141
	3.2.1	Reglados . . . . .	142
	3.2.2	Construcción de Hilbert-CohnVossen . . . . .	143
	3.2.3	Axioma del Equipal . . . . .	145
	3.2.4	Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes . . . . .	147
3.3		Polaridad . . . . .	148
	3.3.1	En superficies regladas . . . . .	149
	3.3.2	Respeto a la incidencia . . . . .	156
	3.3.3	En curvas armónicas . . . . .	161
3.4		Teoremas clásicos . . . . .	164
	3.4.1	El Teorema de Pascal . . . . .	164
	3.4.1.1	La cónica por cinco puntos . . . . .	168
	3.4.2	El Teorema de Pappus . . . . .	170
	3.4.2.1	El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal . . . . .	173

<b>II</b>	<b>Geometrías y aritmetización</b>	<b>177</b>
<b>4</b>	<b>Las tres geometrías planas rígidas</b>	<b>178</b>
4.1	La geometría hiperbólica . . . . .	182
4.1.1	El Plano de Beltrami-Klein . . . . .	182
4.1.2	Rotaciones y ortogonalidad . . . . .	188
4.1.3	Traslaciones . . . . .	192
4.1.4	Los dos grupos y la homogeneidad . . . . .	193
4.1.5	Círculos, equidistantes y horocírclos . . . . .	199
4.2	La geometría proyectiva . . . . .	203
4.2.1	Los grupos proyectivos . . . . .	204
4.2.2	El grupo proyectivo de la línea . . . . .	206
4.2.3	Teorema de 3 en 3 . . . . .	209
4.3	La Geometría Euclidiana . . . . .	212
4.3.1	El plano euclidiano . . . . .	213
4.4	El Plano Proyectivo Rígido . . . . .	213
4.5	¿Y la unicidad, Apá? . . . . .	213
<b>5</b>	<b>Teoremas clásicos</b>	<b>214</b>
5.0.1	El Teorema de Pappus . . . . .	214
5.0.2	El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal . . . . .	214
5.0.3	El Teorema de Pascal . . . . .	214

# Parte I

## Perspectiva y armonía

# Capítulo 1

## Perspectiva, movimientos y axiomas

La **perspectiva** renacentista revolucionó la manera en que representamos al mundo. Pero no sólo en la pintura, que es su fuente de inspiración, sino también en la ciencia. Las técnicas y procedimientos que la caracterizan se deducen de la geometría euclidiana –la que explica nuestro entorno inmediato con base en conceptos como punto, línea, plano, distancia y ángulo. Pero a la vez la cuestionan. Pues al argumentar los porqués de las recetas constructivas que se usan en la perspectiva, es ineludible hablar de entes aún más abstractos y

no tan inmediatos como la *línea al horizonte* y los *puntos de fuga*, que quisieran ser situados en, o se relacionan con, el “infinito”. Obliga entonces a disociar a la realidad inmediata del modelo teórico que surge de ella (conocido como el Espacio Euclidiano) y empieza a abrir el camino para que, varios siglos después, sea aceptada la existencia de otras geometrías; y con ellas, la posibilidad de que aparezca un Einstein para darnos una versión más rebuscada y abstracta, pero más amplia y certera, de la realidad.

El libro que mejor documenta a la revolución pictórica renacentista es *Della pittura*. En él, su autor Leone Battista Alberti (1404-1472) empieza por precisar ¿qué es pintar? para pasar a explicar –con pasión y en lenguaje vernáculo, cuando lo usual era aún escribir en latín– las técnicas básicas de la perspectiva que habían desarrollado su maestro Filippo Brunelleschi (1377-1446), y los gremios de arquitectos y artistas que florecen orgullosos y creativos en la Florencia del siglo XV.

Entre los pintores renacentistas que se encumbraron en el uso de esas técnicas destacan el también florentino Leonardo (1452-1519) y el alemán Durero (1471-1528); pero hasta la fecha los arquitectos y los pintores realistas las siguen usando para presentar sus proyectos o componer sus cuadros con buena perspectiva. Como ya mencionamos, esas técnicas tienen como fundamento a la geometría euclidiana, así que en su libro, Alberti recurre a la autoridad intelectual de “los matemáticos” para zanjar, o en ocasiones de plano esquivar, discusiones complicadas respecto a los *porqués* de las recetas que propone. Y es natural esa

reticencia, pues al exponer los argumentos, surgen problemas filosóficos serios que ponen en duda la concepción común de lo que es la geometría. En particular, es ineludible mencionar al *infinito* –y en ese entonces ni los matemáticos se sentían seguros pisando ese resbaloso terreno–, o bien, a veces parece que se está cuestionando al Axioma de las Paralelas de Euclides –aún “sacrosanto” en aquella época. En fin, se ve que Alberti sentía complicada la argumentación precisa y deductiva. Y entonces, como sucede mucho en la enseñanza de las matemáticas, opta por dar recetas y aleccionar en procedimientos, más que en buscar el entendimiento de los razonamientos que los implican.

Pasan dos siglos para que un matemático, el francés Girard Desargues (1591-1661), agarre a esotoro –el de la argumentación sistemática y formal de la perspectiva– por los cuernos. Se le considera el padre de la *Geometría Projectiva* pues, además del teorema seminal que lleva su nombre, propone ampliar, en abstracto, al Plano Euclidiano para que los horizontes y los puntos de fuga se incorporen con plenos derechos a la teoría geométrica.



Llamaremos a ese plano extendido el *Plano Desarguesiano*. Pero sucedió que su trabajo no tuvo eco inmediato entre los matemáticos –y aún hoy día, no alcanza la presencia que le corresponde en la cultura científica general; los “puntos de fuga” y los “horizontes” aún siguen siendo argucias técnicas de los dibujantes más que entes matemáticos.

Y pasan otros dos siglos para que las ideas de Girard Desargues reciban la atención de sus colegas y se afianzen como teoría geométrica en la primera mitad del siglo XIX. Una buena razón histórica para que sucediera así –para que pasara tanto tiempo– es que un paisano contemporáneo de Desargues, llamado René Descartes (1596-1650), coordinatiza al Plano Euclidiano. Así que surge –simultáneamente a la proyectiva– la *geometría analítica* basada en el *Plano Cartesiano* (el que usa coordenadas) y da trabajo de sobra al gremio matemático: el interés general se concentra en esta vertiente de la geometría que se roba los reflectores de la enseñanza y de la historia. (Y con sobrada razón pues pronto, con Isaac Newton (1642-1726) y Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz (1646 -1716), surge

el cálculo para el cual el método de coordenadas es esencial, como también lo sería en la conquista de las muchas dimensiones).

Cuando, ya de regreso en el siglo XXI, se presentan los argumentos que explican las técnicas de la perspectiva con figuras interactivas o dinámicas, irrumpe en la escena un concepto que ha sido fundamental en la historia más reciente de las matemáticas: los **movimientos**. Las computadoras ya han realizado el sueño de ilustrar teoremas o construcciones geométricas con figuras que no son una instancia única y estática de ellos congelada en el papel, sino que se mueven a voluntad en la pantalla y entonces, en principio, se puede transitar por todas las instancias a las que se refieren. Estas *figuras dinámicas* se acercan un poco más a la generalidad que pretende un razonamiento geométrico, o lo ilustran mejor. Pero, como pronto veremos, algo inesperado y sorprendente sucede con las construcciones en las que se basa la perspectiva renacentista. No sólo se mueve una figura geométrica plana y abstracta, sino que nuestro aparato perceptivo se involucra e interpreta mucho más.

Se empeña en hacernos ver que algo se mueve en el espacio. Nos obliga a sentir que todo un plano se contorsiona, que gira de manera caprichosa a la vez que se transforma internamente.

En el siglo XIX, las matemáticas ampliaron enormemente sus miras y su abanico de objetos de interés. Entre estos nuevos entes abstractos, destacan los *grupos* que se asocian al estudio de la *simetría* e inician el área que ahora conocemos como *álgebra moderna*. Y entre ellos, destacan muy en particular, los *grupos de Lie*<sup>1</sup> –los grupos que, además de la simetría, traen incorporada a la *continuidad*– que son los que congregan o agrupan –valga la redundancia– a estos movimientos geométricos (los internos de un plano) a los que estábamos acusando de irrumpir ruidosamente en la escena.

En su famoso *Programa de Erlangen*, que data de 1875, Christian Felix Klein (1849-1925) hace énfasis en que estos grupos de movimientos son los

---

<sup>1</sup>El nombre es en honor a Marius Sophus Lie (1842 – 1899), matemático Noruego que empezó su estudio.

que le dan su carácter distintivo a las diversas geometrías que, para ese entonces, ya se habían descubierto y estaban en vías de ser finalmente “aceptadas en sociedad”. Pero además, demuestra que la geometría proyectiva que inició Desargues –y, ya en ese momento, había logrado grandes avances teóricos– las acoge a todas; prueba que en su seno caben modelos para todas ellas. Lo que distingue a una geometría de otra es qué *subgrupo* de movimientos de la geometría proyectiva se debe considerar.

Darle sentido experimental y visual a esto que acabamos de describir históricamente, es el objetivo primordial de las primeras secciones de este capítulo. En la primera, vemos las construcciones que sustentan a las técnicas clásicas de la perspectiva. En la segunda, nos enfocamos en los movimientos que surgen de estas construcciones por el simple hecho de ser interactivas. Vemos que se pueden considerar distintos tipos de movimientos, que van desde los más abstractos y abundantes (los *proyectivos*); pasando por los de nuestro mundo cotidiano (los *rígidos*) para concluir con los de

la geometría hiperbólica: el ejemplo contundente de geometría no euclidiana. Aprovechamos también, porque se nos presentan los temas en distintos momentos, para describir el contenido de los capítulos siguientes.

Con ésta motivación y experiencia visual, en la Sección 3 definimos formalmente al Espacio Desarguesiano. Empezamos a transitar por el camino de la formalización matemática y concluimos con dos construcciones dinámicas de perspectivas tridimensionales para afianzar a estas ideas abstractas, que, ya en ese momento, están en un terreno común a la técnica pictórica y a las matemáticas.

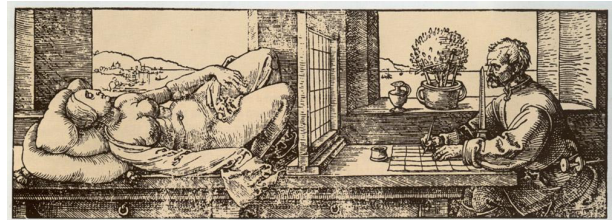
En la última sección, presentamos los cuatro axiomas de la geometría proyectiva con los que trabajaremos el resto del libro —y que surgen de, pero rompen con, los cinco postulados de Euclides. Vemos que el Espacio Desarguesiano los cumple, pero que también se abre la posibilidad a que haya otros ejemplos y a que se tengan que asumir nuevos axiomas.

## 1.1. Cuadrículas en perspectiva

Para los renacentistas, según el libro de Alberti:

*Pintar* es el arte de plasmar en un lienzo lo que ve —o debería ver— el pintor ante una escena real —o imaginaria.

Y para precisar qué va en cada punto del cuadro, basta fijar la escena, el plano del lienzo y la posición precisa del ojo del pintor.



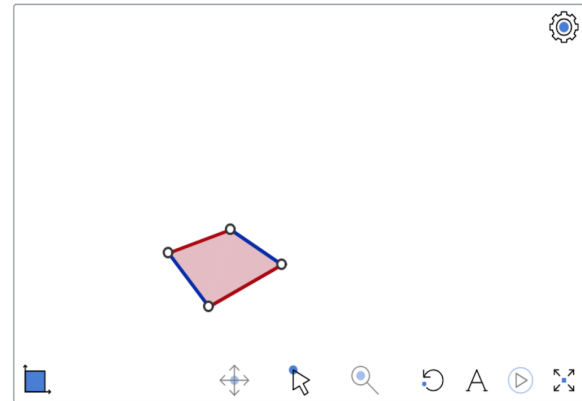
Este grabado de Durero, ilustra con claridad esta intención y una técnica para lograrlo (con un cuadro de difícil perspectiva) en la que se usan cuadrículas, tanto en el plano que a la larga será el del lienzo, como en el papel en el que el pintor está dibujando un primer boceto.

Con escenas más abiertas o imaginarias, que incluyen personajes y objetos a distintas profundidades, conviene usar otras técnicas. Para saber en qué lugar del lienzo y con qué escala se debe dibujar algo en la escena, resulta muy útil aprender a dibujar a las cuadrículas en perspectiva. Pues un plano cuadrículado permite situar con precisión a cualquier objeto en él –usando el método que hizo ilustre a Descartes: se fija a un cuadro como *origen* o “la base”, y se determina cuántos cuadrados en cada una de las dos direcciones de la cuadrícula hay que moverse para llegar al punto deseado.

### 1.1.1. A partir de una loseta

Enfrentemos primero al “problema del pintor”. Consiste en que un pintor nos entrega en un lienzo, el dibujo –a ojo de buen pintor– de una de las losetas cuadradas de un mosaico en el piso (la *loseta básica*, llamémosla) y nos pregunta ¿cómo dibujar al resto del mosaico?

**Escena 1.** Un cuadrilátero dibujado en el lienzo, o pantalla, consiste de cuatro segmentos que son



sus *lados*. Hemos pintado de rojo a un par de lados opuestos y de azul al otro par. Nos dan las dos direcciones principales (o ejes) de la cuadrícula.

1.2

Al trazar las líneas que corresponden a los lados opuestos de la loseta básica, éstas se cortan en dos nuevos puntos que hemos denotado H, de “infinito horizontal” y V de “infinito vertical”. Y por estos puntos hemos trazado una nueva línea que llamaremos el *horizonte* de la loseta.

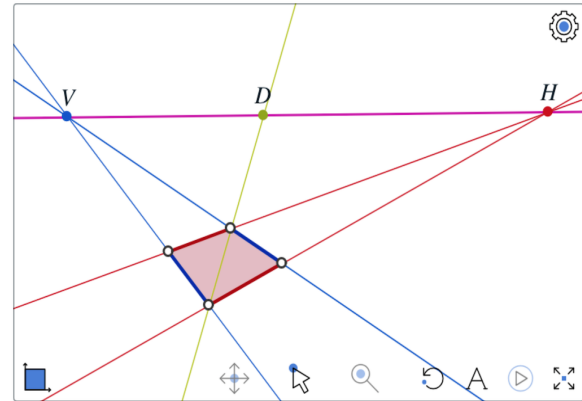
1.3

Una de las diagonales del cuadrángulo corta al horizonte en un punto  $D$ , de “infinito diagonal”. Estos tres puntos en el horizonte que hemos bautizado “Infinito de Tal” son de los famosos “puntos de fuga”. Y hay que remarcar que, como el horizonte, dependen de  $-y$  ahora se pueden mover con- los puntos de la loseta básica.

Pero de hecho:

*cualquier punto de la línea al horizonte es un punto de fuga.*

Para verlo, hagamos un experimento mental de esos que usaba Einstein. Supongamos que la loseta básica es el dibujo de una loseta en un piso infinito sobre el que estamos parados. Mandemos a una pareja, agarrada de la manita, a caminar en una dirección fija sobre el piso ¿Qué vemos? Por supuesto: que se hacen chiquitos. Ellos caminan tan campantes sobre líneas paralelas en el piso, pero en el lienzo tienden a convertirse en un punto del horizonte; y además, cualquier otra línea paralela a las suyas se dibuja como línea que también



incide en ese punto (basta pensar en un tercer personaje viajando a su misma velocidad por esa otra paralela: sus distancias “reales” se mantienen fijas, pero en el lienzo se encogen). Entonces los haces de líneas paralelas en el piso se ven (y por tanto se deben dibujar) como haces concurrentes en un punto de su línea horizonte; los puntos en ella corresponden a distintas direcciones: son sus puntos de fuga.

**Escena 2.** De este hecho se deduce un procedi-

2.2 miento para extender el dibujo de la loseta básica al de todo el mosaico, o cuadrícula, que determina.

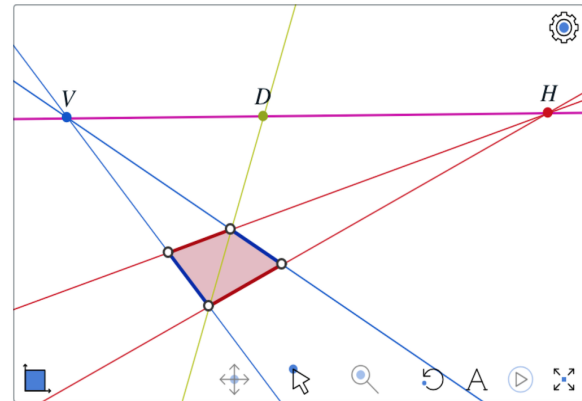
La línea diagonal de la siguiente loseta (en dirección a H) tiene que ser la línea que va al infinito diagonal, D, partiendo de la esquina inferior (y en dirección a H) de la loseta básica.

2.3 Esto nos da al vértice superior de la loseta siguiente.

Desde ahí debe dibujarse la siguiente línea vertical (a V); y entonces, su intersección con la otra diagonal es un nuevo punto desde el cual podemos trazar al otro infinito, el horizontal, H... y esto nos produce un nuevo punto para iterar el proceso.

2.4 Se puede seguir así, en escalerita, trazando líneas hacia V y hacia H desde puntos que se alternan en las dos diagonales hasta donde sea necesario.

2.5 E inclusive, la técnica de la escalerita se puede implementar para extender la cuadrícula hacia atrás. O bien, se puede trazar la otra diagonal de la loseta (en verde) para que sus intersecciones con líneas azules o rojas que ya tenemos, nos den puntos de donde trazar al otro infinito.



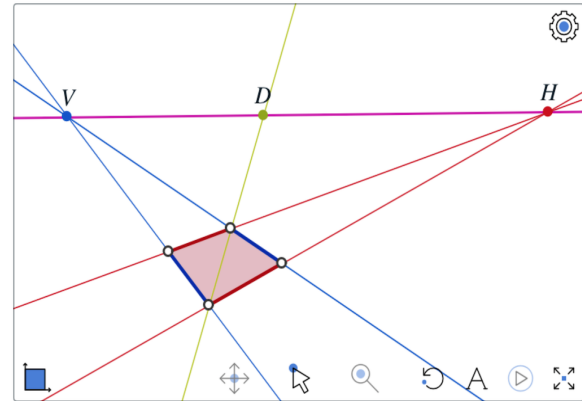
**¡Ahora sí!** Es importante que el lector se involucre y juegue con la figura dinámica para percibir aquello que decíamos en la introducción sobre los movimientos. Los cuatro puntos iniciales son variables (se distinguen por estar pintados con circulitos más que con bolitas sólidas) y todo lo demás de la construcción (líneas, segmentos y puntos) depende de ellos, de su posición. Muévelos con el dedo o el ratón; basta *seleccionarlos* y *arrastrarlos*.

En la parte inferior de la ventana interactiva aparecen, a ambos lados del “Seleccionador” de objetos, controles para “Mover” y “Amplificar/Reducir” a toda la construcción. Además, se puede ampliar la imagen para abarcar toda la pantalla pulsando al icono correspondiente en la esquina inferior derecha; y, pulsando el icono de “Retorno”, se puede regresar a la posición inicial –la que escogieron los autores– en cualquier momento.

Llamemos a la posición inicial “el andamio constructivo de un piso”. Es importante que el lector mueva la construcción para que esta se convierta en el andamio constructivo de:

- a) un techo;
- b) una fachada (haciendo paralelos y verticales a dos de los lados opuestos), y pasar de la vista de ella en nuestro lado izquierdo a la vista de la fachada en el lado derecho moviendo tan solo a uno de los puntos libres, y en particular
- c) una cuadrícula euclidiana (haciendo en lo posible paralelos a ambos pares de lados opuestos y a estos, ortogonales).

Además de mover la construcción, también se



puede *trabajar* con ella. En éste su último paso, añadimos el trazo de otras dos diagonales verdes, que pasan puntualmente por los puntos del timbiriche que les corresponde y concurren en el otro “infinito diagonal”,  $D'$  –la cuarteta de puntos  $V, D, H, D'$  en el horizonte cobrará, a la larga, una importancia enorme pues es lo que llamaremos una “cuarteta armónica”. Y además, también hemos dibujado tres líneas turquesa con pendiente  $2 : 1$  (para que se vea que efectivamente concurren

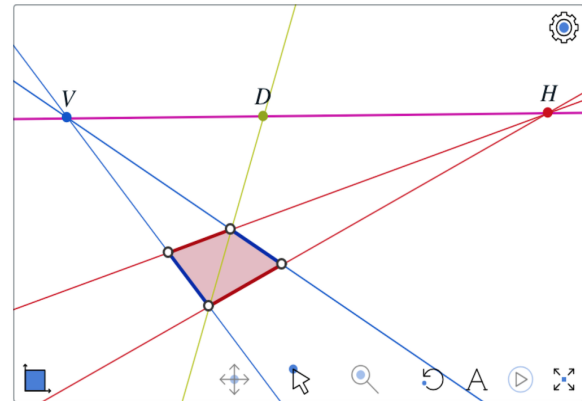
en el horizonte como argumentamos a la Einstein).

Éste es un buen momento para que el lector experimente con otros conjuntos de líneas paralelas (o con la misma pendiente, por ejemplo  $1 : 2$  o  $3 : 1$ ), para lo cual debe familiarizarse con las posibilidades de ProGeo3D.

Para trabajar con la construcción, hay que ampliarla y luego pulsar el icono de “Trabajo”, arriba a la derecha. En ese momento, entran los menús de herramientas de ProGeo3D y conviene empezar experimentando con los de “Deshacer” y “Rehacer” (abajo a la derecha) que tienen el número de la instrucción en medio de ellos (ésta construcción consta de 67 instrucciones).

Al pulsar “Deshacer” repetidamente, se viaja hacia atrás en la construcción y se verá que consta alternadamente de definir puntos como intersección de rectas (con la herramienta “Intersección”) y trazo de líneas (con la herramienta “Punto/Recta”) usando distintos colores y tamaños, casi hasta el principio, en el que también se usan las herramientas “Plano/Triángulo” con la que se colorea un triángulo, y “Segmento” que dibuja al segmento en vez de a la línea por dos puntos.

Se puede reconstruir paso a paso a la construcción, pulsando “Rehacer”, o retornar de golpe al final con “Re-



torno” dentro de la ventana.

Al activar la herramienta “Intersección” y hacer click cerca de uno de tantos cruces de líneas con que nos provee la cuadrícula, se define un nuevo punto. O también se puede definir seleccionando a un par de líneas: se baja al ratón en una, se arrastra y se levanta en la otra.

Con la herramienta “Punto/Recta” se definen puntos libres con un click rápido en una zona donde no haya otros objetos; porque si se hace sobre una línea, el programa restringe al nuevo punto a vivir en ella y si se



hace cerca de una intersección, presupone que es ese el punto que se quiere definir. Así que para trazar una línea, se deben seleccionar dos puntos (se baja el ratón en uno, se arrastra al otro y se levanta ahí) y si los puntos no estaban previamente definidos, en un sólo gesto se efectúan tres instrucciones. Juegue con esto y observe que líneas “paralelas en el piso” se dibujan como concurrentes en el horizonte.

Esc:2↑bt

Toda la construcción se mueve siguiendo el movimiento de uno de los puntos libres y, como decíamos en la introducción al capítulo, sentimos que un plano se bambolea en el espacio a la vez que la cuadrícula dibujada en él se deforma. Y no es fácil o evidente discernir cuál es cuál.

Tampoco es fácil controlarlo, pues no es obvio o intuitivo predecir qué pasará con la imagen; sentimos cierta torpeza pues aunque tengamos claro hacia qué tipo de loseta queremos llegar (por ejemplo, para hacer un techo), sólo podemos mover un punto a la vez.

De hecho, nos estamos moviendo en un espacio (de imágenes) de dimensión 8. Pues son ocho los grados de libertad –dos por cada punto libre en

la pantalla– que se tienen para moverse dentro de estas figuras (o grupo de movimientos). Pero ahí, solo se nos permite movernos en direcciones muy rígidas, sin fluidez, como si en un plano se nos restringiera a movimientos horizontales o verticales y en tramos muy grandes; en esas condiciones, podríamos trazar solo escaleras y garabatos incoherentes llenos de esquinas rectas.

Sin embargo, aunque los movimientos de las figuras difícilmente correspondan a una vivencia real, es innegable que nuestro cerebro nos hace sentir tridimensionalidad; interpreta –y quiere que veamos– que un plano cuadrículado se mueve en el espacio. Conmueve su terquedad implantada por la evolución: a la menor provocación de efecto de espacialidad más que vil planaridad, nos lo hace sentir: vemos a un plano girando torpemente en el espacio.

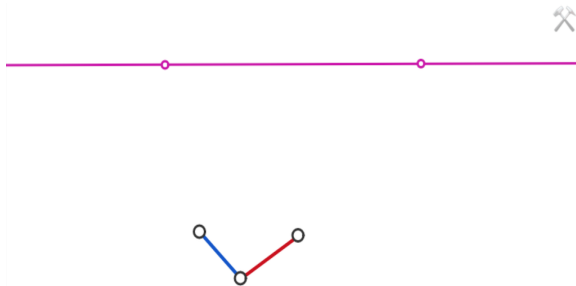
Por último, debemos señalar las sugestivas coincidencias que se producen. Que tres líneas sean *concurrentes*, es decir, que pasen por el mismo punto, es muy, muy raro. Y en estas cuadrículas con unas cuantas líneas más, se dan por montones.

### 1.1.2. Con horizonte fijo

Para ganar control sobre los movimientos, vamos a cambiar a uno de los cuatro puntos variables de la loseta básica por su horizonte.

3.1

**Escena 3.** Consideremos una línea (controlada por dos puntos, pero dejémosla fija): asumirá el papel de *horizonte*. Para determinar cómo se ve una cuadrícula en el piso, nos basta ahora con tres de los puntos de la loseta básica. Uno de ellos ya es una



esquina y jugará el papel de *origen* de dos *vectores* o segmentos dirigidos.

3.2

Las líneas del origen a los otros dos vértices, cortan al horizonte en los puntos H y V que, como antes, serán los puntos de fuga de las dos direcciones básicas de la cuadrícula.

3.3

De ellos, podemos trazar líneas al otro punto (así se deben dibujar en el lienzo esas rectas que son paralelas en el piso), y su intersección nos da al cuarto vértice de la loseta básica.

3.4

De aquí, para extender la cuadrícula hasta el tamaño deseado procedemos como antes: encontrando al “infinito diagonal” D; trazando otra diagonal a él, ... y luego dibujando líneas alternadamente a H y V en escalerita.

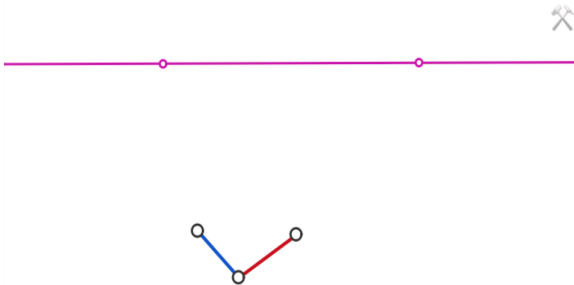
3.5

Ahora, se distinguen con claridad los movimientos internos del plano (cambios en la cuadrícula), de lo que nuestro cerebro interpreta como movimientos **del** plano como un todo en el espacio.

Para ver a los primeros, hay que mover a los puntos libres (con seis grados de libertad). Y para ver los segundos hay que mover al horizonte (que absorbe los otros dos grados de libertad ori-

ginales): sentimos entonces que, siguiendo a esa línea, se mueve un plano en el espacio; aunque su cuadrícula también se deforma internamente pues cambia la posición relativa de sus puntos básicos –se incomoda nuestra intuición del mundo real ya que, a diferencia de lo que vemos cotidianamente, el plano no parece moverse de manera rígida.

Vale la pena volver a llevar la construcción a que parezca una fachada vertical (hay que hacer vertical al horizonte y a una de las direcciones básicas)



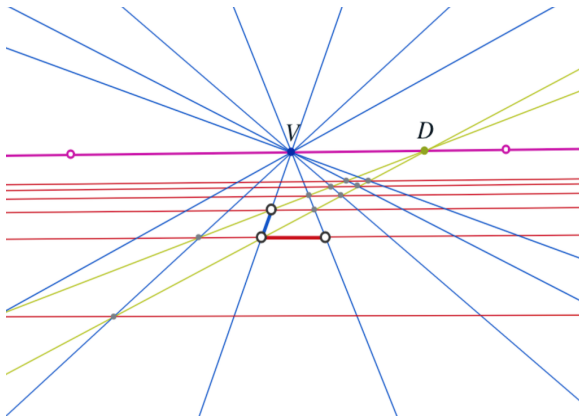
y entonces, moviendo a uno solo de los puntos libres, se puede experimentar con la altura relativa del observador (desde qué piso se está viendo al edificio).

Lo que no se puede lograr es que la cuadrícula se haga euclidiana, como parece poderse en la construcción anterior. Pues ahora el horizonte siempre está en la pantalla (o cerca de ella si acaso se le expulsa con el efecto “zoom” o “lupa”), mientras que antes se le podía mandar muy lejos y hasta hacerlo cambiar de lado al mover a la loseta.

Esc:3↑bt

### 1.1.3. Las recetas de Alberti

Ésta última construcción es muy cercana a las recetas para pintar con buena perspectiva que proponía Alberti en *Della Pittura*. Él decía que lo primero que hay que hacer para preparar un cuadro, es trazar en el lienzo una línea “horizontal a la altura de los ojos” (que es la que hemos llamado horizonte) y luego, dibujar bajo ella a una cuadrícula en perspectiva (que llamaba pavimento) para determinar la profundidad.



4.1

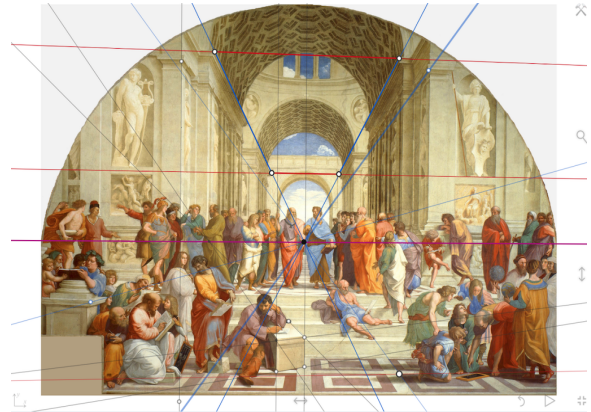
**Escena 4.** En nuestro caso, se logra poniendo también horizontal la dirección al punto H (entonces H sale de la pantalla y se va, literalmente, al infinito) y situando a V en el centro del horizonte, justo frente al ojo teórico del pintor-lector. Con base en esta cuadrícula, ya se pueden deducir geoméricamente a las escalas que se deben usar para las distintas profundidades en la escena. Por supuesto, esta preparación del lienzo casi nunca aparece en la versión final del cuadro; es auxiliar para

la composición, por lo cual la hemos llamado un *andamio constructivo*.

**Escena 5.** Sin embargo, hay pinturas famosas como *La escuela de Atenas* de Rafael, pintada entre 1509 y 1511 en una pared del Vaticano, en las que el cuadro mismo se aproxima mucho a la receta de Alberti.

Esc:4↑bt  
5.1

El punto de fuga principal está justo entre Platón y Aristóteles en el centro de la composición. Es interesante observar el baúl sobre el que trabaja



Heráclito, tiene líneas que no están en las direcciones principales de la arquitectura y parece estar ahí como un guiño de Rafael a perspectivas más complicadas. Hemos añadido a varias rectas movibles para jugar con líneas sobre este cuadro.

Esc:5↑bt

En el mundo real no hay líneas. Hay aristas que sugieren segmentos y estos, a su vez, sugieren su continuación abstracta como líneas. Análogamente, cada porción de plano en una escena (por ejemplo, una pared, un piso, un escalón, un techo o una puerta entreabierta) genera a un plano –su continuación en todas sus direcciones, abstracta e infinita– y como tal define su *línea horizonte* en el lienzo. Es donde intersecta a éste último, el plano paralelo que pasa por el ojo del pintor; justo ahí donde veríamos que se “acaba el plano” si en realidad fuera infinito, ya que al girar la vista un poquitito más dejaríamos de verlo pues el rayo “de atención” que sale de nuestro ojo ya no le pega.

Más aún, el punto de fuga de cualquier línea (y volvemos a insistir, no es que haya líneas en la escena real pero sí hay muchos segmentos que generan, cada uno, su línea abstracta) es donde inter-

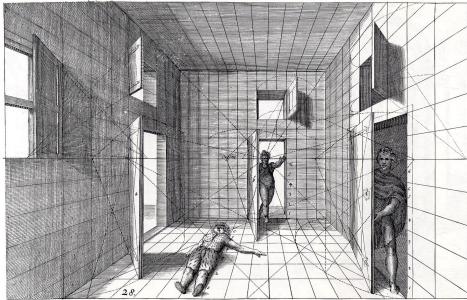
secta al lienzo la línea paralela (y también abstracta) trazada por el ojo; ahí dónde estaríamos enfocando al infinito (hipotético) de la línea –justo ahí dónde debemos voltear cuando se nos señala una estrella: el índice y el ojo del que señala definen una línea, pretende que enfoquemos y pongamos atención en la dirección paralela.

Así, el horizonte que traza Alberti es la línea correcta (horizontal y a la altura de los ojos). Es la línea horizonte del plano que define el piso, pero también lo es del techo y de cualquier otra porción de plano horizontal que aparezca en la escena –una mesa o un baúl, por ejemplo. Y el centro de esa línea (donde habíamos puesto nuestro punto V) es el punto de fuga de todas las líneas perpendiculares al lienzo (las de la dirección de la profundidad) cuando suponemos que el lienzo es vertical y que el ojo del pintor está frente al centro del cuadro.

En el grabado atribuido a Alberti que reproducimos aquí, se muestra que tenían claro, al menos él y su maestro Brunelleschi, cómo es que las líneas paralelas (de las puertas y ventanas entreabiertas) deben dibujarse convergiendo a puntos de la línea

horizonte que comparten el piso (del cuarto) y el techo, y que al pasar por los ojos de dos personajes implica que el pintor está a su altura. Pero además, también sabían cómo se deben trazar los círculos y podían deducir proporciones visuales de personajes no verticales.

Sin embargo, hay un error de perspectiva: el piso que se ve tras dos de las puertas entreabiertas debía de concluir a la altura de los ojos de los personajes, pues es el horizonte. Y que el horizonte se vea a la altura de las rodillas del personaje en la puerta del fondo, implica que el piso del cuarto está inclinado hacia el espectador y eso nos da una sensación de incomodidad –algo está mal.



## 1.2. Movimientos

Dejando de lado a la perspectiva, concentrémonos en ésta sección en los movimientos.

Si el lector hizo su tarea, al mover las escenas anteriores deambulamos ya dentro de dos *grupos de Lie*.

En la primera construcción, que depende de cuatro puntos libres (la loseta básica), viajamos por los llamados *movimientos proyectivos* o *proyectividades* que tienen dimensión 8.

En la siguiente escena, con el horizonte fijo, deambulamos por su *subgrupo* de *movimientos afines* o *afinidades*, que tiene dimensión 6. Se pueden pensar a éstos como movimientos de un plano euclidiano vistos, o dibujados, en perspectiva.

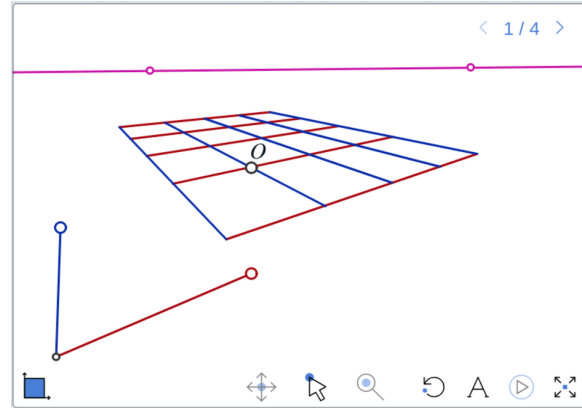
Veremos ahora que este último grupo se puede descomponer en dos, y uno de ellos ya muy cerca de nuestra experiencia cotidiana que es la que educa a nuestro aparato perceptivo para intuir tridimensionalidad.

### 1.2.1. Traslaciones y transformaciones lineales

6.1

**Escena 6.** En esta construcción, al mover al punto  $O$  vemos que se traslada un rectángulo dentro de un plano horizontal visto en perspectiva; nos movemos ahora dentro del *grupo de traslaciones* del plano que tiene dimensión 2 (está controlado por un punto en el plano). Y este grupo sí que está registrado en nuestra experiencia visual, y desde nuestra más tierna infancia; piénsese, por ejemplo, en empujar un libro sobre una mesa: así se ve.

Por otro lado, al mover los puntos rojo y azul en la esquina inferior izquierda, se deforma la geometría del rectángulo –que, más precisamente, es un paralelogramo–, y siguiéndolo a él cambia la geometría de todo el plano. Tenemos 4 grados de libertad y, pensando que el punto  $O$  es el origen del plano, este grupo de movimientos es conocido como las *transformaciones lineales*. Éstas fueron extensamente estudiadas en el siglo XIX y, en su versión general con coordenadas, son una de las piedras de toque de la matemática actual.



Así que las transformaciones afines (las de la escena anterior) son las lineales compuestas con las traslaciones, pues lo único que hemos cambiado es la manera de controlar estos movimientos, de deambular en ellos.

¿Cómo se logra esta construcción?

El punto clave es que con el horizonte fijo, podemos trasladar. Los segmentos dirigidos (o *vectores abstractos* en la esquina inferior izquierda) que rigen la geometría del plano se pueden trasladar a

6.2

cualquier punto  $O$ , pues, como ya vimos,

*las paralelas del piso se dibujan como líneas que concurren en el horizonte.*

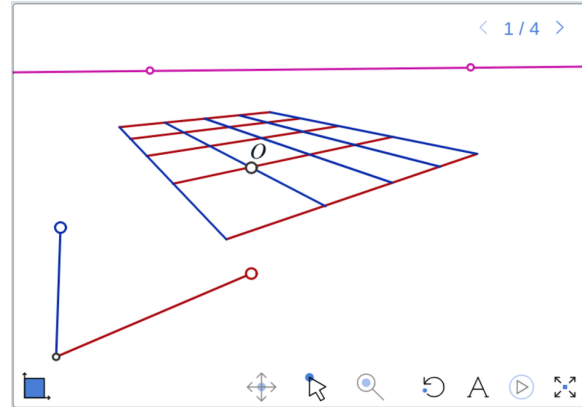
Así que se traza la línea del “origen abstracto” a  $O$  y del punto de fuga de esta línea, o dirección, se trazan líneas a los extremos de los dos vectores. La dirección de los vectores trasladados se obtiene, de nuevo, de sus dos puntos de fuga en el horizonte, y entonces, los puntos de intersección correspondientes nos dan los extremos de los vectores trasladados.

6.3

Ya tenemos los tres puntos de la loseta básica y el horizonte, así que de aquí en adelante se traza la cuadrícula en escalerita como antes.

6.4

Finalmente, se trazaron segmentos en vez de las líneas del andamio constructivo y se ocultaron los colores de las construcciones auxiliares, para dar la sensación de movimientos reales con las traslaciones. (*En el menú de colores, los colores que tienen tache están ocultos y se les puede pintar, u ocultar, volviendo a pulsar el color correspondiente –y teniendo activa la herramienta “explorar”.*)



EJERCICIO. Para obtener los movimientos afines, dados por traslaciones y transformaciones lineales en el plano euclidiano clásico (no visto en perspectiva): a partir del paso 6 de la construcción anterior, en el que ya están definidos los dos vectores abstractos y el origen  $O$ , se puede copiar paso a paso la construcción usando la herramienta “Paralelas” para trazar las líneas definidas por un punto en el horizonte. Es decir, con el horizonte en el infinito. Hazlo. Quizá ayude ver el ejemplo de los movimientos rígidos que hacemos a continuación.

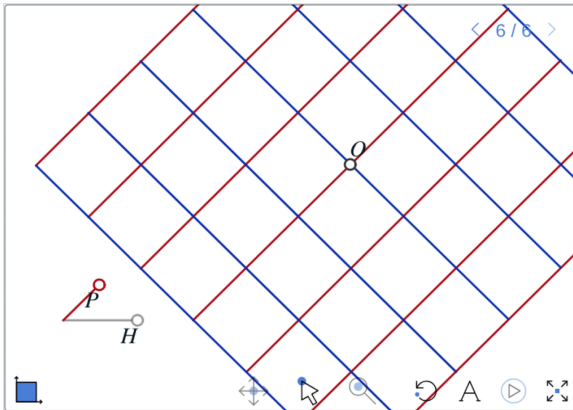
Esc:6↑bt



## 1.2.2. Movimientos rígidos (y lo que viene)

Los movimientos que nutren nuestra basta experiencia geométrico-espacial, son los *rígidos*: que no cambian distancias entre puntos.

Mover cualquier objeto involucra a uno de ellos. Pues todos sus puntos pasan de un lugar a otro en el espacio, y lo común en el mundo real es que en los sólidos que manipulamos no se alteren las



distancias entre sus puntos o componentes.

A sus análogos abstractos en el plano también se les llama *movimientos rígidos*. Las traslaciones son un ejemplo que ya vimos y el otro ejemplo básico son las *rotaciones*: fijar un punto (que trabaje como tachuela) y girar al plano a su alrededor un cierto ángulo. Mover, por ejemplo, a un libro sobre una mesa, involucra a ambos tipos de movimientos. Y más aún, cualquier movimiento rígido en el plano –o su efecto final, mejor dicho– queda especificado con estos dos datos (ángulo de rotación y vector de traslación)<sup>2</sup>.

**Escena 7.** En esta escena, los movimientos rígidos en el plano euclidiano de la pantalla están controlados por un punto libre, O, que da las traslaciones y un punto P en un círculo que determina a las rotaciones. Además, tenemos otro control, H, restringido a vivir en una línea que controla el tamaño; al incluirlo, nos expandemos al grupo de semejanzas.

<sup>2</sup>Donde –hay que especificar para los que saben– estamos suponiendo que los movimientos preservan orientación.

7.1

7.2

La dirección que determina P se pasa a la línea roja por O con la herramienta de trazo de paralelas. Y se obtiene su ortogonal azul con la herramienta de trazo de perpendiculares.

7.3

El círculo con centro en O y radio el segmento que determina H, da por intersección los dos puntos que definen a los vectores base.

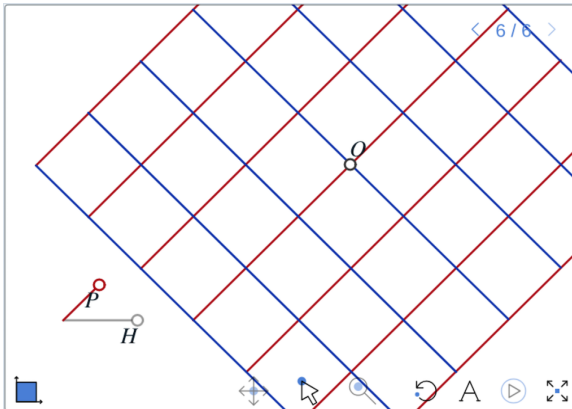
7.4

Con paralelas, se encuentra al cuadrado básico (o loseta), ... cuya diagonal y una paralela dan los carriles ... para la construcción en escalerita, ... que,

7.5

7.6

7.7



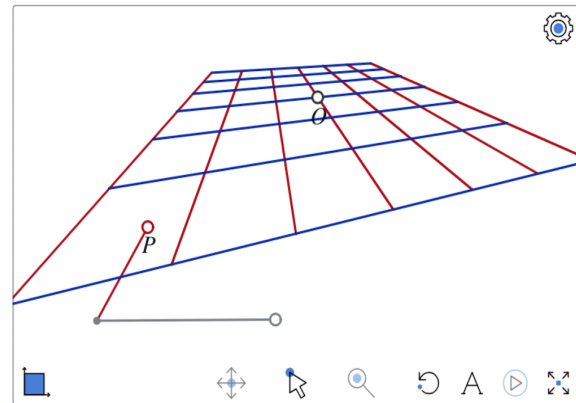
finalmente, se presenta por segmentos.

Esc:7↑bt

Veremos ahora que también se pueden construir los movimientos rígidos vistos en perspectiva. Pero para lograrlo hay mucho trabajo por hacer. De hecho, ésta es la construcción más larga y delicada de todo el libro y la aprovechamos para describir y motivar el trabajo teórico que implica y que es el que abordamos en los siguientes capítulos.

**Escena 8.** En esta escena se deambula en el grupo de los movimientos rígidos de un plano y en el

8.1



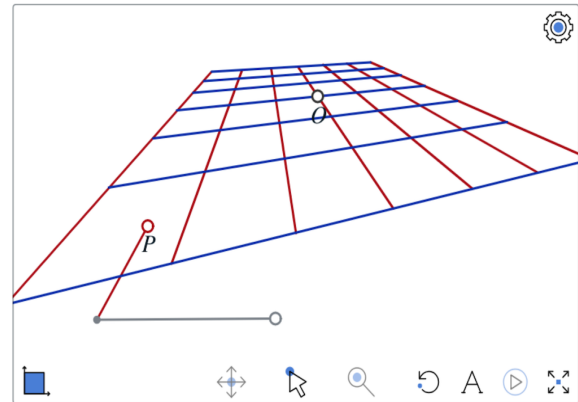
de sus semejanzas, pero ahora visto en perspectiva. Se controlan los movimientos rígidos con dos puntos como en la escena anterior: uno llamado  $O$  (y negro) que da las traslaciones de un cuadrado, y otro,  $P$  (rojo en la esquina inferior izquierda), que hace girar una línea alrededor de un punto fijo y con ello, controla a una rotación alrededor de  $O$ . Juegue con ellos: corresponde esta imagen abstracta a nuestras vivencias visuales de movimientos sobre un plano.

Hay un tercer punto de control, el gris, que se mueve en una línea horizontal y actúa como *homotesia*, es decir, “zoom” o amplificación-disminución alrededor de  $O$ . Visto en perspectiva, tiene el efecto de hacernos sentir que el cuadrado se acerca o se aleja paralelo a sí mismo y con el punto  $O$  en trayectoria directa a nosotros (al ojo). Ésta es la interpretación visual más plausible conforme a nuestra experiencia perceptiva del mundo real. Pero también se puede interpretar a este movimiento como algo que sucede dentro del mismo plano: el cuadrado crece o decrece (y hoy día, también nos es familiar por la manipulación de fotografías en

los teléfonos celulares). Es en éste último sentido que lo llamamos homotesia y amplía el grupo de movimientos rígidos al de las semejanzas.

8.2

El final de esta construcción es como antes: a partir de dos vectores y un horizonte se extiende una cuadrícula en escalerita. Lo difícil es construir esos dos vectores para que se muevan como se verían dos vectores perpendiculares girando rígidamente en el piso (manteniendo fijo su tamaño y su ángulo como en la construcción anterior).



El giro de un vector de tamaño fijo en un plano, produce un círculo y éste se ve como una *elipse*.

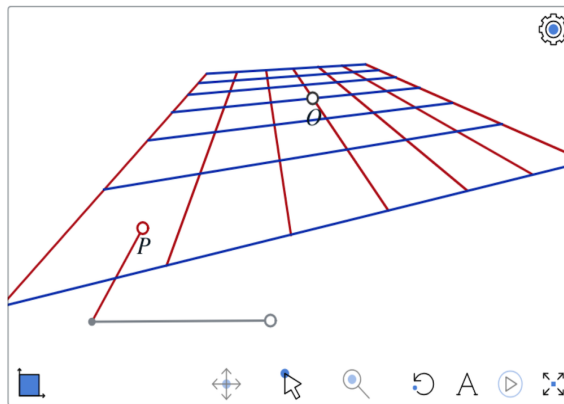
**Sí:** nuestro mundo visual está lleno de elipses. Los platos, las tazas, las ruedas de los coches, etc. Aunque sepamos que son círculos, lo que vemos son elipses. Levante la vista: casi seguro hay elipses en su entorno, y si no, vaya por un vaso de agua y observe con un ojo cerrado su boca en distintos ángulos. Lo que ve son elipses.

8.3

El meollo de esta construcción es trazar la elipse que veríamos si un cuadrado y el círculo que pasa por sus vértices están en el piso, pero el pintor nos entrega nada más el dibujo del cuadrado, es decir, los cuatro puntos de una loseta básica (en rosa). (Llévese a O cerca del horizonte para apreciar sin intromisiones a la *elipse básica*, y juegue con su dependencia orgánica de los cuatro puntos de la loseta; observe además, que al horizonte lo determina como en los primeros pasos de la primera construcción de una cuadrícula.)

Para ver que la geometría de la cuadrícula está gobernada por la loseta, regrese a O de su exilio (de estar cerca del horizonte) y llévelo justo al

centro de la loseta; ajuste el tamaño (con H) para que algún vértice caiga en la elipse, y luego gire (con P). Hay un momento –o mejor dicho, cuatro– en que coinciden el cuadrado y la loseta. Los cuatro vértices recorren la elipse como si la loseta (y ahora el cuadrado cuadrículado) girara en el piso (o en el plano que determina la loseta si ya no lo tiene horizontal). Al mover los vértices rosas que controlan la loseta, se mueve el plano como en la primera construcción; pero ahora tenemos que en



cada instancia hay, bien definida, una noción de rotaciones (para verlas, quizá convenga reajustar a  $O$  y a  $H$  para que el origen,  $O$ , regrese al centro de la loseta y un vértice de la cuadrícula retorne a la elipse básica).

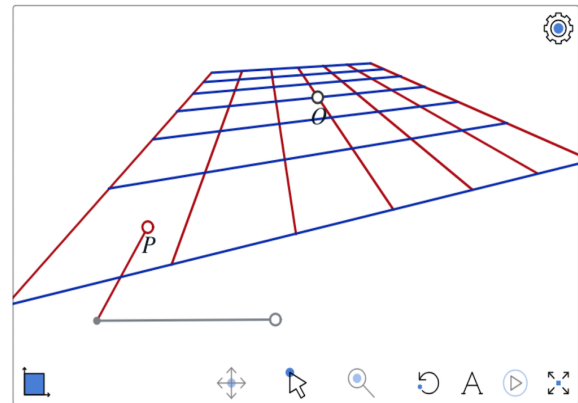
Resulta que con los cuatro vértices de la loseta se define una elipse única y más aún, que ésta se puede trazar usando únicamente a las herramientas de incidencia (trazo de líneas e intersección de ellas). Esto lo veremos y demostraremos con cuidado en los siguientes capítulos:

En el Capítulo 2 se define el concepto de *armónía* para cuartetos de puntos colineales –así como de líneas concurrentes– y se demuestran sus propiedades básicas. Con base en ello se definen las *reflexiones armónicas* que serán el fundamento para entender y construir formalmente a los grupos de movimientos con los que ahora estamos trabajando experimentalmente.

En el Capítulo 3, se define a la *curva de armónía de cuatro puntos* como el lugar geométrico de los puntos en el plano que los *ven* como cuarteta armónica y de las cuales, ésta elipse rosa asociada

a la loseta es un ejemplo. Vienen con la noción de *líneas tangentes* integrada (hemos trazado, en naranja, a las de la loseta básica). Luego se define el concepto más general de *curva armónica* y se demuestra el Teorema de Polaridad que las caracteriza por la enorme simetría proyectiva que ostentan. Esta manera de tratar y definir a las clásicas *curvas cónicas* es inédita.

En el Capítulo 4 se ve como la simetría de las curvas armónicas conduce a la descripción Kleiniana-



8.4

na de las diversas geometrías planas dentro de la geometría proyectiva de una manera mucho más precisa y formal de lo que lo estamos haciendo ahora. Y en particular se ve la noción de perpendicularidad a la que dan lugar una curva armónica y un horizonte lejos de ella.

8.5

Esta noción de perpendicularidad es la que se usa en la construcción para encontrar una base ortogonal de vectores centrada en la elipse y compatible con su geometría (en esta parte de la construcción también está incluida la influencia del factor de crecimiento  $H$  como una traslación). Así, se obtienen dos puntos que, con el centro de la loseta forman la base que se traslada a  $O$  para proceder con la construcción de la cuadrícula como siempre.

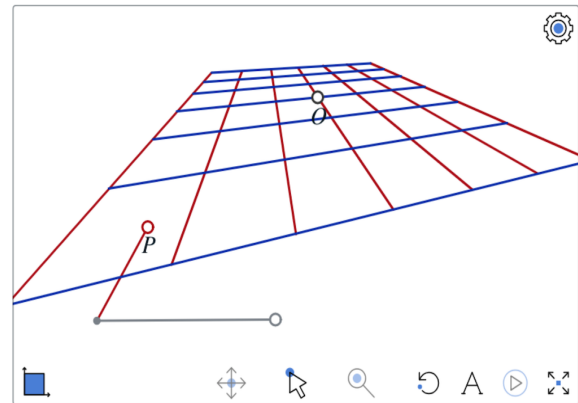
8.6

En términos constructivos, en la escena anterior de movimientos rígidos en el Plano Euclidiano, se utilizaron las herramientas de trazo de círculos, de paralelas y de perpendiculares. La construcción actual se logrará, en principio, con sólo dos herramientas: la de trazo de líneas y la de intersección; las llamadas *herramientas de incidencia*. Sin em-

bargo, se obtiene algo mucho más general que incluye a la construcción anterior cuando la loseta básica es un cuadrado: observe ésto experimentalmente.

Esc:8↑bt

Para las construcciones geométricas clásicas –a la griega– se usaba el calificativo *con regla y compás* que especificaba a esas dos *herramientas*. El compás se hace cargo de trazar círculos y de llevar distancias a otros lugares; la regla se usa para trazar líneas por dos puntos. Cuando con estas dos



herramientas se logra una construcción (como por ejemplo, *el trazo de una paralela, o una perpendicular, por un punto dado*), se le puede incorporar como herramienta que ahorra tiempo y pasos, sin que se pierda la esencia de seguir siendo con regla y compás. En este espíritu, la primera construcción de movimientos rígidos (que llamamos euclidiana) es una construcción con regla y compás en su sentido más clásico. Para la segunda (en perspectiva) no se uso nunca al compás. Es sólo con regla ... aunque, dicho así, hay que precisar.

Al implementar en computadora a las construcciones clásicas, hay que incorporar una nueva herramienta de *intersección* que da puntos a partir de dos líneas (u otros objetos más complicados como las curvas de armonía). Los griegos obviaban esto como herramienta: ahí estaba el punto de intersección; saltaba a la vista. Pero a las computadoras hay que señalárselos con cuidado y precisión: ¡miralo!; nóvalo e incorpóralo a tu base de datos. Para todas nuestras construcciones está es una herramienta básica. Veremos, en la última sección de este capítulo, como esta herramienta de intersección

de líneas cobra una gran importancia para la geometría proyectiva, de alguna manera, se incorpora como axioma.

Observemos, para concluir ésta sección, que si no cambiamos de escala, el grupo de movimientos rígidos es de dimensión 3: dos grados de libertad por las traslaciones y uno más por las rotaciones. Además, para cada punto tenemos un subgrupo de estos movimientos llamado su *estabilizador*: las rotaciones con ese punto como centro y que se puede pensar como un *círculo de movimientos*. Por supuesto, y como ya hemos indicado, al incluir a las homotecias (o zooms), el grupo crece a uno de dimensión 4: el de las llamadas *semejanzas*.

### 1.2.3. Movimientos hiperbólicos

El meollo de la construcción de los movimientos rígidos en perspectiva, es usar a la curva de armonía de una cuarteta de puntos (la elipse rosa). Resulta que una misma curva se puede expresar así para muchas cuartetos. Es en este sentido, ya sin una cuarteta fija de puntos que la defina, que la

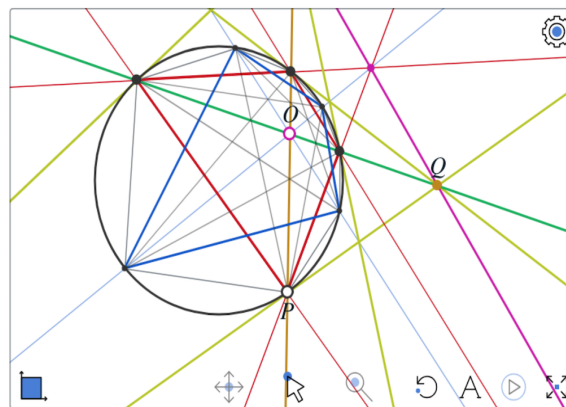
llamamos *curva armónica*. El ejemplo emblemático es un círculo y es el que vamos a utilizar ahora para dar una construcción capaz de recorrer a todas las posibles cuartetos de puntos que definen al círculo como curva de armonía.

Al transitar por sus posibilidades dinámicas, también se puede pensar a esta construcción como la de un grupo de movimientos proyectivos: los que dejan en su lugar al círculo. Es el grupo que Felix Klein distinguió como el de *movimientos hiperbólicos* y argumentaremos brevemente por qué da lugar a una geometría no euclidiana.

9.1

**Escena 9.** Necesitamos usar herramientas euclidianas (i.e., al compás). Primero, para trazar un círculo con centro en el punto gris que pronto ocultaremos.

Además de este círculo que se mantendrá fijo y al que conviene referirse por un nombre,  $\mathcal{C}$  llamémoslo, sean  $O$  un punto en el interior del círculo y  $P$  un punto en él (esto se puede escribir  $P \in \mathcal{C}$ , para leerse “ $P$  en  $\mathcal{C}$ ”). Estos son los datos iniciales. Tenemos entonces 3 grados de libertad –dos que da  $O$  y uno más de  $P$ – con las mismas característi-



cas locales que en la construcción de movimientos rígidos, nótese.

9.2

La línea  $OP$  corta a  $\mathcal{C}$  en otro punto además de  $P$ . Trazamos las tangentes al círculo en estos dos puntos, usando a la herramienta de trazo de líneas perpendiculares. (Este es nuestro último uso de las herramientas euclidianas; a partir de aquí ya sólo usaremos las de incidencia.) La intersección de las dos tangentes da un punto  $Q$  afuera del círculo  $\mathcal{C}$ .

9.3

La línea  $OQ$  corta al círculo en dos nuevos pun-



tos, que junto con los dos que ya teníamos definen un cuadrilátero (en rojo) inscrito en  $\mathcal{C}$ ; pero más que eso, es lo que llamaremos una *cuarteta armónica* en  $\mathcal{C}$  en el sentido de que la curva de armonía que define es precisamente  $\mathcal{C}$ .

9.4

Resulta entonces –y en su momento quedará demostrado– que el horizonte del cuadrilátero rojo contiene a  $Q$ .

Podríamos extender la cuadrícula de esta loseta, pero ahora nos interesa ver qué pasa adentro del círculo más que lo que sucede afuera.

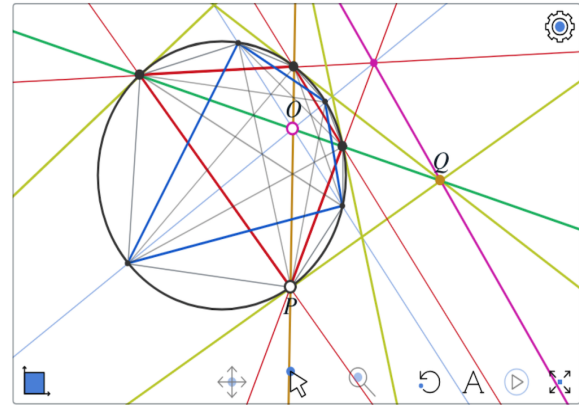
9.5

Para ello, trazamos desde los dos puntos básicos en el horizonte, líneas a  $O$ , y obtenemos otros cuatro puntos en el círculo  $\mathcal{C}$  con su correspondiente cuadrilátero (azul).

9.6

El resto de la construcción consta de trazar segmentos del octágono que tenemos definido en el círculo  $\mathcal{C}$ , y un par de tangentes más (en amarillo) –pero ahora ya las podemos trazar por incidencia: usando al punto que, de los cuatro que hay, se sentía solito en el horizonte (quizá haya que mover a  $P$  en el paso anterior para encontrarlo).

Disfrute por un momento de estos movimientos



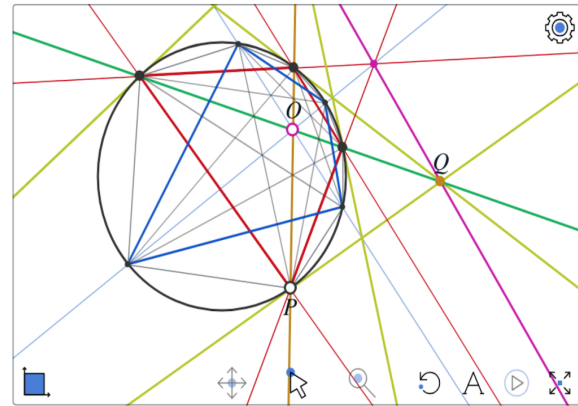
pues hay algo orgánico en ellos; no nos son totalmente ajenos o nuevos, nuestro aparato perceptivo intenta darles sentido... producen sensación de *déja-vu* y hay quien dice sentir tridimensionalidad.

Se puede mover a  $O$  por todo el interior del círculo (al que llamaremos *el disco* en el entendido de que es *abierto*, de que no incluye a los puntos de su límite  $\mathcal{C}$ ). Aunque nos interesan los movimientos del disco en sí mismo, hay que notar que  $O$  acarrea consigo no sólo al disco, sino a todo el

plano (a toda la pantalla y más allá), pero siempre partido nítidamente en tres pedazos: lo de afuera, el disco y lo que los separa, su frontera común, el círculo  $\mathcal{C}$ .

Si ahora movemos a  $P$ , todo gira agradable y coordinadamente alrededor de  $O$  –donde quiera del disco que éste. (*Es bonito animarlo al seleccionar a  $P$  y oprimir el botón de “play”, para que  $P$  de la vuelta a lo largo de su carril que es el círculo  $\mathcal{C}$* ); y este giro, visto afuera del disco se describe mejor como “empujar” o “trasladar” a lo largo del horizonte. Observe que entre más cerca del centro del disco esté  $O$ , el horizonte se aleja, y estas rotaciones se van pareciendo más a las euclidianas. Y además, en el centro coinciden, son justo las rotaciones euclidianas. Ahí también ( $O$  en el centro de  $\mathcal{C}$ ), los tres cuadriláteros –dos inscritos y uno circunscrito– se cuadran (se vuelven cuadrados).

Lo que queremos resaltar es la enorme similitud de este grupo de movimientos con los movimientos rígidos (euclidianos) de la escena anterior (sin considerar las homotесias). No solo por las tres dimensiones que tienen ambos grupos, sino por cómo



se obtienen éstas. Un punto ( $O$  en ambas escenas) se mueve con dos grados de libertad en lo que podemos llamar un *plano*, arrastrándolo consigo; y al dejarlo fijo en cualquier lugar, el otro punto de control,  $P$ , hace que todo gire a su alrededor.

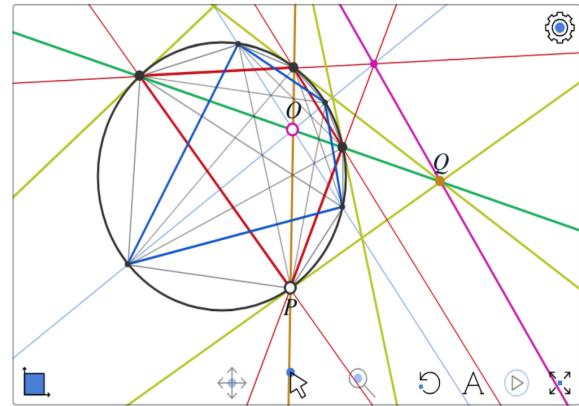
Este es el grupo de *movimientos hiperbólicos*. Se llama así porque son los movimientos rígidos (que preservan distancia) del *plano hiperbólico*:

Si consideramos al disco (recuérdese, el interior del círculo sin incluirlo) como **los puntos**, a los seg-

mentos de recta que lo cortan como **las líneas** y a todo esto como un plano geométrico en sí mismo, llamado **el plano hiperbólico** (o *Plano Kleiniano*); se cumple que por cada par de puntos pasa una única línea, el axioma básico de la geometría desde Euclides. Lo que **no** cumple este plano es el Axioma de las Paralelas: en el plano hiperbólico por un punto fuera de una línea pasa una infinidad de líneas que no la tocan y no una única que es lo que estipula el quinto postulado de Euclides. Tó-mese como ejemplo a una de las líneas rojas: por  $O$  están dibujadas 3 líneas que no la tocan.

Usando al grupo de movimientos podríamos, en principio, definir distancias en el plano hiperbólico como lo hacemos en el mundo real. Pues si decretamos que dos puntos son **la** vara de medir, que están a distancia 1 –para fijar ideas, digamos que son  $O$  y el primer punto de intersección en la línea naranja hacia  $P^-$ , podemos mover a esta vara a cualquier lugar para medir ahí con ella.

Además, también podemos medir ángulos: puesto que en el centro del disco las rotaciones corresponden a las euclidianas, a dos líneas que



se corten las podemos llevar ahí para medir su ángulo. En particular, los pares de **rectas perpendiculares** son exactamente las que vemos resaltadas (en naranja y verde, cruzándose en  $O$ ) y sus puntos límites corresponden a las cuartetas armónicas en el círculo límite  $\mathcal{C}$  (repetimos: las cuartetas que lo tienen como su curva de armonía).

El primero que hizo el trabajo para obtener fórmulas explícitas para estas distancias y ángulos usando coordenadas, fue el matemático italiano

Esc:9↑bt

Eugenio Beltrami (1835–1900). Se encontraban así, modelos analíticos (es decir, dados por medio de coordenadas y fórmulas explícitas) de una geometría no euclidiana.

Sin embargo, ésta geometría ya se había empezado a estudiar en abstracto como sistema axiomático, o como geometría sintética, en la mejor tradición de Euclides. En este terreno, hay que destacar los trabajos independientes y casi simultáneos de János Bolyai (húngaro: 1802–1860) y Nikolai Ivanovich Lobachevsky (ruso: 1792–1856). Pero en la comunidad matemática se seguía dudando de la pertinencia de sus estudios, de la *existencia* de esta geometría, pues contradecía al postulado de las paralelas. ¡No correspondía a la realidad! Pontificaban.

Con éste modelo de Beltrami, y otros que viven dentro de la geometría euclidiana –la *geometría oficial*, podríamos decir–, se saldaba una discusión filosófica profunda, apasionada y larga sobre la posibilidad de geometrías donde el postulado de las paralelas no fuera válido: ¡sí existían esas *geometrías no euclidianas*! Acabamos de mo-

vernos dentro de una de ellas.

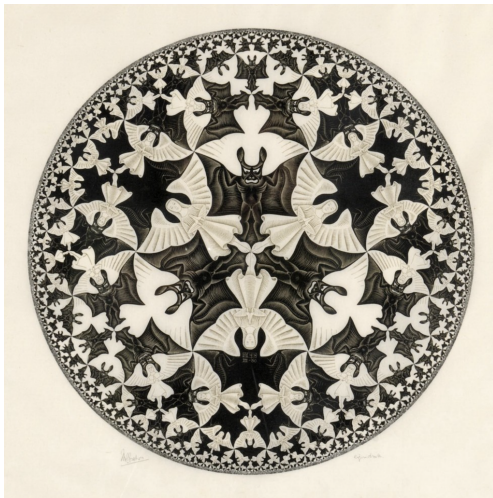
De manera independiente y casi simultánea al trabajo de Beltrami, Felix Klein en su programa de Erlangen que ya mencionamos, también propone este modelo del plano hiperbólico, haciendo énfasis en que vive dentro del plano proyectivo (o Plano Desarguesiano, que pronto definiremos) y en que el grupo de movimientos es una pieza de información fundamental (equivalente, o casi, a dar la métrica, como ya lo intentamos argumentar con varitas de medir). Por esta razón, a este modelo se le conoce como modelo de Beltrami-Klein, o modelo proyectivo y a veces se usa solo el nombre de Klein para él.

Pero hay otros modelos del plano hiperbólico; y cabe destacar al de Poincaré<sup>3</sup> porque es el que ha tenido más roce social... los artistas lo conocen. En él se basó Escher para su famoso mosaico *Ángeles y Demonios*. Este modelo tiene a los mismos puntos que el de Klein, el interior de un círculo –o

---

<sup>3</sup>Nombre en honor de su autor, el matemático francés Jules Henri Poincaré (1854 –1912).

un disco abierto-, pero las líneas son ahora arcos de círculos que cortan ortogonalmente a la frontera. No segmentos de línea como en el de Klein, por lo que las fórmulas explícitas para la distancia difieren. Pero el modelo de Poincaré tiene el encanto de ser *conforme*, es decir, los ángulos sí corresponden a lo que vemos aunque, por supuesto, no las distancias (todos los ángeles y todos los demonios son, hiperbólicamente, iguales).



### 1.3. Geometría proyectiva

Regresamos ahora a la perspectiva. Queremos fundamentar matemáticamente a la geometría con la que hemos estado experimentando al explorar las escenas anteriores y que, como muy pronto veremos, corresponde a la forma con que la evolución nos ha diseñado para percibir al mundo.

Primero, hay que tratar de dejar muy claro qué es una proyección, pues este es uno de los conceptos centrales de esta geometría “no métrica”. De hecho es lo que le da su nombre, pues una manera común de definir a la geometría proyectiva (aunque es poco descriptiva y, en buena medida, tautológica) es como aquella geometría que es invariante bajo proyecciones. Hemos usado mucho a este término –nos hemos atrevido pues tiene un uso cotidiano muy claro– y hemos visto múltiples ejemplos con las cuadrículas, pero ahora queremos precisarlo.

Con esto claro y tras escudriñar con lupa a la línea del horizonte, nos lanzaremos a presentar la idea genial, y que parte aguas, de Desargues.

### 1.3.1. Proyecciones

Un cuadro con buena perspectiva nos hace sentir la tridimensionalidad de una escena pues para reconstruir en la mente al mundo que nos rodea, nuestro sistema o aparato perceptivo usa el mismo *principio de proyección* que adoptaron los pintores renacentistas para pintar sus cuadros.

**Proyectar** es asociar a cada punto en la escena (llamada también **dominio** o **fuelle** de la proyección), el punto en el **lienzo** o **rango** de la proyección, en que lo corta la línea que une al punto-fuelle con el **foco** de la proyección. Es decir, el **principio de proyección** es que un punto fuente (en la escena), su punto imagen (en el lienzo) y el foco (el ojo del pintor), siempre están alineados.

Puesto que la luz viaja en líneas, la evolución implementó una muy buena aproximación de este principio en nuestro ojo, cuyo diseño compartimos con todos los animales superiores.

La pupila (el hoyito por el que pasan los rayos de luz) y el cristalino (el pequeño lente que atraviezan) seleccionan a los rayos lumínicos que pasa-

rían por un punto que es el foco de la proyección, y la retina juega el papel del lienzo o rango. Los “puntos”, “píxeles” o células de la retina son sensibles a la intensidad y el color del rayo que les pega; mandan esta información al cerebro y éste compagina y procesa las imágenes de los dos ojos para acabar de armar en nuestra mente la idea del mundo tridimensional que nos rodea.

Por supuesto, la cámara fotográfica se basa en este mismo principio de proyección –un sistema óptico que simula al foco y como lienzo una película o detector bidimensional fotosensible– que produce al cuadro ideal al que aspiraban los pintores renacentistas para escenas reales. No es de extrañar que el paradigma de lo que es pintar haya tenido que cambiar tan drásticamente con la aparición de la cámara fotográfica; pues el día de hoy, ya traemos todos en el bolsillo proyecciones perfectas de escenas reales que eran el sueño de los pintores renascentistas. Y efectivamente, hoy reconocemos todos que las fotografías reflejan bien cómo vemos al mundo; que lo representan en dos dimensiones tan realísticamente como es posible.



largo y chaparros a nuestra izquierda. Que estamos viendo fijo hacia adelante a mitad de su calle, con el lienzo enfrente de nosotros (vertical, a nuestra altura y perpendicular al edificio). Es simple la situación y la fachada, pero suficiente para nuestros fines que son acercarnos con cuidado racional al horizonte y cruzarlo.

Mover poco al centro del edificio, traslada al rectángulo dentro de un plano a nuestra izquierda: llamémos  $\pi$  (leído “pi”) a ese plano abstracto y fijo a unos pocos metros de nuestra oreja izquierda.

Llevémos ahora al centro del edificio, despacio, al otro lado del horizonte.

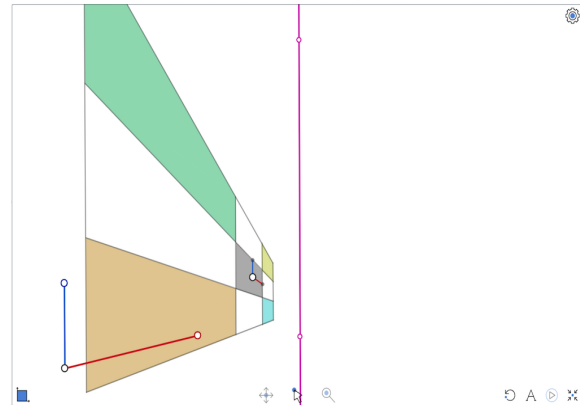
Nuestro aparato perceptivo asegura que el edificio se fue, bien alineadito dentro de su plano  $\pi$  y acelerando, hasta esconderse detrás de un punto cerca del horizonte; escondido tras ese punto-pollero saltó la frontera, y luego, regresó tan campanante por la otra banqueta para posarse como un edificio gemelo, justo enfrente del original.

Sin embargo, lo que está pasando es bien distinto. Nuestro aparato perceptivo nos quiere obligar a ver lo que –para él y de acuerdo a su experiencia–

parece verosímil –¡esa es su chamba!

Repita la operación y observe la posición de los colores. O, más drástico aún, siga moviendo al centro del edificio hacia la derecha hasta que por la izquierda aparezca su esquina delantera: y observe que ahí sí, los colores de arriba y abajo coinciden con el original.

Para explicar (racional y no visualmente) lo que está pasando, regresemos al centro del edificio al lado izquierdo y sigamos moviéndolo hacia la iz-



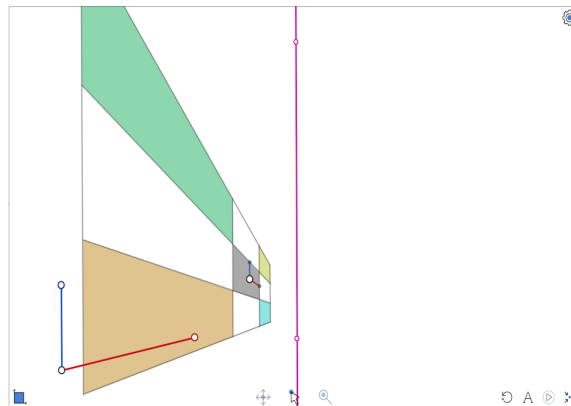


quierda (en el lienzo). Esto equivale a trasladar al edificio hacia atrás en su plano  $\pi$ , que sigue impávido a nuestra izquierda y perpendicular al lienzo. Hay un momento en el que algo aparece por el extremo derecho de la pantalla. Es cuando el rectángulo de la fachada ha llegado lo suficientemente atrás para que las líneas que van de él a nuestra cabeza (donde está el foco de la proyección) vuelvan a tocar al lienzo-pantalla. Lo que estamos viendo es la proyección al estilo ojo-cámara (con el lienzo detrás del foco) que enfoca justo hacia atrás de nosotros. Pero entonces lo que se obtiene es el “negativo”: lo de arriba, abajo; lo de abajo, arriba y la derecha intercambiada con la izquierda.

En los viejos tiempos de la fotografía por medios físico-químicos, no digitales, en la película fotosensible se imprimía lo que se llamaba el “negativo de la foto”; luego, había que pasar al positivo volviendo a proyectar con una fuente de luz y haciendo un proceso químico equivalente sobre el papel final. Ese proceso de volver a invertir la imagen lo hacen las cámaras de hoy (y nuestro cerebro) con un simple algoritmo.

En resumen, el lado derecho del horizonte corresponde a (es la proyección –tipo cámara– de) la parte trasera del mismo plano  $\pi$ , y por lo tanto, lo que se ve en la pantalla es su negativo; mientras que en el lado izquierdo vemos la clásica proyección tipo pintor.

El punto de control, obligado a vivir en la pantalla, da los centros de rectángulos en  $\pi$  tan al frente de nosotros, o tan atrás de nosotros, como queramos (izquierda o derecha del horizonte y qué tan



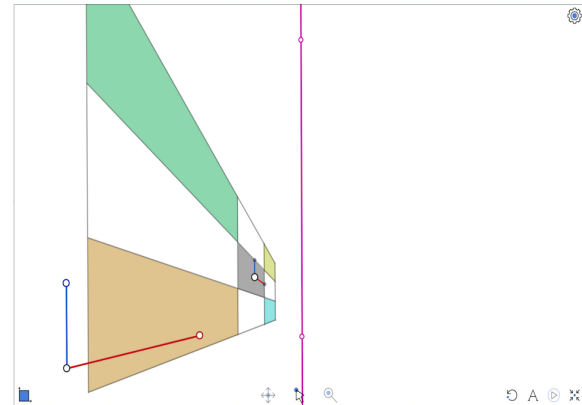
lejos está el edificio corresponde a qué tan cerca del horizonte esté el punto de control). A donde sí que no se puede llegar es a centros del edificio cerca de la dirección de la oreja izquierda, o en general en direcciones perpendiculares a nuestra vista (recuérdese, ésta se mantiene fija al frente) pues el lienzo (la pantalla) sigue justo enfrente y es chiquito. Ese tipo de puntos en  $\pi$  (muy cerca de nosotros) se proyectan en puntos muy lejanos en el plano-lienzo, al menos, caen fuera del lienzo-pantalla, que ésta muy confinado y acotado; es claramente finito.

Lo que sí hemos logrado en la configuración inicial de esta escena es tener rectángulos que aparecen en ambos lados y la razón es simple: el control que da el largo (o profundidad) de los rectángulos está puesto generosamente (juegue con él). Esto permite que pueden tener la esquina de adelante muy adelante y la de atrás, lo suficientemente atrás, para que, simultáneamente, ambos extremos puedan “salir en la foto”; o, mejor dicho: en la proyección.

La enseñanza clave que queremos sacar de esta

escena y su análisis es la siguiente.

Dada una proyección de un plano  $\pi$  (la fuente) en un plano  $\lambda$  (léase “lambda”, el lienzo), el *horizonte de la proyección* es una línea en el lienzo  $\lambda$  que se asocia visualmente con “el infinito” del plano fuente  $\pi$ ; y la proyección de una línea en  $\pi$  se aproxima por ambos lados del horizonte a un punto en él, que es su punto de fuga, los dos lados del horizonte corresponden a los dos extremos de la línea en  $\pi$ .



Dicho de otra manera, a un punto de fuga en el horizonte (en  $\lambda$ ) se le puede aproximar visualmente (y de hecho se le llega) por los dos extremos de las líneas (en  $\pi$ ) que están en el correspondiente haz de líneas paralelas.

Esc:10↑bt

Aunque físicamente se pueden diferenciar los dos procesos de proyección (pintor o cámara fotográfica) pues la luz viaja en las líneas con una dirección fija; en nuestras construcciones geométricas este elemento de dirección en las líneas de proyección nunca se tomó en cuenta. Se trazaron líneas en el lienzo, se intersectaron y ¡punto! Se amalgamaron entonces, teóricamente, ambos procesos físicos en un solo ente matemático: la proyección de un plano en otro desde un foco determinado.

Aunque hayamos deducido las construcciones de las cuadrículas en perspectiva pensando siempre en el problema del pintor, éstas abarcan más de lo que se pretendía con ellas: siguen funcionando del otro lado del horizonte; incluyen a la cámara, y más aún, compaginan geoméricamente a ambos casos. Este fenómeno es recurrente en mate-

máticas. Alguna construcción o proceso diseñado para un problema específico: funciona, es aplicable o ayuda a entender mucho más de lo que se tenía en mente; sentimos que cobra vida propia.

### 1.3.3. Espacio (y Plano) Desarguesianos

Lo que Girard Desargues propone para hacer sentido preciso de lo que las técnicas de la perspectiva indicaban, y que más adelante habría de llamarse Geometría Proyectiva, es ampliar al Plano y al Espacio Euclidianos. Añadirles, en abstracto, nuevos puntos. A estos nuevos puntos que llamaremos *ideales* se les debe situar en el infinito.

Esto último parece causar serios problemas existenciales si se insiste (concientemente o no) en que el Espacio Euclidiano es éste mismo espacio en el que vivimos y entonces sentimos que ya no hay lugar para añadir nada más. Pero **NO**: éste en el que vivimos es el Espacio Físico y el otro, el Euclidiano, es una construcción abstracta –cimentada en axiomas– que nos ha ayudado mucho a entender al Espacio Físico, pues surge de nuestra expe-

riencia cotidiana de vivir en él y de nuestro afán por dominarlo –¡que involucra entenderlo!–, pero que está muy, muy lejos de ser el Espacio Físico. En realidad, lo que sí podemos decir de los dos juntos es que si los sobreponemos en pequeña escala se corresponden tan, tan bien que hemos podido llevar a un hombre a la luna. Pero en el mejor de los casos, el Espacio Euclidiano es “*cómo debería de ser*” el Espacio Físico, aunque el teórico es solamente una aproximación o un modelo del real; y por tanto, al teórico se vale y se debe criticarle, y se le puede modificar o, como en el caso de Desargues, simplemente ampliar o extender.

Para cada clase de paralelismo de líneas en el Espacio Euclidiano, Desargues añade un nuevo punto, un **punto ideal** por el que pasan todas éstas líneas y que pensamos (sin necesidad de situar con mucha precisión) en el infinito. Justo lo que hemos visto en lontananza de los planos: que cualquier conjunto de líneas paralelas en ese plano concurre en un punto de su línea horizonte y que además, cualquier otra línea paralela –aunque ya no esté en ese mismo plano– también se ve que va a pasar

por ahí.

Se les da identidad propia a los puntos de fuga más allá de su aparición utilísima en los lienzos. Puesto que ya aparecen como proyección en los dibujos, Desargues se atreve a conferirles existencia abstracta previa (antes de proyectarlos y fuera del lienzo), para incorporarlos así a la teoría.

En consecuencia, *a cada línea euclidiana hay que añadirle un nuevo punto ideal*: el correspondiente a su clase de paralelismo y se llega a él, continuamente, por ambos extremos de la línea (que es lo que se observa en las proyecciones).

Y como el elemento neurálgico y básico de la geometría son las líneas, también se tiene que extender a este concepto:

Se decreta que *los puntos ideales que corresponden a las líneas en un plano dado forman una nueva línea* (en el infinito, y que se ve como su horizonte). Cuando lo proyectemos, pensamos que la línea-horizonte de la proyección es la imagen de sus puntos ideales. Es decir, los puntos ideales en el espacio abstracto se proyectan en los puntos de fuga correspondientes en los lienzos.

Y se deduce entonces que todos los planos paralelos al plano dado, también contienen a esa línea. (De nuevo, lo que ya habíamos observado: planos paralelos comparten horizonte.) Y por último, tenemos que introducir, o incorporar, a *un nuevo plano en el infinito formado por todos los puntos ideales*.

Hemos definido al **Espacio Desarguesiano**: a sus puntos, a sus líneas y a sus planos.

Por un ratito más, estamos obligados a considerarlo como si tuviera dos clases de puntos: los euclidianos y los ideales. Pero en cuanto veámos que cumplen reglas democráticas (todos las mismas) los podremos tratar sin xenofobias o discriminación de origen (en este caso, quién los concibió ¿Euclides o Desargues?).

Veremos ahora que en el Espacio Desarguesiano se cumple la propiedad básica y primordial de la geometría desde Euclides:

- *Por cualquier par de puntos pasa una única línea.*

Si los dos puntos son euclidianos, la línea es la euclidiana correspondiente (con todo y su flamante

punto ideal).

Si un punto es euclidiano y el otro ideal, la línea es la de la clase de paralelismo que indica el punto ideal y que pasa por el punto euclidiano (única según el quinto postulado).

Si los dos puntos son ideales: tómese cualquier punto euclidiano; por él pasan líneas que van a los dos ideales; estas líneas generan un plano pues se intersectan, y ese plano define en el infinito a la línea de puntos ideales que los contiene. □

Desargues se adelanta a su tiempo en la osadía de definir entes abstractos y le pega justo al clavo de la perspectiva; de la geometría de cómo vemos al mundo. Tan es así que todos los dibujos y construcciones que hemos presentado aquí, así como las imágenes de la bouyante industria de la animación por computadora, se basan en su concepción de cómo extender a la geometría euclidiana para que las proyecciones se comporten con la elegancia y precisión matemática que les corresponde. Pues en el Espacio Desarguesiano, como pronto veremos con cuidado, la proyección de un plano en

otro ya es uno a uno, se vuelve una correspondencia biunívoca; lo que antes era una línea en el lienzo pero no en la fuente, el celeberrimo y multicitado horizonte, que ha sido la línea heroína de todas nuestras construcciones, es ahora la imagen de la nueva línea al infinito (la que ésta formada por los puntos ideales de líneas en ese plano fuente). Y al verla y trabajarla en los dibujos, debe quedar claro que es una línea que se comporta como cualquier otra.

Por diversas razones que, como autores, no nos atrevemos a enlistar, ésta geometría y éste espacio han sido difíciles de asimilar. Pero si usted, amable lector, está leyendo esto y jugó con la dinámica de algunas de las escenas anteriores, ya no es tan fácil decir que no es natural pues ya experimentó con él. Todas las construcciones están en el **Plano Desarguesiano**, esto es, cualquier plano del Espacio Desarguesiano con su línea al infinito hecha de puntos ideales. Sin él simplemente no funcionan; nunca nos preguntamos si dos líneas que queríamos intersectar eran paralelas o no. De haber tenido ese prurito, hubiéramos tenido que avanzar a

tropezones insufribles. Así que ya tiene vivencias de cómo se comporta el Plano Desarguesiano. Y sabe bien que en pequeñas porciones, es igualito al Euclidiano; en donde difieren es lejos de la pantalla y en su globalidad.

Pero los añadidos de Desargues sí implican una fuerte ruptura con la geometría euclidiana clásica y sobretodo en el tema del paralelismo. En el Plano Desarguesiano se elimina de tajo esa suerte de compadrazgo:

- *Cualquier par de rectas en un plano se intersectan en un punto.*

Si vienen de líneas euclidianas y éstas se intersectaban: ahí ésta ya el punto. Y si no se tocaban es que eran paralelas, pero entonces, ahora comparten su punto ideal.

Si una es la del infinito, la otra es euclidiana y comparten un punto ideal. □

Dentro de un Plano Desarguesiano se logra una democracia total: *cualesquiera dos puntos generan una línea y cualesquiera dos líneas se cortan en un punto.* Este simple hecho, como observación

abstracta y lógica empieza un nuevo coqueteo con una simetría que, con el tiempo, acabó por llamarse “**dualidad**”: hay puntos y hay líneas relacionados por algo que hemos llamado “incidencia” para que se pueda aplicar en dos sentidos –un punto incide (“está”) en una línea si y sólo si esa línea incide en el punto (lo contiene); y hay dos operaciones “generar” o “trazar” –dícese de la línea que pasa por (o incide en) dos puntos–, y la de “cortar” o “intersecar” que de dos líneas siempre produce un punto (el que incide en ambas). A este nuevo fenómeno de *dualidad* que aparece en el Plano Desarguesiano, habremos de manejarlo con cuidado. A los matemáticos les llevó siglos familiarizarse con él, pero debemos mantenerlo presente pues devino en algo importante y profundo.

Y, regresando al Espacio Desarguesiano (de 3 dimensiones), también ahí se termina con los casos especiales; ya no hay paralelismo. Demostremos que:

- *Dos planos distintos se intersectan en una línea.*

Si uno de ellos es el del infinito, el otro es euclidiano y determina una línea de puntos ideales que es la intersección.

Si los dos son euclidianos y no son paralelos, sabemos desde Euclides que se cortan en una línea; y si sí son paralelos, comparten ahora una línea en el infinito. □

Y también tenemos que:

- *Un plano y una línea no contenida en él se cortan en un punto.*

Dejamos de ejercicio argumentarlo con detalle como en los casos anteriores.

Así que en el Espacio Desarguesiano no hay paralelismo. Y no es que se le haya eliminado sin piedad. Se le cambió por el concepto más flexible (y mundano) de irse a tocar en un cierto lugar; los paralelos euclidianos son los que ahora se tocan en el infinito.

Por último, demostramos que en el Espacio Desarguesiano:

- *Una proyección de un plano en otro plano es una biyección,*

donde *biyección* es una correspondencia biunívoca o uno-a-uno (1-1).

Consideremos dos planos,  $\pi$  como fuente y  $\lambda$  como lienzo, y un punto  $F$  (fuera de ellos) como foco. La proyección de  $\pi$  en  $\lambda$  es una función que a un punto  $X \in \pi$  (recuérdese, se lee “ $X$  en  $\pi$ ”), le asocia la intersección de su línea al foco,  $XF$ , con el lienzo  $\lambda$ . Si le ponemos nombre a la función, digamos que  $\rho$  (léase “rho”), podemos expresar esto simbólicamente como

$$\begin{aligned} \rho : \pi &\rightarrow \lambda \\ X &\mapsto (XF) \cap \lambda, \end{aligned}$$

(esta notación específica en la primera línea, que  $\rho$  es una función con *dominio* o fuente  $\pi$  y rango o *codominio*  $\lambda$ ; y en la segunda línea da la *regla de correspondencia*: a un elemento  $X$  —del dominio, se sobreentiende—  $\rho$  le asocia o lo manda en  $(XF) \cap \lambda$  —que debe ser un elemento del codominio. En los términos funcionales que se usan en el cálculo, esta regla se escribiría  $\rho(X) = (XF) \cap \lambda$ .)

Esta función está bien definida pues cualquier línea (en este caso  $XF$ ) intersecciona a cualquier

plano (en este caso  $\lambda$ ). Obsérvese que en el Espacio Euclidiano, esta función ni siquiera está bien definida, pues quisiera mandar a ciertos puntos al infinito (cuando la línea por el foco es paralela al plano del lienzo).

Que una función sea biyección, equivale a que tenga una función inversa. Y en nuestro caso, la función inversa, que va de  $\lambda$  a  $\pi$  es la proyección desde el mismo foco  $F$ . Pues se tiene que  $X \in \pi$  corresponde a  $Y \in \lambda$  si y sólo si  $X, Y$  y  $F$  están alineados ( $F$  no distingue a  $X$  de  $Y$ ). Por tanto, es una biyección como queríamos demostrar.  $\square$

### 1.3.4. Cubo en perspectiva

Hasta aquí, solo hemos proyectado planos en planos. Todas nuestras construcciones se refieren a planos; aunque, por supuesto, hemos supuesto que éstos viven en el espacio. Queremos ver ahora que la extensión del Espacio Euclidiano al Desarguesiano se vuelve muy útil para hablar con precisión de cómo vemos al mundo, de las técnicas de



la perspectiva para la pintura o de la representación plana del espacio mediante proyecciones.

Observemos primero que al fijar un lienzo  $\lambda$  (que es un plano) y un punto  $F$  fuera de él, que será el foco (el ojo del pintor o del observador), se puede extender la *función proyección* a casi todo el espacio.

Denotemos al Espacio Desarguesiano como  $\mathbb{D}^3$  —el exponente 3 es por la dimensión y se lee “Dé tres”— y análogamente, denotaremos al Espacio Euclidiano  $\mathbb{E}^3$  como es usual.

Para cualquier punto  $X \in \mathbb{D}^3$  que no sea el mismo  $F$ , se puede trazar la línea a  $F$  e intersectar a esta línea con el lienzo  $\lambda$ . Esto nos da una *proyección* que es la función

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{D}^3 \setminus F &\rightarrow \lambda \\ X &\mapsto (XF) \cap \lambda, \end{aligned}$$

donde el símbolo  $\setminus$  es “menos” a nivel de conjuntos ( $\mathbb{D}^3 \setminus F$  se lee “Dé-tres menos eFe”) y significa “todos los puntos menos eFe”, cuya regla de correspondencia es la misma que para planos; extendiendo a la proyección de un plano a otro lo más

posible. Un cuadro o una escena en perspectiva es el resultado de usar a está función de proyección sobre algún subconjunto del dominio (los puntos que dan su color o textura a la imagen).

El punto clave que ha hecho que todas nuestras construcciones tengan sentido es que:

- *Una proyección manda líneas fuera del foco en líneas (en el lienzo).*

Efectivamente, una línea  $\ell$  que no pasa por  $F$  tiene como imagen de la proyección  $\rho$  a la intersección del plano que generan (o que pasa por) la línea  $\ell$  y el foco  $F$ , con el lienzo  $\lambda$ ; simbólicamente (y pronto mejoraremos nuestra notación), debíamos escribir algo como

$$\ell \text{ se proyecta en } (\ell \vee F) \cap \lambda,$$

donde  $\vee$  es un símbolo para “el plano que generan”. Así que si conocemos a dos puntos en el lienzo que están en la imagen de  $\ell$ , ya sabemos a dónde va todo  $\ell$ : a la línea que definen en  $\lambda$ ; esto fue lo que se usó una y otra y otra vez.  $\square$

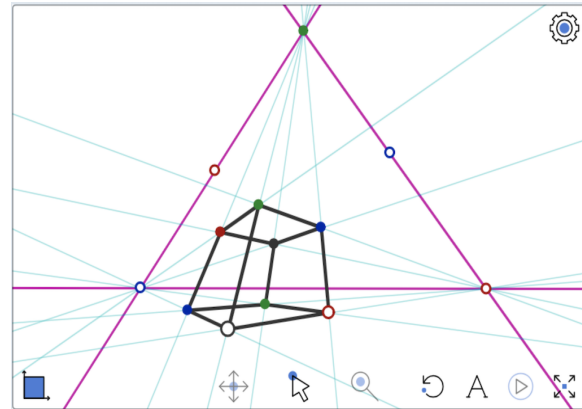
El caso faltante de una línea,  $\ell$ , es cuando sí pasa por el foco  $F$ , cuando incide en  $F$ , y es un caso muy importante. Todos sus puntos (distintos de  $F$ ) se dibujan, se proyectan, en el mismo punto del lienzo: en la intersección de  $\ell$  con  $\lambda$ ; y *no se distinguen desde  $F$* . Pero este punto en el lienzo se convierte entonces en el **punto de fuga** de la clase de paralelismo de  $\ell$ ; pues, como también es la imagen bajo la proyección  $\rho$  del punto ideal (que está en  $\ell$ ) de esa clase de paralelismo: por ahí tiene que pasar la imagen de cualquier línea paralela a  $\ell$ .

Ahora queremos usar lo que hemos aprendido y definido para proyectar a un cubo sólido virtual: algo de tres dimensiones. Vamos a dibujar con buena perspectiva a lo que llamaremos un *cubo*, aunque estrictamente hablando sea una caja o un paralelepípedo (no queremos discutir tamaños o ángulos). Supondremos que el cubo está en el Espacio Euclidiano,  $\mathbb{E}^3$ , y algunos de los puntos ideales, que introdujo Desargues ( $\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{E}^3$ ) intervendrán para ayudarnos a dibujarlo, con lo que se puede llamar “la técnica de perspectiva renacentista”.

Escogimos a un cubo pues sus aristas y sus caras tienen relaciones de paralelismo muy nítidas y distintas del espacio tridimensional. Sus 12 aristas se agrupan en tres cuartetos de segmentos paralelos y entonces, las líneas que generan determinan a tres puntos ideales, que se proyectan en los de las “perspectivas de tres puntos de fuga”. Además, las líneas por esos tres puntos serán los horizontes de las caras por parejas opuestas.

**Escena 11.** Empezamos con ese triángulo (que vive

11.1



en el plano al infinito ( $\mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{E}^3$ ) pero que se proyecta biyectivamente al lienzo y de él surge el andamio constructivo auxiliar). Lo hemos definido con los dos puntos de fuga horizontales (de los ejes  $x$  y  $y$ , podríamos decir), y —para poder mover lejos al tercer punto de fuga (el del eje  $z$ ) y no tenerlo confinado a vivir en la pantalla— hemos definido a las líneas horizonte de los dos tipos de planos verticales con sendos puntos libres a los que asignaremos el papel de *infinitos diagonales*. Además, necesitamos un punto como esquina del cubo, que llamaremos *origen* (a éste sí lo pensaremos como la proyección de un punto euclidiano, el primero pues los demás han sido ideales), y necesitamos un segundo punto euclidiano en la dirección de uno de los ejes, para controlar con él al tamaño del cubo.

11.2

Trazos al infinito diagonal y al vertical nos dan una nueva esquina, o vértice, del cubo. Y con él, trazando a los puntos de fuga correspondientes, podemos construir la primera cara.

11.4

Puesto que ya tenemos uno de sus lados, usando al otro infinito diagonal construimos de manera

análoga a la segunda cara vertical.

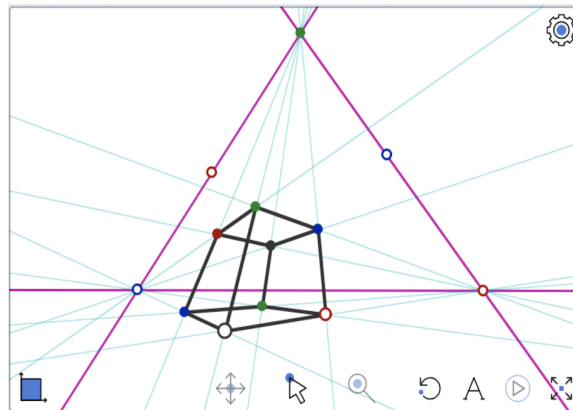
11.5

De aquí, ya se pueden construir como siempre las dos caras horizontales. Y, como por arte de magia, la arista vertical faltante se alinea con su punto de fuga.

11.6

Pero no es magia, pues hemos construido al cubo usando que cada cara es paralela a su opuesta.

Es interesante jugar con esta figura. Además, es ilustrativo de cómo vemos al mundo, pues se puede lograr, en principio, a cualquier vista de cual-



quier paralelepípedo. Se lo dejamos como tarea formativa y lúdica al lector: por ejemplo, ver la esquina de un edificio o de un ring de boxeo visto desde arriba (hay que pasar al infinito vertical, o del eje-z, a que esté abajo); cambiar las proporciones con los infinitos diagonales; pasarse de las líneas-horizonte, etc.

A partir de la figura que tenemos ahora (si se movió, quizá convenga recargarla para tenerla en la posición inicial mientras hablamos de ella), podríamos construir cuadrículas en los tres planos básicos que compaginarían bien para “cubicular” al espacio y así poder situar con precisión a cualquier objeto en la escena tridimensional respecto al cubo. Pero preferimos observar algo simple y elegante que después nos será útil.

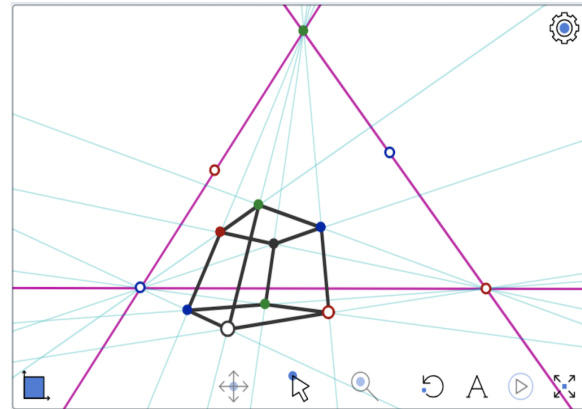
Los tres puntos ideales de las diagonales de las caras (sólo nos faltaba definir a uno) tienen una propiedad muy especial que llamaremos ser una *configuración de Ceva* (pues hay que asociarla al nombre del matemático italiano Giovanni Ceva (1647-1734) por la hipótesis de su famoso teorema –cuya conclusión, ahorita no viene al caso).

A saber, ser una **configuración de Ceva** consiste de tres puntos en los tres lados de un triángulo cuyas líneas al vértice opuesto son concurrentes.

La razón de ser de este hecho, surge de observar que las líneas descritas (de un infinito diagonal al vértice opuesto en el triángulo de horizontes) son los horizontes de los planos diagonales que cortan al cubo en dos mitades simétricas:

hay un plano rojo,  
otro pintado de verde

11.9  
11.10  
11.11



11.7

11.8

11.12 y el tercero es azul.

Estos tres planos comparten a la “tri-diagonal”: la línea (gris) que va del origen al vértice opuesto. Por tanto su punto de fuga tiene que estar en sus tres horizontes: es el punto deseado (el de Ceva); este mismo argumento se pudo haber hecho con los puntos y líneas ideales, en el infinito, en vez de aquí en el lienzo con puntos de fuga y horizontes, pues como hemos demostrado, la proyección del plano al infinito en el lienzo es una biyección que preserva líneas.

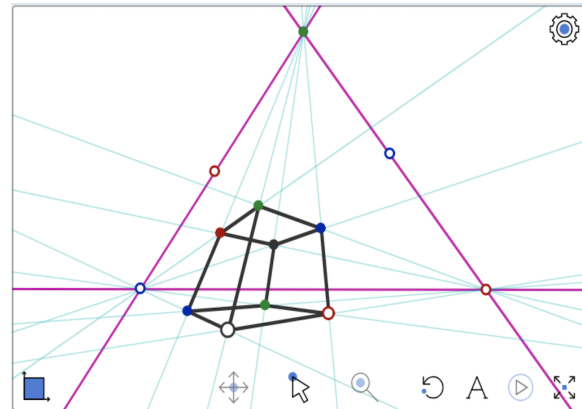
11.13

Y ya que estamos aquí, observemos que las otras diagonales de las tres caras del cubo en el origen están en un plano (el amarillo); así que sus puntos de fuga están alineados en su horizonte. Esto es lo que debe llamarse una **configuración de Menelao**, asociada al nombre del matemático griego Menelao de Alejandría (70-140), pues es justo la hipótesis de su célebre teorema —tres puntos en los lados de un triángulo que están alineados.

Esta escena, o más bien dicho, el fenómeno que está ocurriendo —atrás, en el plano al infinito— lo volveremos a ver con cuidado y más formalidad en

el siguiente capítulo. Falta tener bien definido el concepto de armonía, que en este caso, es el que relaciona a ambas ternas, la de Ceva y la de Menelao. Por el momento, que quede como muestra del tipo de resultados matemáticos a los que se puede aspirar en la geometría que arrancó Desargues; de hecho, su Teorema será un ingrediente protagónico en la demostración.

EJERCICIO. Conociendo al punto de fuga (o ideal) de la tri-diagonal del cubo, ¿se podrá construir directamente





## 1.4. Axiomas

Una de las aportaciones más valiosas de la matemática griega fue el método axiomático-deductivo: a partir de unos axiomas que se aceptan como válidos, se deducen otras afirmaciones, llamadas teoremas, y poco a poco se conforma una teoría.

El ejemplo emblemático es la Geometría Euclidiana. Los cinco postulados de Euclides fundamentaron a la primera teoría científica exitosa (en el sentido de modelar y poder predecir con impresionante precisión a la realidad en el ámbito métrico inmediato). *Los Elementos* de Euclides (325-265 ac, aprox.) es la referencia para esta teoría; es un compendio de libros que fue lectura obligada de la gente culta casi hasta la fecha y fue un ejemplo paradigmático para lo que hoy llamamos ciencia.

Aunque los postulados de Euclides se refieren al plano que es un objeto abstracto, la teoría se extiende al espacio tridimensional sin que esté claro, o bien determinado, cómo se extiende el sistema axiomático para incluir al espacio de tres dimen-

siones. Sin embargo, es un hecho que la idea del Espacio Euclidiano y sus propiedades básicas están perfectamente aceptadas y socializadas desde Euclides y la matemática griega, pues es muy fácil confundirlo con el espacio físico que nos rodea. En el presente libro, hemos llegado hasta aquí basados en esa teoría, que es exactamente la misma que conocían bien y usaban tanto Euclides como Desargues y los pintores renascentistas.

Que los axiomas para la Geometría Euclidiana tridimensional no estén estandarizados, tampoco es relevante históricamente, pues la axiomática euclidiana de la geometría pasó a un segundo plano (teórico, mas no didáctico) con el surgimiento de la geometría analítica (recuérdese, Rene Descartes su autor, es contemporáneo y paisano de Desargues). En cuanto se demuestra que hacer geometría en el plano euclidiano es equivalente a trabajar con parejas de números reales, la responsabilidad del método deductivo se transfiere al sistema axiomático que define a los números reales, pues con ellos se puede modelar al Plano Euclidiano y a la geometría clásica. Pero entonces, con

ternas de números reales se modela al Espacio Euclidiano... y ¿por qué pararse en tres? Con  $n$ -adas de números reales se modela a lo que ahora llamamos el Espacio Euclidiano de dimensión  $n$ , aunque Euclides ni haya soñado en su posibilidad.

Hemos definido al Espacio Desarguesiano con base en el Espacio Euclidiano clásico o sintético (sin coordenadas), como la extensión de él que da sentido matemático formal a la perspectiva. Pero cobra vida propia: las escenas dinámicas que hemos visto lo indican, y se entreve una coherencia y elegancia teórica que invita a su exploración. Veremos ahora, para concluir con este capítulo de presentación, que con cuatro axiomas muy simples, inspirados en los postulados de Euclides, se puede capturar la esencia de esta nueva geometría, que además, como observó Klein y ya vislumbramos, incluirá a las otras geometrías –tanto a la clásica Euclidiana como a las no euclidianas. Al definir a la *Geometría Proyectiva* en términos axiomáticos se logra esa homogeneidad que queríamos; ya no habrá distintos tipos de puntos, todos son iguales pues cumplen y están sujetos a las mismas reglas.

Pero entonces, la argumentación se debe basar en los axiomas y hay que hacer un trabajo de reconstrucción: demostrar en este nuevo contexto general lo poco que, formalmente, ya sabíamos (lo vivido, nadie lo quita).

Uno de los ingredientes distintivos de la axiomática que presentamos es que la tercera dimensión queda integrada desde un principio. Además, será una idea central en las primeras demostraciones fundamentales (las de los Teoremas Armónico y de Desargues en el Capítulo 2).

A la larga, en el Capítulo ??, veremos que estos cuatro axiomas conducen a una “aritmización” de la geometría, las líneas no pueden ser cualquier conjunto: la geometría les impone una estructura algebraica. Aquí, los axiomas de los campos numéricos se convierten en teoremas, y esa profunda intuición griega de que la geometría está en el meollo de lo que se puede entender,<sup>4</sup> reafirma su relevancia.

---

<sup>4</sup>La palabra *Matemática* significaba para los antiguos griegos: “lo que se debe enseñar porque se puede entender”.



### 1.4.1. El Primer Axioma (puntos y líneas)

El Primer Postulado de Euclides, “por dos puntos pasa una línea única”, seguirá siendo nuestro axioma básico. Además, como énfasis a su importancia histórica y a su profundidad teórica, lo usamos para darle un sentido formal a la palabra “geometría”.

En *Los Elementos* se precisa, con el Segundo Postulado, que “las líneas se extienden tanto como uno quiera en ambas direcciones”. Lo cual hace pensar que la idea de línea ha cambiado de entonces a la fecha. Quizá sea por la influencia de la geometría analítica. Pero ahora ya no sentimos la necesidad de aclarar o especificar —por supuesto, pensamos, es infinita en las dos direcciones; esa es la idea contemporánea de línea. Es posible que para los griegos la idea de línea sea más cercana a lo que ahora entendemos como segmento. Sin embargo, algo de razón tenía Euclides: no es tan evidente qué es lo que pasa fuera de un segmento o, en nuestras condiciones actuales, fuera de la pan-

talla; pues en el caso del Espacio Desarguesiano lo de las dos direcciones tampoco es muy claro globalmente. Así que mejor lo dejamos así y lo hacemos preciso con una definición formal.

**Definición.** Una *Geometría* consta de un conjunto a cuyos elementos les llamamos *puntos*, junto con una familia de subconjuntos distinguidos llamados sus *líneas* que cumple:

**Axioma I.** *Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una única línea.*

El concepto de línea, y a veces usamos *recta* como sinónimo, se reduce a ser un conjunto de puntos sin ninguna atribución mágica respecto a distancias o tiempos —conceptos externos a una geometría como la estamos definiendo. Las líneas tampoco tienen definido eso de sus “extremos” o “direcciones”; su poder va a radicar exclusivamente en sus propiedades de *incidencia*. Donde decimos que un punto *incide* en una línea si es elemento de ella y al revés, que una línea *incide* en un punto si lo contiene y en este caso, también decimos que *pasa* por él, como en el enunciado.

En ocasiones, ampliaremos el significado de los términos para decir que dos líneas *inciden* si hay un punto que incide en ambas, y también diremos que se *cortan* o *intersectan* (es decir, las usamos como abreviación de la frase “*tienen intersección no vacía*”).

Resulta ser una afortunada coincidencia lingüística (o bien, un acierto de la terminología matemática), como señala Stillwell en [ref??], que converjan las dos acepciones de *coincidencia*. Por un lado, con el significado técnico que acabamos de precisar, que tres puntos sean *colineales* significa que *inciden* en una misma recta (*co-inciden*), y eso resulta ser una *coincidencia* en la acepción común de la palabra, pues por lo general formarían un triángulo y generarían tres rectas. Y por el otro lado, que tres (o más) líneas sean *concurrentes* significa que *inciden* en un mismo punto; es una *coincidencia* y también una notable *coincidencia*.

Al Axioma I, se le puede pensar como una *operación* que de una pareja de puntos nos produce a una línea de la geometría. Convendrá tratar a esta operación como tal, y para esto usar una notación

pertinente. Como en algún momento ya lo hicimos, usaremos el símbolo  $\vee$  que se puede leer “*cuña*”, o “la línea generada por”, y entonces podemos reescribir al Axioma I de manera más técnica como

**Axioma I.** *Por dos puntos distintos A y B pasa una única línea:*

$$A \vee B = B \vee A.$$

Debemos remarcar que una implicación muy usada del Axioma I es que:

- *Dos líneas distintas tienen a lo más un punto en común.*

Pues si tuvieran dos, la unicidad en el enunciado del Axioma I, implica que son la misma. Algunos autores prefieren enunciar este hecho como otro axioma, pero con añadir la palabra *única* se hace innecesario.

Por último, debemos señalar que para efecto de las construcciones, el Axioma I está representado en la herramienta “Punto/Línea”. Al picar en la pantalla con esa herramienta activa, se define un

punto y al arrastrar de un punto a otro se define una línea: la que el Axioma I prevé para los dos puntos dados.

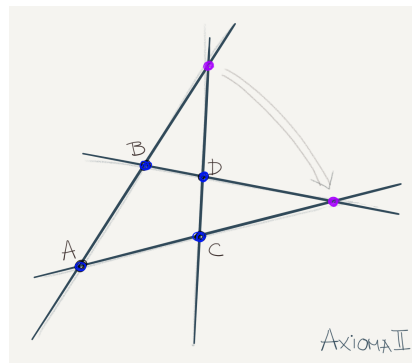
### 1.4.2. Segundo Axioma (intersección de líneas)

Los postulados tercero y cuarto de Euclides se refieren a círculos y perpendicularidad de líneas. Son justo con lo que no nos queremos involucrar. La gran diferencia con la Geometría Euclidiana es que aquí no hay concepto de distancia ni de ángulo –como medida. Esas nociones o sus equivalentes no serán únicas o parte del sistema de axiomas sino que, en su momento, se construyen y se escogen entre muchas posibilidades.

Por último está el Quinto Postulado, el famoso de las paralelas. Tiene varias maneras de enunciarse que son equivalentes. La original se refiere a cuándo y dónde (en qué dirección) se van a cortar dos líneas. No queremos entrar en detalle, sino señalar que es una afirmación sobre cuándo dos

líneas se cortan o intersectan. El axioma proyectivo correspondiente es más fácil de enunciar pues lo que pretende establecer es que todas las líneas en un plano se tocan. Sin embargo, el concepto de *plano* aún no está definido formalmente en el sistema axiomático, así que se le da la vuelta a ese hecho con incidencia como sigue.

**Axioma II.** *Dados cuatro puntos distintos  $A, B, C, D$ , si las líneas  $A \vee B$  y  $C \vee D$  inciden en un punto, entonces también las líneas  $A \vee C$  y  $B \vee D$  inciden en un punto.*



Primero hay que notar que el Axioma II no se cumple en la Geometría Euclidiana; es muy fácil dibujar un contraejemplo moviendo a uno de los puntos  $A$  o  $C$  para que la línea  $A \vee C$  sea paralela a  $B \vee D$ . Pero es justo el caso en el que los nuevos puntos ideales que añadió Desargues entran en juego. Así que éste es el axioma que marca una gran diferencia entre las geometrías, eliminando al paralelismo; y en el Espacio Desarguesiano se cumple. En cierta manera, y para este caso en que las dos líneas son paralelas, es tan abstracto como el quinto postulado de Euclides, pues habla sobre lo que pasa fuera y muy lejos de la hoja de papel, la pantalla o el pizarrón. Uno asegura que *nunca de los nuncas* se van a tocar, pero entonces nos exige una precisión endiablada en nuestras mediciones; el otro se hace de la vista gorda con lo que pase muy muy lejos, pero declara que sí: que siempre haya un punto en la intersección. Ambos son abstractos; afirman algo que no vemos con precisión.

El Axioma II, que a veces llamamos *de intersección*, produce un punto a partir de una pareja de líneas ( $A \vee C$  y  $B \vee D$ ). Más no en cualquier situa-

ción. Hay una condición que ingeniosamente pide que estén en un plano, sin que este concepto esté definido formalmente. Pronto veremos que en el caso en que sólo haya un plano (que la geometría sea de dimensión 2) entonces este axioma equivale a que cualquier par de líneas se intersecten y se convierte en el *dual* del I (que resa “dos puntos *generan* una línea”, y II: “dos líneas se *intersectan* en un punto”).

En el dibujo está el esquema del caso general del Axioma II. Pero hay dos casos particulares.

Primero, cuando uno de los cuatro puntos está en la recta de los otros dos (y entonces la intersección que se pide como hipótesis es ese punto).

Y segundo, cuando los cuatro puntos (distintos) están en una misma línea.

En estos dos casos, la conclusión del axioma es cierta por simples argumentos conjuntistas (no se necesita establecer pomposamente a un axioma para asegurarlo).

Por último, debemos remarcar que el mismo Axioma II —junto con el Axioma I, por supuesto— determina la existencia de otro punto más. A saber,

si cambiamos los nombres de los puntos en una de las líneas de la hipótesis, digamos  $A$  y  $B$ , obtenemos del mismo Axioma II que las líneas  $B \vee C$  y  $A \vee D$  también inciden en un punto. Aquí, ésta interviniendo la combinatoria de cuatro puntos distintos. Hay seis posibles parejas y si no hay ninguna terna colineal (lo que se llama *estar en posición general*), generan seis líneas. Hay tres maneras de tomar dos de estas líneas para que no incidan ambas en ninguno de los cuatro puntos (cuando los pares que las definen son ajenos). Entonces, otra forma de enunciar al Axioma II es que esas tres parejas de líneas se cortan (en tres nuevos puntos) o no se corta ninguna (es decir, las seis líneas producen por intersección además de a los cuatro originales a tres puntos más o a ninguno). Esto corresponde a que estén en un plano o no; en el momento en que los cuatro puntos son coplanares y dejan de “ser” un tetraedro en el espacio, aparecen tres puntos nuevos como intersecciones. De aquí, sale el siguiente axioma.

### 1.4.3. Axiomas de dimensión y de no trivialidad

Que la Geometría tenga más de dos dimensiones se captura en el siguiente enunciado.

**Axioma III.** *Existen dos líneas ajenas, es decir, que no se tocan.*

Esto es lo que pasa en el Espacio Desarguesiano y lo que lo hace distinto de cualquiera de sus planos. Lo hereda de que el Axioma III se cumple en nuestro espacio físico inmediato –con la idea euclidiana intuitiva de lo que son las líneas– y captura su no planaridad: hay líneas no paralelas que no se tocan. En cualquier espacio arquitectónico moderno, vemos o intuimos líneas en las intersecciones de los planos que sugieren paredes, pisos y techos, y entre estas líneas se encuentran múltiples ejemplos de parejas no incidentes; por ejemplo, una vertical en alguna pared y una horizontal en la pared de enfrente. Aunque pensemos que se alargan en ambas direcciones indefinidamente,

nunca se tocarán, pues su zona de mayor cercanía fue dentro del cuarto.

Ya hemos enunciado los tres axiomas básicos que definen a la geometría proyectiva. Pero hay un ejemplo “bobo” o “mala leche” que es tomar cualquier conjunto y declarar que las líneas son todas sus parejas (sin más nada). Cumple claramente el Axioma I. El II lo cumple por vacuidad (no hay cuatro puntos distintos que satisfagan la hipótesis) y también cumple el III cuando el conjunto tiene al menos cuatro puntos. Pero este ejemplo no califica para ostentar el nombre de “geometría”, en donde las líneas deben ser algo más que dos puntos para que se ponga interesante.

**Axioma NT.** *Cada línea tiene al menos tres puntos.*

Le hemos puesto el nombre NT, de “no trivialidad”, pues es de índole distinta de los axiomas anteriores. Sirve para evitar el ejemplo simplón anterior que tiene interés combinatorio (se le conoce como una *gráfica completa*) pero tiene muy poco interés geométrico.

Y ahora sí, podemos concluir:

**Definición.** Una *geometría proyectiva* consta de un conjunto de *puntos* con una familia de subconjuntos distinguidos llamados sus *líneas* que cumple los **Axiomas I, II, III y NT**.

Tenemos un ejemplo destacado, el Espacio Desarguesiano cuyo estudio nos ha traído hasta aquí, pero en principio puede haber más geometrías proyectivas y de hecho, como veremos en su momento, las hay.

#### 1.4.4. Notación, subespacios, operaciones y dimensión

Hasta ahora hemos denotado con letras mayúsculas a los puntos: mantendremos esta tradición. Cuando haya que dar nombre a una línea, usaremos letras minúsculas como  $a, b, c, \dots, \ell, \dots, x, y, z$ . Y a los planos –que aún debemos definir en la nueva generalidad axiomática– los denotaremos con letras griegas

minúsculas  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , o bien,  $\pi$  y  $\lambda$ , como ya lo hemos hecho en el Espacio Desarguesiano.

Estos tres tipos de subconjuntos –puntos sólitos donde identificamos  $A$  con  $\{A\}$ , líneas y planos– serán nuestros objetos de trabajo básicos. Para hablar de todos ellos usaremos el término *subespacio*. La propiedad que los caracteriza es:

**Definición.** Un conjunto de puntos es *cerrado* si para cualquier par de puntos en él, se tiene que la línea que definen está totalmente contenida en él; es decir, si es *cerrado* bajo el trazo de líneas. A un subconjunto cerrado se le llama *subespacio*<sup>5</sup>.

La relación de *incidencia* entre puntos y líneas se extiende de manera natural a todos los subespacios como la *contención de conjuntos*. Entonces, es natural usar terminología de orden; por ejemplo, ser *menor que* en vez de “estar contenido en”. Los subespacios forman un *orden parcial* con un

---

<sup>5</sup>En inglés, para “subespacio” se usa la palabra *flat*, que como adjetivo significa “plano”, pues se tiene a la palabra *plane* para lo que nosotros llamaremos *plano*; lástima que en español el adjetivo y el sustantivo son la misma palabra.

elemento máximo, el total de puntos de la Geometría y un mínimo, el vacío. *Arribita* del vacío, están los puntos que son los subespacios de *dimensión* 0 (son cerrados por vacuidad, no hay parejas a las cuales cuestionar); le siguen las líneas de *dimensión* 1 y pronto veremos que de allí siguen los planos. Como ya dijimos, los subespacios serán nuestros objetos de trabajo básicos y tenemos como herramientas para trabajarlos a dos operaciones en ellos que vienen de los dos primeros axiomas.

Conviene primero definir la operación de *intersección*, pues es la clásica intersección de conjuntos. Pero que denotaremos con el símbolo  $\wedge$ , llamado “pico” (pues se parece mucho al símbolo  $\cap$  de intersección, pero gráficamente se aparea bien con su símbolo dual: la cuña,  $\vee$ ). La intersección de subespacios es también un subespacio, pues es inmediato ver que la intersección de conjuntos cerrados es cerrada: si dos puntos están en todos los conjuntos a intersectar, y también lo está la línea que generan (por ser cerrados), entonces se tiene que ésta línea también está en la intersección. Y obsérvese que como es la intersección, *esta ope-*

ración es conmutativa y asociativa.

Así, por ejemplo,  $\pi \wedge \ell$  significa la intersección del plano  $\pi$  con la recta  $\ell$ , que vimos que es un punto en el Espacio Desarguesiano —o la propia recta  $\ell$  si  $\ell \subset \pi$ , i.e., si  $\ell$  está “contenida” en  $\pi$ . Pero ahora, debemos demostrar este hecho a partir de los axiomas en la nueva generalidad.

La otra operación es de **generación** o la operación **cuña**, que denotamos con el símbolo  $\vee$ . De dos subespacios nos da al subespacio más chico que contiene a ambos. Se puede pensar en dos pasos: primero se toma la unión y luego se le *cierra* o se toma a su *cerradura*; donde, la **cerradura** de un conjunto cualquiera es el conjunto cerrado más chico que lo contiene, o bien, es la intersección de todos los cerrados que lo contienen.

Como el primer paso para obtener la cuña, es la unión de conjuntos que es conmutativa y asociativa, la cuña también lo es. Es la extensión natural a subespacios de la generación de líneas por parejas de puntos. Así, el generado por una línea y un punto fuera de ella ( $\ell \vee A$  con  $A \notin \ell$ ) será un plano; y también el generado por tres puntos no colineales

$(A \vee B \vee C)$ .

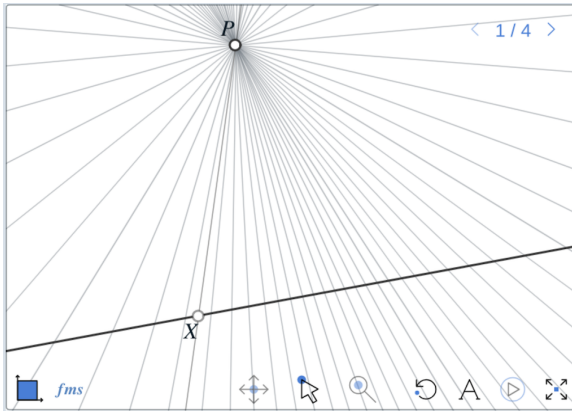
Hemos definido a la operación *cerradura* —que de un conjunto nos da otro— de manera muy abstracta, como el “subespacio más chico que lo contiene”. Para *cerrar* a un conjunto constructivamente, hay que tomar las líneas por todos sus pares de puntos, luego a las líneas que unen a los nuevos puntos y se sigue uno haciendo esto hasta que ya no sea posible encontrar nada nuevo, trazar líneas y líneas como un niño rayando con un crayón. Pero en los casos que nos interesan, también se le puede definir de manera más concreta y limpia como una unión muy específica de líneas.

Llamaremos **plano** al subespacio generado por una línea y un punto fuera de ella.

**Lema 1 (la cerradura como unión)** Sean  $\ell$  una línea y  $P$  un punto fuera de ella. El plano que generan  $\ell$  y  $P$ ,  $\ell \vee P$ , es la unión de todas las líneas que van de un punto en  $\ell$  a  $P$ ; es decir,

$$\ell \vee P = \bigcup_{X \in \ell} (X \vee P).$$





**Escena 13. (Demostración)** La igualdad de dos conjuntos se demuestra con dos contenciones. Llamemos  $\mathcal{U}$  a la unión de las líneas (el lado derecho de la ecuación).

Que la unión  $\mathcal{U}$  esté contenida en  $\ell \vee P$  se debe a que cada línea  $X \vee P$  con  $X \in \ell$  está contenida en  $\ell \vee P$  (pues éste conjunto es, por definición, cerrado y contiene a  $X$  y a  $P$ ), así que la unión de todas esas líneas sigue estando contenido en  $\ell \vee P$ .

Para la otra contención, basta demostrar que  $\mathcal{U}$

es cerrado. Pues como contiene a  $\ell$  y a  $P$ , entonces el cerrado más chico que los contiene, que es  $\ell \vee P$ , tiene que estar contenido ahí, en  $\mathcal{U}$ .

13.2

Para demostrar al lema hay que probar que para dos puntos distintos  $A, B \in \mathcal{U}$ , se tiene que

$$A \vee B \subset \mathcal{U}.$$

Y esta contención de conjuntos se demuestra considerando a un punto cualquiera  $Y \in A \vee B$  y demostrando que  $Y \in \mathcal{U}$ .

13.3

13.4

Puesto que  $A$  y  $B$  están en la unión  $\mathcal{U}$ , existen  $A', B' \in \ell$  tales que  $A \in A' \vee P$  y  $B \in B' \vee P$ . Si  $A' = B'$  entonces  $A \vee B = A' \vee P \subset \mathcal{U}$  y ya acabamos. Suponemos entonces que  $A' \neq B'$ .

13.5

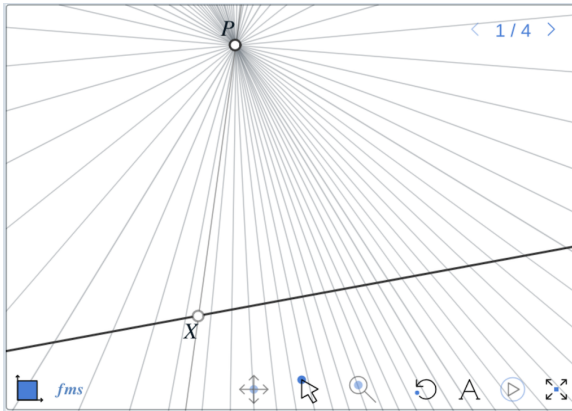
Como  $P = (A \vee A') \wedge (B \vee B')$ , el Axioma II nos da un punto

$$D = (A \vee B) \wedge (A' \vee B') = (A \vee B) \wedge \ell.$$

Y sin pérdida de generalidad, como  $A \neq B$ , podemos suponer que  $D \neq A$ .

13.6

Consideremos a  $Y \in A \vee B$ ; hay que concluir que  $Y \in \mathcal{U}$ . Si  $Y = D$  ya acabamos pues  $D \in \ell \subset \mathcal{U}$ .



las y no cumple el Axioma II, tampoco cumple al lema: dada una línea  $\ell$  y un punto  $P$  fuera de ella, la unión de las líneas de  $P$  a puntos de  $\ell$  no llena al plano; deja un hueco en la paralela a  $\ell$  por  $P$ .

Basados en este lema y su demostración, vamos a reconstruir lo que ya sabíamos del Espacio Desarguesiano. Para ello, probaremos que:

- *Un plano está generado por cualesquiera tres puntos no colineales en él.*

Supongamos que el plano  $\pi$  está generado por una línea  $\ell$  y un punto  $P \notin \ell$ , es decir,  $\pi = \ell \vee P$ .

Sean  $A, B, C$  puntos no colineales en  $\pi$ . Queremos demostrar que  $\pi = A \vee B \vee C$ .

La contención  $A \vee B \vee C \subset \pi$  se sigue de que los tres puntos están en  $\pi$ , éste es cerrado y el generado a la izquierda es el mínimo tal.

Para la otra contención, con el mismo argumento de cerradura basta probar que  $A \vee B \vee C$  contiene a  $\ell$  y a  $P$ . Que contiene a  $\ell$  se sigue del primer argumento del lema anterior que, por el Axioma II, da que cualquier línea en  $\pi$  corta a  $\ell$ ; al aplicarlo

Así que  $Y \neq D$ , de tal manera que  $D \vee Y = A \vee B$  y otra vez el Axioma II, usando que

$$A = (D \vee Y) \wedge (A' \vee P),$$

nos da un punto

13.7

$$Y' = (D \vee A') \wedge (Y \vee P) = \ell \wedge (Y \vee P) \in \ell.$$

Lo cual implica que  $Y \in (Y' \vee P) \subset \mathcal{U}$ . □

Esc:13↑bt

Este lema captura la esencia de la geometría proyectiva. El Plano Euclidiano, que tiene parale-

a dos líneas del triángulo  $ABC$ , nos da dos puntos de  $\ell$  en  $A \vee B \vee C$ , y por ser este cerrado, da a la contención de todo  $\ell$ . De aquí, como alguno de los tres puntos no está en  $\ell$ , digamos que  $A$ , igual que en el lema se tiene que existe  $A' \in \ell$  tal que  $P \in A \vee A'$ . Y esto ya implica que  $P \in A \vee B \vee C$  y por tanto, que

$$\pi = \ell \vee P \subset A \vee B \vee C.$$

□

Con esto, se deduce que:

- *Dos líneas son coplanares si y sólo si son concurrentes.*

Consideremos dos líneas  $A \vee B$  y  $C \vee D$ . Si son coplanares viven, por definición, en un plano  $\pi$  y debemos ver que tienen un punto en común. Podemos suponer que  $C \notin A \vee B$ , que implica por la afirmación anterior, que

$$\pi = A \vee B \vee C = (A \vee B) \vee C.$$

Entonces  $D \in \pi$  nos da, por el Lema 1.4.4, un punto  $X \in A \vee B$  colineal con  $D$  y  $C$ , que es el que buscábamos ( $X \in C \vee D$ ).

Si dos líneas son concurrentes, una de ellas junto con cualquier punto de la otra que no sea la intersección, generan un plano que las contiene a ambas. □

Ya tenemos que en un plano, cualquier par de líneas se corta en un punto. Así que el Axioma III dice que al haber dos líneas ajenas, ellas no son coplanares y tiene que haber algo más que un plano. Diremos que un plano tiene *dimensión 2*, y entonces el Axioma III implica que la dimensión tiene que ser al menos 3. Los espacios de dimensión 3 se obtienen de los planos de manera análoga a los planos a partir de las líneas pues:

- *La unión de las líneas de puntos de un plano a un punto fuera de él, es cerrada.*

Supongamos que  $\pi$  es un plano y  $P$  un punto fuera de él. La afirmación es que el conjunto

$$\mathcal{U} = \bigcup_{X \in \pi} (X \vee P)$$

es cerrado y por tanto un subespacio.

La demostración sigue literalmente a la del Lema 1.4.4. Pues hay que ver que dados dos puntos  $A$  y  $B$  en  $\mathcal{U}$ , la línea que pasa por ellos,  $A \vee B$ , está contenida en  $\mathcal{U}$ ; y entonces, toda la argumentación se hace dentro del plano  $A \vee B \vee P$ . A menos que este subespacio sea una línea, pero en este caso, es aún más fácil ver que  $A \vee B \subset \mathcal{U}$ .  $\square$

Así, un espacio de dimensión 3 está generado por cuatro puntos que no son coplanares: tres de ellos dan un plano y el cuarto genera algo nuevo como unión de líneas a él. Y la cosa se puede seguir: un subespacio de dimensión  $n$  se obtiene como la unión de rectas desde un subespacio de dimensión  $n-1$  a un punto que no está en él; y además, está generado por  $n+1$  puntos. Hay una noción de *independencia geométrica* entre los puntos que es que generen tanto como es posible, dada su cantidad, y una buena noción de **dimensión**: uno menos que el mínimo número de puntos con que se genera (que concuerda con los casos pequeños que habíamos visto). Pero hacer esto con cuidado nos lleva en otra dirección, que tomamos

en el Apéndice ??.

Llamaremos **espacio proyectivo** a una geometría proyectiva de dimensión 3, que será **nuestro universo de trabajo de aquí en adelante**, y se tiene que *cualquier cuarteta de puntos que no es coplanar genera al total*. Entonces es fácil demostrar que:

- *Un plano y una línea no contenida en él se intersectan en un punto.*

Sean  $\pi = A_0 \vee A_1 \vee A_2$  un plano y  $\ell = B_0 \vee B_1$  una línea no contenida en él. (Nótese que esto ya implica que los tres puntos “A” no son colineales y que los dos “B” no son iguales; que son *geoméricamente independientes*.) Podemos suponer que  $B_0 \notin \pi$  (pues si no es así, ya acabamos), entonces  $\pi \vee B_0$  ya es todo y, por tanto, contiene a  $B_1$ . Entonces, al ver al espacio generado por  $\pi$  y  $B_0$  como unión de líneas de  $\pi$  a  $B_0$ , existe  $X \in \pi$  tal que  $B_1 \in X \vee B_0$ . Y esto implica que  $X = \pi \wedge \ell$ .  $\square$

Y siguiendo ésta ruta de argumentación:

- *Dos planos distintos se intersectan en una línea.*

Consideremos dos planos  $\alpha = A_0 \vee A_1 \vee A_2$  y  $\beta = B_0 \vee B_1 \vee B_2$ , distintos. Podemos suponer que  $B_0 \notin \alpha$ . Por la afirmación anterior, tenemos puntos  $X_i = \alpha \wedge (B_0 \vee B_i)$  para  $i = 1, 2$ , que son distintos pues las líneas que los definen se cortan fuera de  $\alpha$  (en  $B_0$ ). Entonces:

$$X_1 \vee X_2 = \alpha \wedge \beta$$

es la línea que buscamos. □

Si la geometría proyectiva tuviera más puntos que un espacio de dimensión 3, en la argumentación anterior podríamos escoger a  $B_1$  fuera de  $\alpha \vee B_0$  para obtener dos planos que se intersectan en un punto. Lo cual implica que pedir que la dimensión sea 3 (lo que estaremos llamando un espacio por comodidad) es equivalente a cualquiera de las dos afirmaciones anteriores.

### 1.4.5. Proyecciones

Como último paso en la reconstrucción de lo que ya teníamos en el Espacio Desarguesiano, de-

bemos considerar a las *proyecciones* –que son tan relevantes que imponen su nombre a esta geometría–, pero ahora consideradas dentro de la nueva generalidad axiomática.

Dados dos planos  $\alpha$  y  $\beta$  (antes eran  $\pi$  y  $\lambda$ , de piso y lienzo) y un punto  $P$  fuera de ellos, la **proyección desde**  $P$  (o con *foco*  $P$ ) de  $\alpha$  en  $\beta$  es la función

$$\begin{aligned} \rho_P : \alpha &\rightarrow \beta \\ A &\mapsto (A \vee P) \wedge \beta, \end{aligned}$$

que está bien definida pues un plano y una línea fuera de él siempre se cortan en un punto. Su función inversa es la proyección desde el mismo  $P$  pero ahora de  $\beta$  en  $\alpha$ , pues dos puntos  $A \in \alpha$  y  $B \in \beta$  se corresponden bajo las proyecciones si y sólo si  $A, B$  y  $P$  están alineados.

Es importante hacer notar que bajo esta argumentación simple (y también bajo el lema de generación del espacio como unión de líneas a un plano), se encuentra agasapado un conjunto muy relevante: el **haz de líneas por**  $P$  que es el conjunto

de todas las líneas que contienen a  $P$ ; denotémoslo  $\mathcal{L}_P$ . Se puede parametrizar por los puntos de cualquier plano que no pasa por  $P$ . Explícitamente, si  $\alpha$  es un plano tal que  $P \notin \alpha$ , las dos operaciones básicas dan dos funciones

$$\begin{array}{lcl} \alpha & \rightarrow & \mathcal{L}_P \\ A & \mapsto & A \vee P \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{lcl} \mathcal{L}_P & \rightarrow & \alpha \\ l & \mapsto & l \wedge \alpha \end{array}$$

que claramente son inversas. La proyección de un plano en otro es componer dos biyecciones de este tipo: del plano-fuente al haz por el foco y de éste al plano-rango.

Por supuesto, cuando el ambiente es un plano, se tienen los resultados análogos. Las proyecciones entre dos líneas desde un punto fuera de ellas son biyecciones bien definidas, y los haces de líneas por un punto se parametrizan por cualquier línea fuera de él (en reminiscencia del Lema 1.4.4, con el que arrancamos nuestro análisis después de las definiciones).

Históricamente, el estudio de estas funciones y de las que se obtienen al componerlas –que se conocen como *proyectividades*– se desarrolló a fina-

les del siglo XVIII y en la primera mitad del XIX. Destacan los trabajos de Monge, Poncelet, Von Staudt y Reye. Nosotros veremos con cuidado este enfoque “funcional” hasta el Capítulo ???. Lo que impresiona desde la perspectiva histórica con que gozamos ahora, es el avance tan profundo que se logró en la teoría antes de que el concepto de *función* (fuera de las numéricas dadas por fórmulas), e inclusive la noción de *conjunto* se establecieran (por Cantor hacía finales del siglo XIX). La influencia de esta geometría en ese proceso de abstracción debe haber sido considerable, pero lo abigarrado y específico de la notación que se implementó para su desarrollo la alejó de la enseñanza de la matemática elemental en el siglo XX. Entre los conceptos abstractos que se desarrollaron en esa época motivados por esta geometría, destaca el de *dualidad* que describimos en el siguiente apartado.

### 1.4.6. Dualidad

Como ya hemos mencionado y puesto que dos líneas son coplanares si y sólo si son concurren-

tes, cuando se trabaja en un plano proyectivo, el Axioma II, se reemplaza por el más simple:

**Axioma II (Plano).** *Cualquier par de líneas se corta en un punto.*

Y el Axioma III de dimensión se tiene que modificar también, ahora importa no estar en una línea:

**Axioma III (Plano).** *Existen tres puntos no colineales.*

Por supuesto, se mantiene el axioma de no trivialidad (el NT) y el básico de las geometrías (el I).

Cuando se tiene un plano proyectivo, surge entonces un nuevo plano proyectivo, aún más abstracto y llamado su **plano dual**: se toma como conjunto de puntos al conjunto de líneas (piénsese en sus etiquetas, si se prefiere) y como líneas en el plano dual se declaran a los conjuntos de líneas que pasan por un punto, los haces de líneas por un punto (y por supuesto, esto para todos los puntos).

Si denotamos  $\mathbb{P}$  a un plano proyectivo, a su plano dual se le denota  $\mathbb{P}^*$  (se lee “Pe-estrella”). Demostraremos que

- $\mathbb{P}^*$  es un plano proyectivo.

Hay que ver que cumple todos los axiomas. El de trazo de líneas (en  $\mathbb{P}^*$ ) se sigue del de intersección de líneas en  $\mathbb{P}$ , pues dos puntos en  $\mathbb{P}^*$  corresponden a dos líneas en  $\mathbb{P}$ , y como éstas se cortan en un punto, la línea en  $\mathbb{P}^*$  a la que da lugar su haz contiene a las dos dadas: es la línea deseada (aunque nos falta su unicidad).

Dos líneas en  $\mathbb{P}^*$  (definidas por puntos en  $\mathbb{P}$ ) se cortan en un punto (su línea en  $\mathbb{P}$ ); como esta es única, se tiene que dos líneas distintas en  $\mathbb{P}^*$  no tienen dos puntos distintos en común, lo cual concluye la demostración de que  $\mathbb{P}^*$  cumple la unicidad en el Axioma I. Nótese que hemos probado que al incluir la unicidad en cualquiera de los dos primeros axiomas, se obtiene en el otro (y este argumento reivindica a los que prefieren enunciarla como otro axioma). Obsérvese además, que *concurrentencia* y *colinearidad* se intercambian: líneas concurrentes en  $\mathbb{P}$  corresponden a puntos colineales

en  $\mathbb{P}^*$  y las líneas correspondientes a puntos colineales en  $\mathbb{P}$  son concurrentes en  $\mathbb{P}^*$ .

El Axioma III (Plano) también se cumple: por este axioma en  $\mathbb{P}$  se tienen tres puntos no colineales que corresponden a tres líneas no concurrentes en  $\mathbb{P}^*$ . Las tres parejas dan por intersección a tres puntos no colineales —esto es el hecho de que da lo mismo definir a un triángulo por sus vértices o por sus lados. Y finalmente, el axioma de no trivialidad también se cumple, pues como acabamos de ver en el apartado anterior hay biyecciones naturales entre líneas en un haz (los puntos de una línea en  $\mathbb{P}^*$ ) y puntos en una línea.  $\square$

Esto implica al **principio de dualidad**, que dice que si demostramos un teorema o hacemos una construcción basada en los axiomas, automáticamente lo estamos demostrando o construyendo también en el dual; esto quiere decir que en el “primal” hay un teorema o una construcción que se obtiene de traducir lo que sucedió en el dual pero con sus objetos correspondientes del primal. Un ejemplo simple es la construcción con cuatro

puntos en un plano; si tomamos cuatro puntos en su dual, corresponde a cuatro líneas en el primal: ésta es la construcción dual. Si tres de los cuatro puntos originales cumplen con ser colineales, en la construcción dual tres líneas serán concurrentes. Veremos después ejemplos más interesantes.

Aunque el estudio de los planos proyectivos es muy activo en la actualidad y tiene problemas profundos aún no resueltos, en este libro estamos interesados en los que viven en un espacio (que cumplen el Axioma III de dimensión), pues varias demostraciones importantes usaran a la tercera dimensión. Y como está la cosa, no podemos usar el principio de dualidad en ellos. Tenemos que demostrar algo más. Para esto, llamemos **expandible** a un plano proyectivo,  $\mathbb{P}$ , para el cual existe una geometría proyectiva  $\mathbb{G}$  y un plano  $\pi$  de  $\mathbb{G}$ , tales que  $\mathbb{P}$  y  $\pi$  son **isomorfos** (esto es, existe una biyección entre sus puntos que manda líneas en líneas). Es decir,  $\mathbb{P}$  es expandible, si se puede pensar como, o bien es, un plano en una geometría proyectiva (que cumple el Axioma III).

Para poder usar el principio de dualidad, tene-



mos que demostrar:

**Lema 2** *Si  $\mathbb{P}$  es un plano proyectivo expandible, entonces su plano dual  $\mathbb{P}^*$  también es expandible.*

La demostración incluye una serie de observaciones, o afirmaciones, interesantes en sí mismas. Tenemos que la hipótesis nos da a una geometría proyectiva  $\mathbb{G}$ , que podemos suponer que es un espacio de dimensión 3, con un plano  $\pi$ , isomorfo a  $\mathbb{P}$ . Nótese primero que como cualquier par de planos de  $\mathbb{G}$  son isomorfos vía una proyección desde un punto externo a ellos, lo anterior es como decir que  $\mathbb{P}$  es un modelo abstracto de los planos en  $\mathbb{G}$ . Para demostrar al lema, primero es necesario generalizar la idea de dualidad a espacios.

Para un espacio proyectivo (geometría proyectiva de dimensión 3) que seguiremos llamando  $\mathbb{G}$ , su **espacio dual** o **geometría dual**,  $\mathbb{G}^*$ , también tiene sentido. Sus puntos son los planos de  $\mathbb{G}$ . Y las líneas de  $\mathbb{G}^*$  corresponden a las líneas de  $\mathbb{G}$ : como subconjuntos constan de todos los planos que contienen a una línea dada (el **haz de planos**

**por una línea** que podemos pensar como un libro abierto). Así, el Axioma I en  $\mathbb{G}^*$  se sigue de que cualquier par de planos en  $\mathbb{G}$  se corta en una línea.

Antes de ver en detalle al Axioma II, conviene ver que

- los planos de  $\mathbb{G}^*$ , corresponden a los puntos de  $\mathbb{G}$ .

Si consideramos a todos los planos de  $\mathbb{G}$  que inciden en un punto  $P$ , y denotamos a este conjunto como  $P^* \subset \mathbb{G}^*$ , es fácil ver que es cerrado. Pues dados dos puntos en él  $\alpha^*, \beta^* \in P^* \subset \mathbb{G}^*$ , corresponden a planos  $\alpha$  y  $\beta$  de  $\mathbb{G}$  cuya intersección es una línea que pasa por  $P$  y por tanto cualquier plano que la contenga (que representa a un punto de la línea  $\alpha^* \vee \beta^* \subset \mathbb{G}^*$ ) también está en  $P^*$ . Con esto concluimos la afirmación, pues los planos son los cerrados entre las líneas y el total.

Para ver que el Axioma II se cumple en  $\mathbb{G}^*$ , considérense cuatro planos distintos en  $\mathbb{G}$ . En general, constituyen un *tetraedro*: ellos son sus caras; tiene cuatro vértices (en los que se intersectan las ternas), y seis *aristas* (líneas que son la intersección

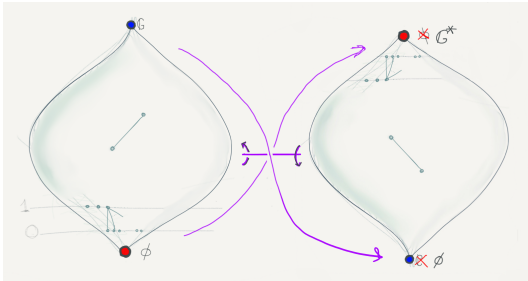
de los pares de caras). Que dos aristas opuestas sean coplanaras (que en el dual se corten) equivale a que se intersecten en un punto,  $P$  digamos, e implica que los cuatro planos pasan por  $P$  (que los cuatro vértices del tetraedro se colapsan en un punto). Por tanto, las seis aristas también pasan por  $P$ . Esto implica que cualquier par de esas aristas genera un plano y, por tanto, que las líneas duales en  $\mathbb{G}^*$  tienen un punto en común. De aquí, se sigue que el Axioma II vale en  $\mathbb{G}^*$ .

Y los Axiomas III y NT son inmediatos de corroborar en  $\mathbb{G}^*$ , así que es una geometría proyectiva.

Nos convendrá tener una imagen geométrica abstracta de lo que está pasando. Una especie de esquema pictórico, que ayude a pensar en esto. En los pizarrones de los cursos donde se habló de órdenes parciales es muy común encontrarse unos *cocoles* o *diamantes* representando a órdenes parciales (y a veces hasta se les da el nombre de *diagrama de Haze*; algo parecido a los *diagramas de Venn*). La idea es muy simple, se dibuja el orden hacia arriba, y no se pretende que el diagrama defina al orden parcial (excepto en casos muy pequeños

como el orden parcial de subconjuntos de un conjunto de tres o cuatro elementos), pero al pintar un punto o vértice allí se representa a un elemento y al pintar una arista (¡nunca horizontal!) representa que el elemento de abajo es menor que el que representa el vértice de arriba. En el caso de las geometrías proyectivas, se representa al orden parcial de todos los subespacios bajo contención. Tienen un elemento mínimo, el vacío, y uno máximo, el total (y de ahí la forma de cocol). Y los subespacios se concentran en *pisos* correspondiendo a la dimensión: al vacío hasta abajo se le considera de dimensión  $-1$ , en el siguiente piso están los puntos (de dimensión  $0$ ), luego vienen las líneas, etcétera... hasta el total.

El asunto es que una geometría proyectiva esta determinada por (en cierta manera “es”) su orden parcial y tomar a la geometría dual es simplemente voltearlo al revés. Y como las operaciones pico y cuña se pueden expresar en términos del orden parcial como “el máximo más chico que...” y “el mínimo más grande que...”, respectivamente, en el dual también se intercambian.



Tenemos ahora que estudiar dos tipos distinguidos de subordenes parciales.

Dado un plano  $\pi$  de una geometría proyectiva tridimensional  $\mathbb{G}$ , el orden parcial de  $\pi$  como plano proyectivo, consiste de todos los elementos abajo de  $\pi$  en el orden parcial de  $\mathbb{G}$  (incluyéndolo a él como máximo), y lo podemos denotar  $\bigwedge^\pi$ .

De manera dual, para un punto  $P$  en  $\mathbb{G}$ , denotemos por  $\bigvee_P$  a la **visión** de  $P$ : lo que ve  $P$  hacia arriba en el orden parcial de  $\mathbb{G}$ ; es decir,  $\bigvee_P$  es el suborden parcial de subespacios mayores o iguales que  $P$  que es su mínimo. Veremos que

- El orden parcial,  $\bigvee_P$  (lo que ve  $P$  en  $\mathbb{G}$ ) define un plano proyectivo isomorfo al de los planos de  $\mathbb{G}$ .

Para demostrarlo, consideremos a un plano  $\pi$  que no pase por  $P$ . Se tiene entonces que son *complementarios*, es decir:

$$P \wedge \pi = \emptyset \quad \text{y} \quad P \vee \pi = \mathbb{G}.$$

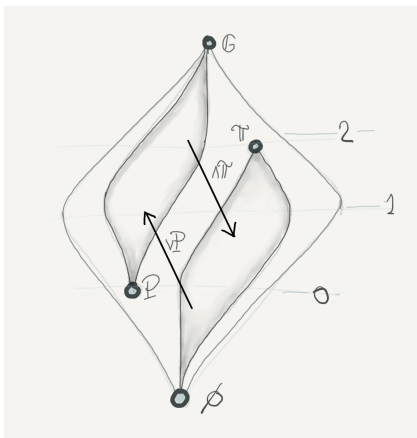
Y esto es esencial para ver que las funciones entre ordenes parciales (y que ya habíamos definido en el primer nivel):

$$\bigwedge^\pi \rightarrow \bigvee_P \quad \text{y} \quad \bigvee_P \rightarrow \bigwedge^\pi$$

$$\sigma \mapsto \sigma \vee P \quad \text{y} \quad \sigma \mapsto \sigma \wedge \pi$$

(donde usamos a  $\sigma$  como variable que representa a un subespacio de cualquier dimensión), son funciones inversas. Esto es, son biyecciones que preservan el orden (la incidencia) que es lo que habíamos llamado ser isomorfos.

... después de tantas vueltas parece que regresamos a lo que intuían los pintores renascentistas: “lo que vemos se puede representar en un plano”; cada línea por el ojo representa a un punto y cada plano a una línea.



Ya podemos demostrar el Lema 2. Si tenemos un plano proyectivo  $\mathbb{P}$  isomorfo al plano de un espacio proyectivo  $\mathbb{G}$ . Entonces, podemos ver a su orden parcial como el de un plano (pegado abajo) o como la visión de un punto (pegado al máximo). Al voltear el orden parcial de  $\mathbb{G}$  para obtener el de su dual, también se voltean los chiquitos y entonces, podemos identificar al de  $\mathbb{P}^*$  con el de un plano de  $\mathbb{G}^*$ ; que muestra que  $\mathbb{P}^*$  también es expandible.

### 1.4.7. Hipótesis de trabajo y algo de historia

Al establecer un sistema axiomático es importante que incluya ejemplos relevantes para no estar trabajando en el vacío, e inmediatamente después se entra en el terreno ambiguo de qué tantos ejemplos hay; y en nuestro caso —adelantamos— hay mucho más de uno.

Aunque en principio puede haber muchos ejemplos de geometrías proyectivas, nuestro interés primordial será estudiar qué pasa en una; en el Espacio Desarguesiano que surgió de explicar cómo vemos al mundo físico. Y entonces, nuestra **hipótesis de trabajo** es ésta:

- *Nos interesa estudiar al Espacio Desarguesiano.*

Vamos a usar a los cuatro axiomas que definen a una geometría proyectiva pero no queremos ir más allá de la dimensión 3, para lo cual suponemos que *un plano y una línea siempre se intersectan*. Aún así, nos vamos a encontrar momen-

tos de *bifurcación* en los que habrá varias posibilidades a escoger; y tomaremos por principio a la que incluye al Espacio Desarguesiano. Puede sonar ambiguo, y es natural la pregunta de ¿por qué no extender de una vez los axiomas para describir con más precisión al Espacio Desarguesiano? Damos dos argumentos históricos para no hacerlo.

En el cambio de siglo entre el XIX y el XX hubo una gran ilusión de encontrar un sistema axiomático que englobara y fundamentara a toda la matemática; a veces se le llama el *programa de Hilbert*. Esta ilusión terminó con un contundente y hermoso balde de agua fría. En 1931, Kurt Gödel demostró su célebre Teorema de Incompletez que, a muy grandes razgos, demuestra que en cualquier sistema axiomático suficientemente sensato, se van a encontrar afirmaciones coherentes que no son demostrables en ninguno de los dos sentidos (ni falsa, ni verdadera). Se puede añadir como axioma en ambos sentidos, se bifurca la teoría. Y es en este espíritu como lo tomaremos: cuando se nos aparezca el fantasma de Gödel, le haremos un guiño con el ojo y el rumbo que seguiremos lo marcará

nuestra hipótesis de trabajo.

El otro argumento está relacionado con el libro de David Hilbert (1862 – 1943), *Foundations of Geometry*, publicado por primera vez en 1899 como notas de un curso que dió en la Universidad de Gotingen. En ese texto, cuya historia editorial es rica e interesante y que tuvo una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas, Hilbert le corrige la plana a Euclides. Presenta un sistema de 20 axiomas independientes (ninguno se deduce de los otros) y consistentes (no conducen a una contradicción), que definen a la Geometría Euclidiana en su sentido clásico. Estos veinte axiomas se presentan en grupos temáticos. Los primeros ocho son los de *incidencia* y son los que tienen relación con nuestros cuatro. Con los otros 12 axiomas se determina, dicho a muy grandes razgos, que las rectas serán como la recta de los números reales. Creemos que esta parte de la teoría es de otra índole, que se acerca más a lo que ahora llamamos topología (que en el momento en que Hilbert escribió ese libro aún no estaba del todo afianzada como rama de las matemáticas y no se le diferencia-

ba aún de la geometría), y por eso no nos involucramos con esos 12 axiomas en primera instancia. Lo que en este tema dicta nuestra hipótesis de trabajo, es algo más simple: hay que suponer que las líneas son como las que intuían Euclides, Desargues, Descartes y Newton; que (ahora podemos decir) están modeladas por los números reales  $\mathbb{R}$ ; es decir, que están en biyección *continua* (¡el término topológico por excelencia!) con  $\mathbb{R}$  y que lo que hizo Desargues es añadirles un punto nuevo o ideal,  $\infty$ , al cual se llega en ambas direcciones, como lo indican nuestros dibujos dinámicos.

Lo que hace Hilbert en su libro, es demostrar que esos veinte axiomas definen a la Geometría Euclidiana entendida a la Descartes, dada por coordenadas. Lo cual se puede llamar *aritmétizar* a la geometría o convertirla en *geometría analítica*. Mientras que lo que pretendemos hacer nosotros, a partir de los cuatro axiomas y dos más que surgirán en su momento (en los Capítulos 3 y 4, respectivamente), es hacer *geometría sintética*: argumentar con base en las figuras y configuraciones como soporte visual a los razonamientos abstrac-

tos. Se le podría llamar Geometría de Incidencia (pues nuestros cuatro axiomas son de esa índole), pero es más correcto *Geometría Visual* pues tanto los razonamientos como la motivación están muy relacionados con esa capacidad del ser humano.

Es significativo lo que se puede obtener con este enfoque y, a la vez, es un homenaje a los geómetras de los siglos XVIII y XIX que, con muy pocas herramientas conceptuales o de visualización como las nuestras, avanzaron e influyeron tanto en lo que ahora entendemos como geometría.

## Capítulo 2

### Armonía

La *armonía* es un concepto elegante y profundo que es capaz de hilvanar a una buena parte de la geometría proyectiva elemental a su alrededor. Y, como es usual con conceptos fundamentales de las matemáticas, surge de distintas fuentes.

El nombre tiene que ver con la música. Históricamente, las cuartetos armónicas se definieron como puntos colineales, cuyas distancias cumplen una cierta relación. Y cuando se considera a la cuerda vibrante (como lo hicieron los Pitagóricos): que las notas sean “armónicas” en el sentido musical tiene todo que ver con que ciertos puntos aso-

ciados a ellas en la línea-cuerda sean “armónicos” en el sentido geométrico; esto lo vemos con cuidado en un Apéndice.

Sin embargo, resulta que esta “armonía” definida originalmente por distancias, también se puede definir en términos puramente geométricos y sin referencia alguna a nociones métricas. El primero que hace esta observación es Karl von Staudt en su libro *Geometrie der Lage* [?], y luego la convierte en una herramienta fundamental en su visión de la geometría proyectiva.

Pero de hecho, la armonía es algo que está ínti-

mamente relacionado con las cuadrículas que hemos visto para arriba y para abajo. Así que, como motivación previa a la construcción del cuarto armónico, que se debe a von Staudt, empezamos este capítulo con una última construcción relacionada con las cuadrículas, y que puede constituir en sí misma una herramienta importante en el quehacer del pintor.

En la siguiente sección, demostramos las propiedades fundamentales del concepto de armonía. Y nos ajustamos al espíritu matemático de demostrar las afirmaciones; pues ya no basta con observar lo bien que se comportan las construcciones. Queremos entender por qué funcionan y que efectivamente se deducen de los axiomas.

En la tercera sección demostramos el Teorema de Desargues. Este es un teorema clásico y muy importante porque marcó una diferencia muy clara entre la geometría euclidiana y la proyectiva.

Cerramos el capítulo con una generalización natural del concepto de armonía a más dimensiones, que será la herramienta de trabajo básica para el siguiente capítulo.

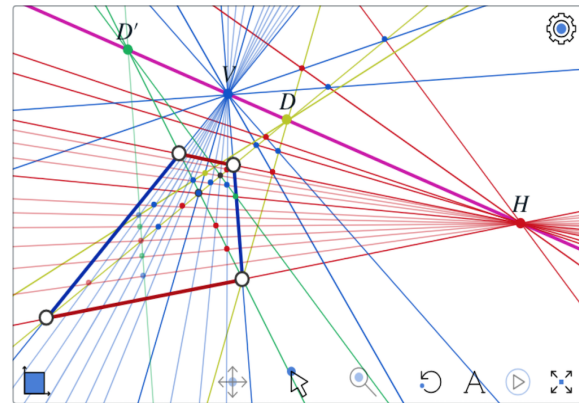
## 2.1. Motivación y definición

Como última motivación práctica al concepto de armonía, regresaremos por un momento a un problema típico de pintor.

### 2.1.1. Refinamiento de la cuadrícula

**Escena 14.** Sabemos construir cuadrículas tan extensas como queramos, veremos ahora que tam-

14.1





bién se pueden refinar hacia lo pequeño.

Un pintor quiere transcribir con detalle algo de la realidad al lienzo (un cuadro en una pared lateral, digamos), y nos pide una cuadrícula más chica o fina en esa zona específica de la proyección.

Supongamos, para simplificar, que tenemos ya a los tres infinitos en el horizonte del cuadrilátero o loseta básica y que ahí, dentro de ella, es donde queremos refinar.

14.2

Es muy fácil: hay que trazar a la otra diagonal —que pudo haberse utilizado para extender la cuadrícula con un nuevo punto de fuga  $D'$  en el horizonte— pues corta a la vieja diagonal, la que va a  $D$ , en el centro geométrico de la loseta.

14.3

De ese punto, se trazan nuevas líneas “horizontal” y “vertical” (a  $H$  y a  $V$ ) que parten al cuadrilátero básico en sus cuatro semejantes de la mitad del tamaño.

14.4

Se puede refinar aún mas trazando una nueva diagonal para encontrar otro punto central, y de él se trazan dos nuevas líneas en el siguiente nivel de refinamiento de la cuadrícula (de  $1/4$  del tamaño).

14.5

Con esto, se obtienen nuevos puntos de inter-

sección que permiten extender, en escalerita, la cuadrícula en este nivel.

14.6

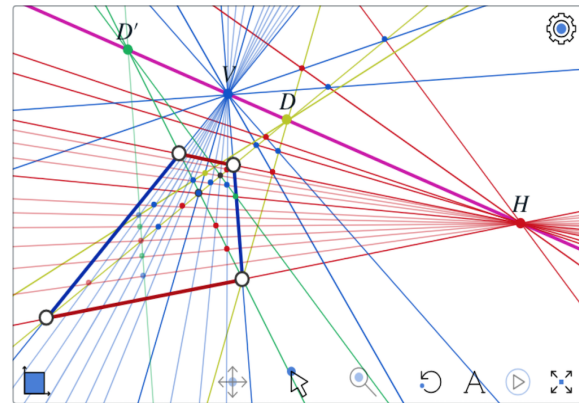
Y se puede usar a cualquiera de los dos tipos de diagonales para acceder a nuevos niveles de refinamiento.

14.7

Queda claro, entonces, que se puede refinar la cuadrícula tanto como se necesite (partiéndola a la mitad reiteradamente).

Lo que queremos remarcar es que el andamio o *cuadrícula* que se genera con una loseta se pue-

Esc:14↑bt



de hacer tan extenso y tan preciso como se quiera, mientras que en el horizonte lo único que se ha usado son cuatro puntos muy especiales que llamaremos *los puntos básicos de la loseta en su horizonte* y diremos que son una *cuarteta armónica*.

### 2.1.2. Construcción del cuarto armónico

15.1

**Escena 15.** Sean  $A$  y  $B$  dos puntos distintos, y sea  $X$  un punto en su línea; es decir,  $X \in A \vee B$ .

El **punto armónico de  $X$  respecto a  $A, B$**  (que también vive en la línea  $A \vee B$ ) se construye como sigue:

15.2

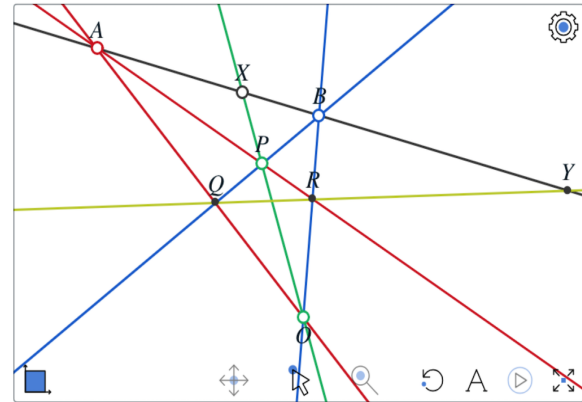
**Paso 1.** Sea  $O$  un punto cualquiera fuera de la línea  $A \vee B$ ; y sea  $P$  un tercer punto en la línea  $O \vee X$ . Los puntos auxiliares  $O$  y  $P$  existen por los Axiomas III y NT.

15.3

**Paso 2.** Por los puntos que tenemos se pueden trazar cuatro nuevas líneas, y sus intersecciones definen dos nuevos puntos. A saber,

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P)$$

$$\text{y } R = (A \vee P) \wedge (B \vee O).$$



Aquí se usa el Axioma II, pues por construcción:

$$X = (A \vee B) \wedge (O \vee P).$$

**Paso 3.** Se traza la línea  $Q \vee R$  que, al cortarla con la recta original  $A \vee B$ , da al **cuarto armónico**:

15.4

$$Y = (A \vee B) \wedge (Q \vee R).$$

Aquí, de nuevo se usa al Axioma II, con la hipótesis  $O = (A \vee Q) \wedge (B \vee R)$ , o bien, como lo haremos

en adelante, se usa que los cuatro puntos están en un mismo plano.  $\square$

En otras palabras, podemos definir que una cuarteta de puntos

$$A, X, B, Y$$

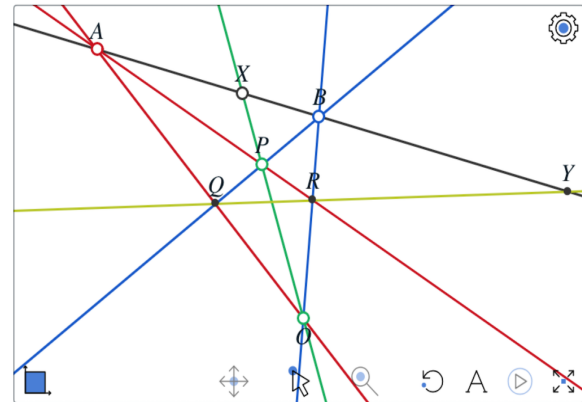
en una línea (nótese que los estamos escribiendo en su orden de aparición en la línea) es una **cuarteta armónica**, si afuera de la línea existe un cuadrángulo (o loseta)

$$O, Q, P, R$$

que tiene a la línea como horizonte y con la cuarteta de puntos como sus puntos básicos, es decir,

$$\begin{aligned} A &= (O \vee Q) \wedge (P \vee R) \\ B &= (O \vee R) \wedge (P \vee Q) \\ X &= (A \vee B) \wedge (O \vee P) \\ \text{y } Y &= (A \vee B) \wedge (Q \vee R). \end{aligned}$$

(en los puntos  $A$  y  $B$  concurren pares de lados opuestos de la loseta —y entonces generan a su



horizonte— y los otros dos puntos,  $X$  y  $Y$ , están en dónde cortan al horizonte las *diagonales*).

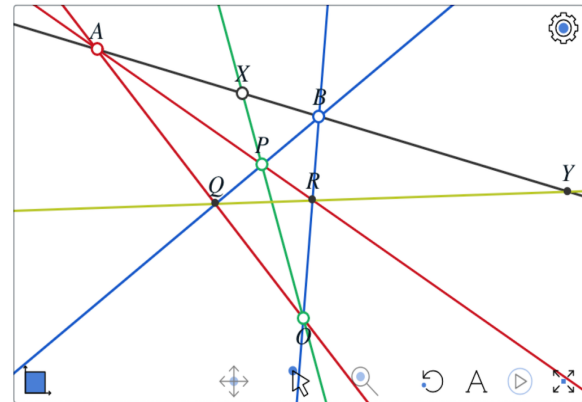
Lo que acabamos de ver en la escena es que dados tres de los puntos, se puede construir a un *cuadrángulo exterior* para encontrar así al cuarto armónico; el que completa a la terna para hacer una cuarteta armónica.

Para alguien que ve esta construcción sin las experiencias visuales del Capítulo 1, resulta sorprendente que al mover a los puntos auxiliares  $O$  y  $a$

P: el cuarto armónico  $Y$ , se mantiene quietesito en su lugar. Inclusive cuando están en lados opuestos de la línea  $A \vee B$ :

Lo que nos indican las construcciones de cuadrículas y la del refinamiento, es que los puntos auxiliares  $O$  y  $P$  sólo definen el tamaño y la posición específicos de un cuadrado dentro de una cuadrícula (cuyas direcciones básicas ya están definidas en el horizonte); y entonces, como las proporciones se mantienen, la segunda diagonal (que da al cuarto armónico) no debiera moverse en el horizonte.

Pero también se puede argumentar al revés. Que las construcciones de cuadrículas hayan funcionado tan fácil, tan bien y sin ambigüedades (que las líneas que se van trazando siempre pasan puntuales por los puntos por donde deben pasar); se debe a que hay una buena noción de armonía. Eso es lo que, sin recurrir a las cuadrículas, demostraremos en la siguiente sección: que la construcción del cuarto armónico no depende de los puntos auxiliares; y por lo tanto, que al fijar un horizonte, sí existe una buena noción de semejanza de parale-



lepipedos; entonces, mover a  $O$  y a  $P$  sólo equivale a viajar entre ellos.

Pero antes de pasar a esa demostración fundamental debemos señalar varias cosas. La primera es que la construcción del cuarto armónico se extiende bien para  $X$  en toda la recta.

Cuando  $X$  se mueve,  $Y$  se mueve (y “armónicamente”, vale ahora el calificativo) en la dirección opuesta y se cruzan puntuales en  $A$  y en  $B$ . Es decir:  $A, B, B, B$  y  $A, A, B, A$  son cuartetos armóni-

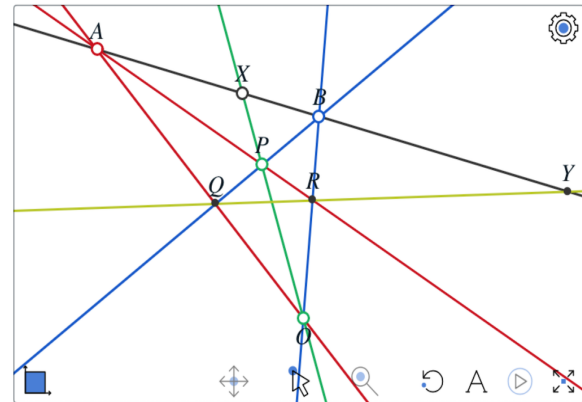
cas pues ahí (cuando  $X = B$  o  $X = A$ ), la construcción del cuarto armónico se colapsa correctamente (en el sentido de que algunos puntos y algunas rectas se identifican, pero las definiciones de la construcción funcionan bien). Aunque a la definición posterior —por la existencia de un cuadrángulo exterior— habría que retocarla para integrar a estos casos particulares o degenerados.

También hay que remarcar que la noción de armonía necesita al Espacio Desarguesiano para expresarse con plena nitidez:

Al mover a  $X$  de estar cerca de  $B$  a estar cerca de  $A$  (al recorrer el segmento de  $B$  a  $A$ ), su armónico  $Y$  recorre lo de afuera en la línea  $A \vee B$  y en algún momento cambia de lado: ahí es cuando usa al punto ideal de la recta. Más precisamente:

- Cuando  $X$  es el punto medio entre  $A$  y  $B$ , su armónico  $Y$  es el punto ideal o al infinito de la recta  $A \vee B$ .

Así que a través de la construcción del cuarto armónico, poder determinar puntos medios es equivalente a poder trazar paralelas. La demostración



de este hecho la indicamos en los tres ejercicios siguientes.

EJERCICIO. Haz una construcción del cuarto armónico en la que los puntos auxiliares con los que se empieza no son colineales con  $X$  sino con  $A$  o equivalentemente, con  $B$ .

EJERCICIO. Adecúa la construcción del cuarto armónico (usando al ejercicio anterior) para construir la paralela a la recta  $A \vee B$  que pasa por un punto  $Q$  fuera de ella, usando la herramienta euclidiana que da el pun-

to medio. Si conoces al punto medio, puedes trazar la paralela.

EJERCICIO. Y al revés, construye al punto medio de dos puntos dados, usando la herramienta de paralelas y la construcción del cuarto armónico. Si conoces una paralela, puedes encontrar al punto medio.

Veremos ahora a la *construcción dual*, que, por el principio de dualidad, se obtiene de cualquier construcción en el plano intercambiando puntos por líneas y cuñas por picos; hacemos un ejemplo de este principio para dejar constancia en el libro.

16.1 **Escena 16.** Dadas tres líneas concurrentes y coplanares  $\alpha, b, \chi$  con  $\alpha \neq b$ , vamos a construir su **cuarta línea armónica**,  $\gamma$ , que concurre con las tres.

Sea  $L$  el punto donde concurren,  $L = \alpha \wedge b$  (que es el dual de la línea  $\ell = A \vee B$  en la construcción anterior), para que podamos indicar ahora con los puntos  $A, B, X$  a las correspondientes líneas en minúsculas ( $\alpha = L \vee A, b = L \vee B, \chi = L \vee X$ ).

16.2 En el Paso 1, se tomaban dos puntos auxiliares  $O$  y  $P$  colineales con  $X$ . Ahora debemos considerar dos líneas auxiliares  $o$  y  $p$  concurrentes con  $\chi$ ;

en la escena, la línea  $o$  está determinada por los puntos libres  $O$  y  $O'$  y la línea  $p$  por el punto  $P$ .

Podemos definir entonces a cuatro puntos

16.3

$$\alpha \wedge o, \alpha \wedge p, b \wedge o, b \wedge p.$$

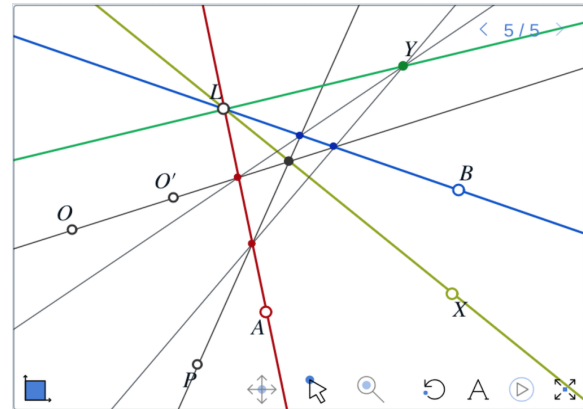
Y estos determinan dos nuevas líneas,

16.4

$$q = (\alpha \wedge o) \vee (b \wedge p) \quad \text{y} \quad r = (\alpha \wedge p) \vee (b \wedge o)$$

que se cortan en un punto  $Y = q \wedge r$ . La línea ar-

16.5



mónica de  $x$  respecto a  $a, b$ , es entonces

$$y = L \vee Y.$$

Observa que la construcción no depende de las líneas auxiliares. Experimenta con ella para verificar que se comporta de manera análoga o dual a la del cuarto armónico para puntos.

Esc:16↑bt

En esta construcción ya no fuimos explícitos en qué axioma se usaba en cada caso pues depende fuertemente (la construcción) de que todos los elementos estén en un plano y entonces, como ya mencionamos, los axiomas se simplifican y se dualizan. Cuando veamos que la armonía se preserva por proyecciones, se tendrá, junto con el ejercicio siguiente, que la armonía en líneas concurrentes equivale a que una línea las corte en una cuarteta armónica.

**EJERCICIO.** En la construcción anterior, demuestra que las cuatro líneas que no están en la cuarteta armónica de líneas concurrentes, cortan a ésta en una cuarteta armónica de puntos colineales. Lo puedes hacer sin trazar líneas nuevas; indicando el cuadrángulo exterior que implica a la armonía.

## 2.2. Principios básicos

El objetivo de esta sección es demostrar los principios básicos que sustentan a la armonía. Al primero de ellos lo llamaremos “Teorema Armónico” pues establece que la noción de armonía está bien definida. El segundo, señala que su relación con las proyecciones es entrañable; y resulta que las dos demostraciones son como hermanas. El tercero, es la elegante simetría que ostenta la armonía; y para cerrar la sección vemos una aplicación que la incorpora como algo muy común en nuestro entorno cotidiano. De aquí, también obtendremos el primer ejemplo de plano proyectivo que no es el Desarguesiano.

### 2.2.1. Teorema Armónico

**Teorema 1 (Armónico)** *La construcción del cuarto armónico no depende de los puntos auxiliares.*

**Escena 17. (Demostración)** Consideremos una construcción del cuarto armónico con los mismos

17.1

17.2

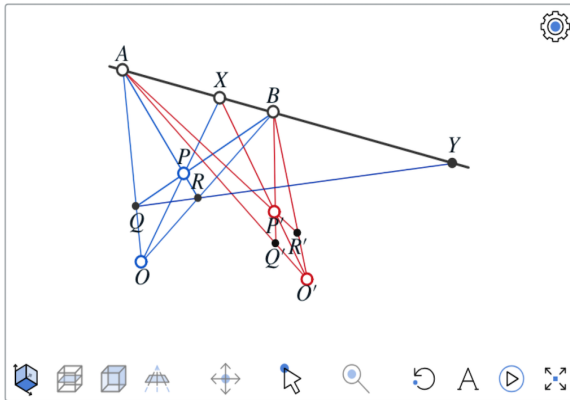
elementos y la misma notación de la sección anterior, pero ahora, pintada toda de azul.

Debemos demostrar que si hacemos otra construcción, con distintos datos (ahora con nombres primados y de color rojo), llegamos al mismo punto  $Y$  en la recta  $A \vee B$ .

17.3

Lo haremos en dos casos.

El primer caso, que es el principal, es cuando el punto  $O'$  con el que empezamos la segunda construcción está en un plano diferente del que pode-



mos llamar el plano azul en donde se hizo la primera construcción.

*Ésta es la primera vez que presentamos una escena tridimensional; y aunque muchas veces nos hemos referido al espacio (pues nuestra motivación esencial es cómo lo vemos), todas las figuras que hemos presentado hasta ahora han sido estrictamente planas.*

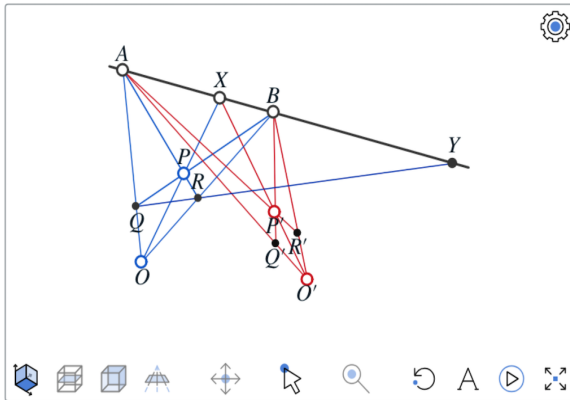
ProGeo3D también tiene la posibilidad de trabajar en 3 dimensiones, de ahí su nombre.

*Para ver que algo dibujado en una pantalla está en 3D se necesitan dos cosas: que esté con buena perspectiva (una proyección al lienzo-plantalla desde un punto, llamado la cámara) y que se mueva rígidamente. Pues si se está moviendo, nuestro cerebro sabe muy bien interpretar los cambios relativos en las imágenes como si estuvieran causados por la tridimensionalidad del objeto. “No es que la distancia de un punto A a un punto B esté cambiando caprichosamente” –presupone de acuerdo a su experiencia dentro del espacio físico– “es que ambos están girando rígidamente junto con todo el objeto del que son parte y entonces uno se está “ocultando” detrás del otro”, concluye. Y de hecho nuestro cerebro nos obliga a verlos así aunque sea una figura abstracta (la asocia con una escultura rígida y giratoria*



hecha de alambres y micas de colores).

Para explorar, mover y trabajar una construcción 3D, aparecen nuevos botones abajo en la pantalla. El primero de izquierda a derecha es el que cambia entre 3D y 2D. Le sigue uno que muestra o esconde al plano 2D de referencia (el plano- $xy$ , podríamos decir). Luego viene el de la caja: se muestra o no, la caja que se usa como referencia para dibujar la construcción que, preferentemente, consta de objetos en ella; cuando está puesta, la extensión de los planos más allá del triángulo que



los define (seleccionando un punto y luego arrastrando para seleccionar el par restante) se puede dibujar. Y por último, está el que extiende las líneas hasta su punto ideal, o de fuga, que conviene no tener activo pues como no corresponde a nuestra experiencia cotidiana de los objetos físicos, confunde al sistema perceptivo.

En 3D cambian un poco las funciones del seleccionador. Como antes, al hacer click en un punto se le selecciona y si se arrastra, el punto se mueve en el mismo plano paralelo al de la pantalla, en el que vive. Pero si se hace click en una zona donde no hay objetos cercanos, se agarra a toda la construcción y se le gira arrastrando al ratón. De tal manera que ahora se le pueda cambiar la “profundidad” a cualquier punto. Los controles para trasladar toda la escena y el de la lupa funcionan igual.

Por último, nótese que ahora el botón de “play/pause” siempre está activo: al oprimirlo, toda la escena gira como pirinola alrededor del eje vertical (o se detiene).

Regresando a nuestra demostración, teníamos como primer caso que los planos  $(A \vee B \vee O)$  (el plano azul) y  $(A \vee B \vee O')$  (el plano rojo) son distintos.

La idea maestra de la demostración es encon-

17.4

17.5

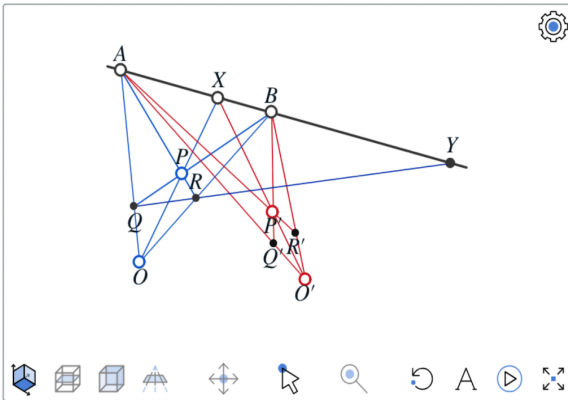
trar a un punto desde el cual no se distinguen las construcciones; descubrir por ahí a un “voyeur tuerto” que las confunda.

Puesto que las líneas auxiliares  $O \vee P$  y  $O' \vee P'$  inciden en el punto  $X$ ; es decir, puesto que

$$X = (O \vee P) \wedge (O' \vee P'),$$

el Axioma II nos da que las líneas  $O \vee O'$  y  $P \vee P'$  se cortan: ese es nuestro “voyeur”. Sea

$$V = (O \vee O') \wedge (P \vee P');$$



y es tal que no distingue a  $O$  de  $O'$  ni a  $P$  de  $P'$ .

Falta ver que  $V$  no distinga a la construcción azul de la roja; que la proyección del plano azul en el plano rojo desde el punto  $V$ , manda a una construcción en la otra; o bien, que prendiendo un foco en  $V$  una es la sombra de la otra.

17.6

Consideremos los planos

$$A \vee O \vee O' \quad \text{y} \quad B \vee P \vee P'.$$

Ambos contienen a  $V$  pues está en las rectas

$$O \vee O' \quad \text{y} \quad P \vee P'.$$

Ambos contienen a  $Q$ , pues

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P);$$

y también contienen a

$$Q' = (A \vee O') \wedge (B \vee P').$$

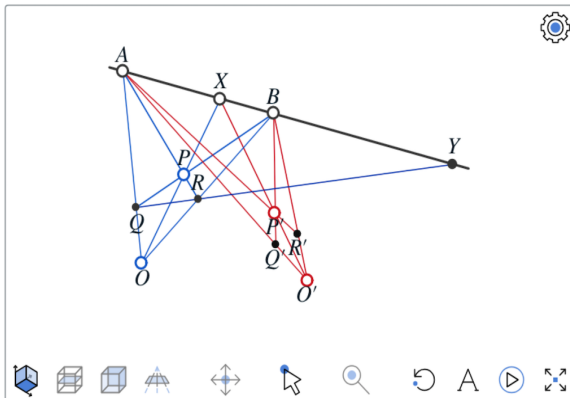
Por lo tanto, estos tres puntos ( $V$ ,  $Q$  y  $Q'$ ) están en la línea de intersección de los dos planos; y entonces  $V$  tampoco distingue a  $Q$  de  $Q'$ .

De manera análoga, se prueba que  $V$ ,  $R$  y  $R'$  están alineados.

Así que a los últimos trazos en los planos azul y rojo,  $V$  los ve como idénticos; ambas construcciones concluyen con que el cuarto armónico de  $X$  respecto a  $A, B$  es la intersección de la línea  $A \vee B$  con el plano

$$V \vee Q \vee R = V \vee Q' \vee R'.$$

Queda el caso en que los puntos auxiliares  $O$  y



$O'$  son coplanares. Pero este caso se sigue de que, por el Axioma III, podemos tomar un tercer punto  $O''$  fuera de ese plano y entonces, por el caso anterior, la construcción coincidirá con ambas.  $\square$

Hay que remarcar que lo que hace que la demostración funcione es que hay tres dimensiones. En la siguiente sección veremos que se le podría dar la vuelta a lo de la tercera dimensión, pero habría que asumir en el plano a otro axioma.

Esc:17↑bt

## 2.2.2. Invarianza bajo proyecciones

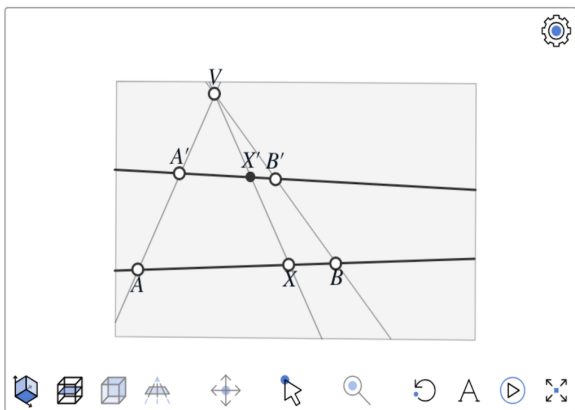
Una ligera variante de esta demostración, da que:

**Teorema 2** Una proyección de una cuarteta armónica es también una cuarteta armónica.

**Escena 18. (Demostración)** Para verlo, consideremos a una terna colineal de puntos

18.1

$A, X, B$



y a su proyección desde un punto  $V$  en una línea-lienzo en donde sus imágenes serán primadas; es decir, se proyectan respectivamente en los puntos

$$A', X', B'.$$

Y todo esto sucede en un plano que llamaremos  $\pi$ . Queremos demostrar que el cuarto armónico  $Y$  en la línea-fuente se proyecta desde  $V$  también en el cuarto armónico  $Y'$  de sus primados en la línea-lienzo.

A diferencia del caso anterior, el *voyeur* es ahora un invitado distinguido entre los datos. Pero la idea es la misma, utilizar a la tercera dimensión, aunque lo que ahora debemos escoger con cuidado es a los puntos auxiliares para que el *voyeur*  $V$  vuelva a confundir las construcciones.

Por el Axioma III, podemos tomar un punto auxiliar  $O$  fuera del plano  $\pi$  y entonces escogemos a  $O'$  en la línea  $V \vee O$ . Y para un tercer punto  $P$  en la línea  $O \vee X$  ya tenemos que definir:

$$P' = (V \vee P) \wedge (O' \vee X').$$

Entonces, e igualito que en la escena anterior, usando a dos planos se demuestra que cada punto que se construye en un “piso”, queda en *perspectiva* desde  $V$  (es decir, alineado con  $V$ ) con el análogo del otro piso.

Así que, de nuevo, el último trazo de ambas construcciones quedará dentro de un plano por  $V$ . Y su intersección con el plano  $\pi$  es la línea que debíamos exhibir.  $\square$

Al final del capítulo anterior, en la escena de la

18.2

18.3

18.4

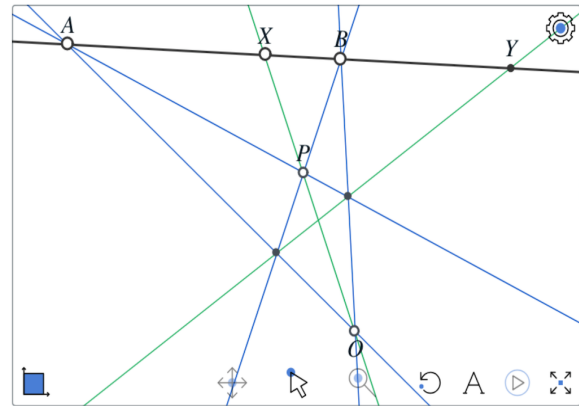
Esc:18↑bt



nico de  $X$  respecto a  $A, B$ ". En esta frase, como en la construcción del cuarto armónico (en pantalla) es claro que el papel que juegan  $A$  y  $B$  es simétrico; es decir, si cambiamos el nombre a estos dos puntos y seguimos a ciegas la receta, llegamos a lo mismo (aunque en el camino algunos nombres auxiliares se trastoquen). Además, se sobreentiende que  $A$  y  $B$  son distintos pues definen una línea.

Pero en la otra pareja, la construcción no es simétrica:  $X$  fue dato y su armónico  $Y$  salió como resultado. Sin embargo, y como consecuencia del Teorema Armónico, es fácil ver que al dar a  $Y$  como dato, se pueden escoger adecuadamente a los puntos auxiliares para que el mismo cuadrilátero externo de la construcción, nos regrese a  $X$ . Así que dentro de esa pareja también hay simetría; y es correcto decir " $X, Y$ , son armónicos respecto a  $A, B$ ", sin que en ninguna de las parejas haya un orden preestablecido más allá del lenguaje escrito que nos obliga a darlo.

Lo que no se sigue de la construcción, y vamos a demostrar ahora, es que la armonía también es simétrica respecto a las parejas.



**Teorema 3 (Simetría de la armonía)** Si  $X, Y$ , son armónicos respecto a  $A, B$ , y son distintos ( $X \neq Y$ ), entonces  $A, B$ , son armónicos respecto a  $X, Y$ .

**Demostración.** Consideremos una construcción del cuarto armónico  $Y$ , de  $X$  respecto a  $A, B$ .

Sea  $C$  el punto de intersección de las dos diagonales (verdes). Aquí necesitamos la hipótesis de que  $X \neq Y$  para que sean dos líneas distintas.

De  $C$  podemos trazar líneas a  $A$  y a  $B$ , las amarillas. Que, al cortarse con las líneas del cuadrilá-

19.2

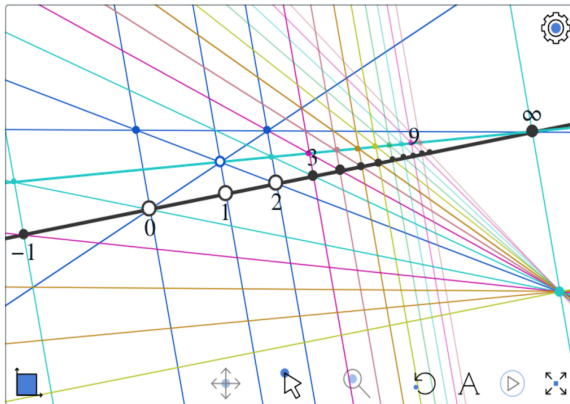
19.3



## 2.2.4. Sucesiones armónicas, el Plano de Fano y característica

Para terminar esta sección de principios básicos, queremos subrayar que los efectos de la armonía están presentes en nuestro mundo visual cotidiano.

Llamaremos *sucesión armónica* —la razón del nombre quedará claro en la construcción— a la proyección de una sucesión (en el Espacio Euclí-



diano) de puntos alineados y equidistantes de sus dos vecinos (la manera usual en que metemos métricamente a los números naturales en una recta). De tal manera que nuestro mundo visual contemporáneo está atiborrado de ejemplos, lo que vemos cuando vemos: los postes en una avenida, las ventanas en un edificio, los barrotes en una reja y, por supuesto, el ejemplo paradigmático que son los durmientes en una vía de tren en el desierto.

**Escena 20.** Si un pintor nos da una línea con tres marcas, digamos que son 0, 1 y 2, que están en donde se ven tres puntos alineados tales que uno de ellos (el 1) está a la misma distancia de los otros dos (en la realidad, no en el lienzo). Entonces con la armonía y sus propiedades que hemos demostrado, se determina en dónde, en qué puntos de la línea en el lienzo, se deben dibujar el resto de los números enteros; y eso es una sucesión armónica.

Primero, el infinito (o punto de fuga de la proyección de esa línea),  $\infty$ , debe ser el armónico del 1 respecto al 0 y el 2. Pues el 1 es el punto medio entre el 0 y el 2 en la línea real y las proyecciones preservan armonía.

20.1

20.2



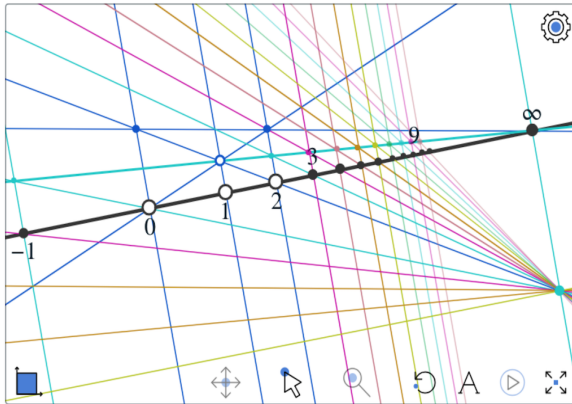
Nótese que en la escena se uso como punto auxiliar para la construcción del cuarto armónico al punto ideal en la dirección perpendicular a la recta (nos garantiza que está afuera y lejos).

20.3

Con el infinito ya determinado en la línea; el 3 debe ser el cuarto armónico del 1 respecto a 2 e  $\infty$ , pues el 2 es el punto medio entre el 1 y el 3.

20.4

El 4 debe ser el armónico del 2 respecto a 3 e  $\infty$ . Y, en general, la sucesión se puede prolongar



tanto como se quiera en las dos direcciones, pues

$$n - 1, n, n + 1, \infty$$

es una cuarteta armónica para cualquier entero  $n$ . Así que el punto  $n + 1$  se puede obtener como el cuarto armónico de  $n - 1$  respecto a  $n$  e  $\infty$ ; y en la otra dirección, el  $n - 1$  se obtiene como el armónico de  $n + 1$  respecto a  $n$  e  $\infty$ .

Esc:20↑bt

EJERCICIO. Con los mismos datos de la escena anterior, constrúyase un tramo de la sucesión  $2^n$ .

Sin embargo, de esta construcción que ilustra cómo la armonía se expresa en nuestra percepción cotidiana (hay que explorar la escena para convenirse), surge la primera bifurcación en la teoría. No hay nada en los axiomas que garantice que las sucesiones que acabamos de definir sean infinitas.

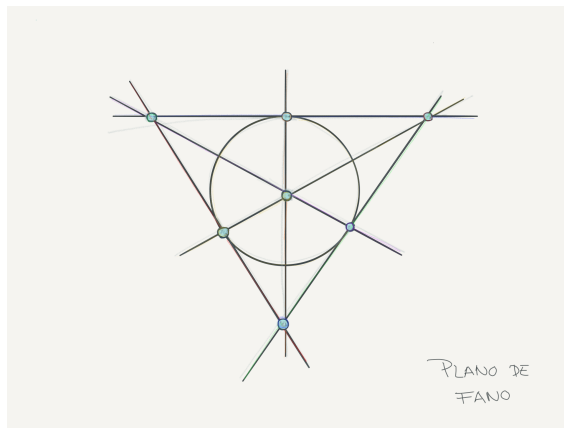
Es una particularidad del Espacio Desarguesiano que, suponiendo que empezamos de 0, 1 e  $\infty$ , en cada paso se obtenga un punto distinto. Diremos que la geometría es de **característica**  $k$  si, en este proceso de construcción de una sucesión armónica:  $k$  es el primer entero que nos da un punto

ya considerado. Y cuando no existe tal entero (como en el plano Desarguesiano) diremos que es de **característica cero** —aunque quizá debía llamarse *infinita*, la costumbre es usar el 0 y nos alineamos a ella.

Y para ver que tiene sentido esta definición, presentamos al **Plano de Fano**, que se llama así en honor de su descubridor, el matemático italiano Gino Fano (1871 – 1952). Surge de la configuración con que se define al cuarto armónico. En el último paso, cuando se declara que  $Y$  es la intersección de la línea  $A \vee B$  con la línea  $Q \vee R$ , no hay nada en los axiomas que nos lleve a concluir que  $Y$  es distinto de  $X$ ; el dibujo dinámico así lo indica porque está modelado en el Plano Desarguesiano, pero los axiomas no lo implican.

De hecho, y está es la observación de Fano: si declaramos que  $X = Y$ , tenemos definidos 7 puntos y 7 líneas en la figura (lo llamaremos una *configuración* y a la última línea la tenemos que curvar para que pase por los 3 puntos que le tocan) en la que cada línea tiene tres puntos y por cada punto pasan tres líneas; además, cumple los Axiomas I, II y NT. Es el primer ejemplo —y el más chico posible— de un plano proyectivo finito. ¡Tiene característica 2! Si en una línea cualquiera se nombran 0, 1 e  $\infty$  a los puntos y se construye al 2 por la construcción del cuarto armónico, se regresa al 0 y además se utiliza en la construcción a todo el plano.

Puesto que la armonía va a ser nuestra herramienta principal de los próximos dos capítulos, **debemos suponer que la característica de la geometría**



*tría proyectiva en la que trabajamos es distinta de*

2. Así, el cuarto armónico es un cuarto punto cuando la terna con que se empieza es una terna.

Fano también descubrió al siguiente plano proyectivo finito. Tiene característica 3, y surge de la configuración 13-13 que usamos en la escena del apartado anterior. Hay que observar que todas las líneas tienen 4 puntos excepto las 4 últimas que tienen 3 (las moradas). Dualmente, por todos los puntos pasan 4 líneas excepto por 4 (los del cuadrángulo exterior a la línea  $A \vee B$ ), por los que pasan 3. Hay una única manera de asignarle a estos 4 puntos (a los que les falta una recta) una de las 4 líneas (que andan buscando a un punto), de tal manera que al decretar esas pertenencias se cumplan los Axiomas I y II (el NT ya lo cumplen).

Así que hay planos proyectivos finitos, descubiertos hacía el final del siglo XIX por Fano. Han resultado ser muy importantes para las aplicaciones en áreas como la criptografía moderna; y también han sido semillero de problemas matemáticos de investigación. Se les estudia en un área bouyante de la matemática contemporánea.

## 2.3. Teorema de Desargues

Dejamos por un momento a la armonía para presentar y demostrar en esta sección al famoso Teorema de Desargues. Es el resultado fundacional de la geometría proyectiva, en el sentido de que es un resultado que necesita al Espacio Desarguesiano para expresarse con la elegancia que se merece y a la vez es un teorema que sorprende por su fina relación con las dimensiones 2 y 3.

En el último apartado regresamos a la armonía, viendo que con ella se relacionan tres teoremas famosos: el de Ceva, el de Menelao y el de Desargues.

### 2.3.1. El Teorema en dimensión 3

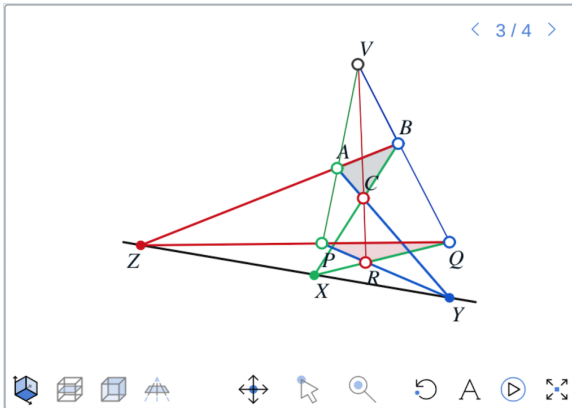
La idea básica de nuestra demostración del Teorema Armónico fue encontrar a un punto que ve lo mismo, el “voyeur”, para el cual dos construcciones, que parecían independientes, están en *perspectiva*. Pero la construcción del cuarto armónico es complicada. El Teorema de Desargues se refiere a una situación más sencilla: dos simples triángu-

los en perspectiva (por ahí hay un voyeur que los confunde).

21.1

**Escena 21. (Definición)** Dos triángulos *están en perspectiva* si hay una correspondencia entre sus vértices para la cual, las líneas por vértices correspondientes son concurrentes (es decir, si  $\triangle ABC$  y  $\triangle PQR$  son los triángulos ya en el orden preferente de la correspondencia, se tiene que  $A \vee P$ ,  $B \vee Q$  y  $C \vee R$  son líneas concurrentes); el punto de concurrencia es llamado el *foco de la perspectiva*.

21.2



Y se dice que *están en perspectiva axial* si las parejas de lados correspondientes ( $A \vee B$  y  $P \vee Q$ ,  $B \vee C$  y  $Q \vee R$ ,  $C \vee A$  y  $R \vee P$ ) se cortan en tres puntos que son colineales; la recta que los contiene es el *eje de la perspectiva axial*.

Por un *triángulo* se entiende una terna de puntos no colineales, llamados sus *vértices* (sin un orden preestablecido), junto con las tres líneas que generan las parejas, llamadas sus *lados*. Al escribir o especificar la terna se escoge por necesidad un orden, y en la notación para triángulos, simplemente estamos yuxtaponiendo los nombres; este orden se puede aprovechar, como lo hicimos, para las definiciones anteriores que requieren de una correspondencia.

21.3

**Teorema 4 (de Desargues)** *Dos triángulos están en perspectiva si y sólo si están en perspectiva axial (y con el mismo orden).*

La demostración se parte naturalmente en dos casos. Cuando los planos que generan los triángulos son diferentes (y la configuración del teorema

Esc:21↑bt

vive en el espacio de dimensión 3), y cuando son el mismo plano (el caso de dimensión 2).

22.1

**Escena 22. (Demostración en 3D)** Consideremos dos triángulos,  $ABC$  y  $PQR$ , que generan planos distintos. Supongamos primero que los triángulos están en perspectiva desde el punto  $V$ . Puesto que

22.2

$$V = (A \vee P) \wedge (B \vee Q),$$

el Axioma II nos da un punto

$$Z = (A \vee B) \wedge (P \vee Q).$$

22.3

Análogamente, obtenemos

$$X = (B \vee C) \wedge (Q \vee R),$$

$$Y = (C \vee A) \wedge (R \vee P).$$

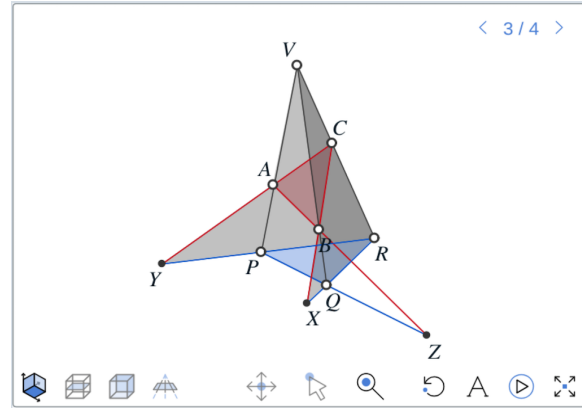
22.4

Y estos tres puntos están alineados pues están en la intersección de los dos planos (¡distintos por hipótesis!) que generan los triángulos:

$$X, Y, Z \in (A \vee B \vee C) \wedge (P \vee Q \vee R).$$

Lo cual demuestra que los triángulos están en perspectiva axial.

22.5



22.6

Inversamente, supongamos que los lados correspondientes de los triángulos se intersectan.

Esto da tres planos cuya intersección es un punto  $V$ ; y por parejas, los planos se intersectan en líneas que contienen a los pares de vértices correspondientes y, por supuesto, a  $V$ . Es decir, los triángulos están en perspectiva.  $\square$

Esc:22↑bt

### 2.3.2. Configuración de Desargues

La demostración del Teorema de Desargues en tres dimensiones, y en ambas direcciones, consiste en reconocer que, aunque en el enunciado sólo se habla de puntos y líneas, las hipótesis implican la existencia de planos. Y estos planos conducen, con contundencia, a la conclusión. Si prestamos atención a los planos que se usaron y cómo se usaron, obtenemos que en la configuración que involucra el enunciado del teorema aparecen otras nueve instancias de ese mismo teorema.

Se usaron cinco planos en la demostración: dos de los triángulos y tres más que son los lados de una pirámide triangular y que se intersectan en el foco. Obsérvese que hay 10 puntos y 10 líneas. Por cada punto pasan 3 líneas, cada línea contiene 3 puntos y en cada plano hay 4 líneas y 6 puntos. Lo que está pasando es que cada par de planos define a una línea (por intersección) y cada terna a un punto; hay 10 subconjuntos de tamaño 2 o 3 de un conjunto de 5 elementos. La estructura de incidencia de la Configuración de Desargues corresponde

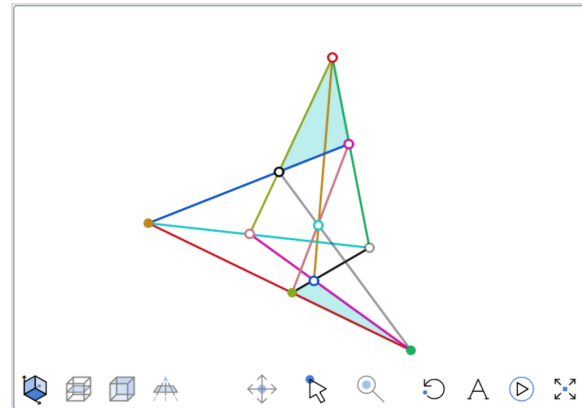
(con orden inverso) a la de los subconjuntos de tamaños 1, 2 y 3 de un conjunto de 5 elementos.

Si consideramos a una terna de planos, se determina a un punto que será el foco de una perspectiva; los dos planos restantes se intersectan en el eje de la perspectiva axial correspondiente y en ellos se determinan dos triángulos por intersección con las líneas por el foco.

**Escena 23.** Se ilustran las diez instancias del Teorema de Desargues al ocultar o mostrar colores.

23.1

Esc:23↑bt



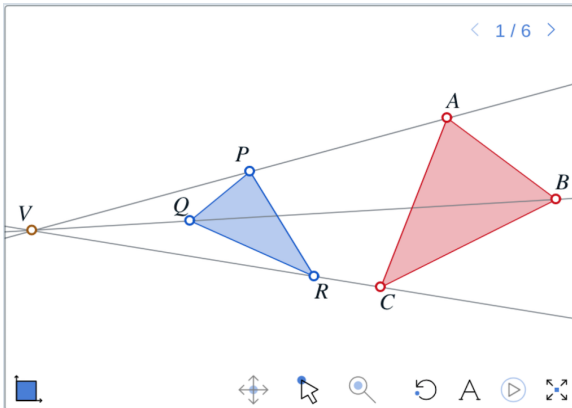
### 2.3.3. Demostración 2D

Cuando vemos una imagen fija en un plano y con un solo ojo, no hay manera de saber si realmente es plana o es una proyección de algo tridimensional pues podría ser ambas. La demostración siguiente se aprovecha de este hecho.

**Escena 24. (Demostración de Desargues en 2D).** Sean  $ABC$  y  $PQR$  dos triángulos en perspectiva desde un punto  $V$  en un plano  $\pi$ .

24.1

24.2



Sea  $O$  un punto cualquiera fuera de  $\pi$ . Construiremos una versión tridimensional de esta figura plana, pero tal que  $O$  no pueda distinguirlos. Al aplicarle la versión 3D del teorema,  $O$  verá con claridad a la línea que buscamos.

24.3

Sea  $A'$  un punto distinto de  $A$  en la línea  $O \vee A$ . Al mantener a  $B$  y a  $C$  en su lugar, ya tenemos un nuevo triángulo rojo  $A'BC$  fuera del plano.

24.4

Para “sacar del plano” al triángulo azul (y en perspectiva con el nuevo rojo), debemos tomar

$$P' = (O \vee P) \wedge (A' \vee V)$$

(usando al Axioma II con  $A = (O \vee A') \wedge (P \vee V)$ ). Entonces, los triángulos  $A'BC$  y  $P'QR$  están en perspectiva desde  $V$ . Por tanto... están en perspectiva axial y obtenemos a su eje.

24.5

24.6

La proyección de este eje desde el ojo  $O$  al plano  $\pi$ , es entonces el eje de perspectiva axial de los triángulos originales;  $O$  no distingue a las figuras... y si fuera la cámara, así vería a la escena.

24.7

Por el principio de dualidad, se obtiene la demostración en el otro sentido (perspectiva axial

implica perspectiva); pues, en el plano, que dos triángulos estén en perspectiva es el dual de que estén en perspectiva axial.  $\square$

Esc:24↑bt

EJERCICIO. Usando al Teorema de Desargues, demuestra al Teorema Armónico en el plano sin salirte de él. La idea es la misma, usar al “voyeur”  $V$  tal como se definió en la demostración que usa al Axioma III.

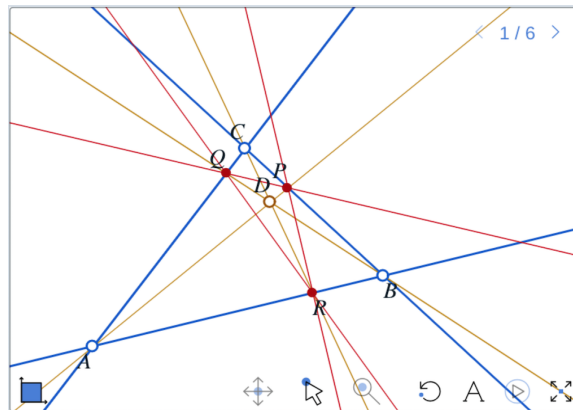
### 2.3.4. Armonía entre Ceva y Menelao

El uso del Axioma III, que asegura que estamos en dimensión 3 o más, fue básico para la demostración del Teorema de Desargues. Tan es así, que en el plano no se puede demostrar y entonces se usa como Axioma para definir a los **Planos Projectivos Desarguesianos** en los cuales se le asume como cierto. El último ejercicio, demuestra que en estos planos se tiene bien definido el concepto de armonía. Veremos ahora cómo con el Teorema de Desargues y la armonía, se relacionan a las configuraciones de Ceva y de Menelao que ya aparecieron en la escena del cubo en perspectiva (1.3.4).

Un caso muy particular y relevante de dos triángulos en perspectiva, es lo que habíamos llamado una **configuración de Ceva**: un triángulo con tres puntos en sus lados, tales que las líneas a los vértices opuestos son concurrentes. El punto de concurrencia es el foco de la perspectiva, y también es llamado **el punto de Ceva** de la configuración.

**Escena 25.** Sea  $ABC$  un triángulo y sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  puntos en sus lados que definen una configuración de Ceva.

25.1





25.2

Nótese que la manera más elegante de definirlos es con el foco de la perspectiva, que hemos denotado  $D$ , como un punto libre en el plano y los tres puntos extras de la configuración,  $P, Q, R$ , obtenidos como intersección de las líneas a los vértices opuestos con los lados del triángulo.

El Teorema de Desargues implica que los lados correspondientes se cortan en puntos colineales:

$$X = (B \vee C) \wedge (Q \vee R),$$

$$Y = (C \vee A) \wedge (R \vee P),$$

$$Z = (A \vee B) \wedge (P \vee Q).$$

Y esto es lo que habíamos llamado una *configuración de Menelao*: un triángulo  $ABC$  junto con puntos en sus lados que son colineales.

Hay que observar que en cada lado del triángulo original (e.g.,  $A \vee B$ ) se tiene ahora una cuarteta armónica (e.g.,  $A, R, B, Z$ ) y esto se demuestra con el cuadrángulo exterior que forman los otros puntos originales (e.g.,  $D, P, C, Q$ ).

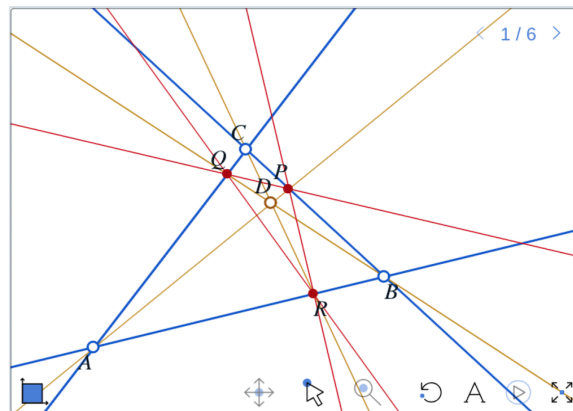
Así que hemos demostrado la mitad del siguiente teorema:

**Teorema 5 (armonía de Ceva y Menelao)** Una configuración es de Ceva si y sólo si su configuración armónica es de Menelao.

Donde entendemos que la configuración armónica de tres puntos en los lados de un triángulo, consiste del mismo triángulo junto con los tres puntos armónicos respecto al par de vértices en cada uno de los lados.

Para concluir la demostración del teorema, hay

Esc:25↑bt



que observar que dada una configuración de Menelao, al trazar líneas de los puntos en los lados al vértice opuesto del triángulo, se obtiene justo al dual de una configuración de Ceva. Aplicándole a ella la dirección del teorema que ya hemos demostrado (usando al principio de dualidad), se obtiene una configuración de Menelao en el plano dual; que en el primal consiste en tres líneas incidentes respectivamente con los vértices del triángulo y que además son concurrentes. Sus intersecciones con los lados opuestos del triángulo son ahora la configuración de Ceva deseada.  $\square$

EJERCICIO. Haz la construcción paso a paso y escribe la demostración de que la configuración armónica de una configuración de Menelao es de Ceva. Hay que dualizar la demostración y la construcción de la escena anterior.

## 2.4. Reflexiones Armónicas

Terminamos el capítulo de armonía regresando al tema de los movimientos geométricos; pero ahora con mayor precisión y formalidad de lo que lo hicimos en el Capítulo 1, pues ya podemos definir a nuestra herramienta básica para estudiarlos.

Se puede pensar al efecto final de un movimiento como una transformación de un cierto conjunto (o espacio) en sí mismo. Y aunque no se pueda llegar a él de manera continua como “el efecto final de un movimiento”, sino que su efecto está allí de golpe y porrazo; el ejemplo más común, contundente y mundano de una transformación es la reflexión en un espejo. Actúa sobre los objetos de este mundo y los sitúa en “otro” que espacialmente superponemos con éste de manera natural y lo pensamos como “el mismo”.

Resulta además que la generalización matemática de estas transformaciones geométricas adquirieron en el siglo XX una gran importancia teórica. Las reflexiones o involuciones, han sido objeto de atención y se asocian con nombres de geó-

metras muy relevantes del siglo XX, como son el inglés-canadiense H. S. M. Coxeter (1907 – 2003 ) y el belga-francés Jacques Tits (1930 – ).

En esta última sección definimos a las *reflexiones armónicas*. Vemos que se puede considerar a la armonía como su versión unidimensional y que, a la vez, generalizan muy limpia y nítidamente a las reflexiones de nuestro mundo, que llamaremos *reflexiones euclidianas*. Luego vemos sus propiedades básicas y concluimos con dos apartados en los que vemos ejemplos asociados a una configuración que ha aparecido desde el principio en este libro y desde múltiples puntos de vista, pero a la que no hemos dado la atención debida como objeto geométrico en sí. De su estudio como ejemplo, desprendemos las nociones centrales y abstractas de *grupos* que usaremos después.

### 2.4.1. Definiciones

En el mundo real, llamamos *reflexión* al efecto de un espejo:

“Un plano que actúa sobre los puntos del espacio mandándolos del otro lado (de ese plano) de tal manera que un punto y su imagen están siempre a la misma distancia del espejo.”

Por supuesto, esto no es estrictamente cierto. Estamos claros que lo que hace un espejo real es simplemente reflejar los rayos de luz. Pero lo hace con tal orden y exactitud que nuestro aparato perceptivo reconstruye objetos perfectamente plausibles y coherentes, aunque inexistentes más que como imagen. Sabemos que no actúa sobre todo el espacio sino sobre un sólo lado del espejo y además, apenas sobre un subconjunto pequeño (típicamente un baño). Sin embargo, la abstracción matemática de una reflexión, lo que entenderemos de aquí en adelante por *reflexión*, sí actúa sobre todo el Espacio Euclidiano y de la misma manera: preservando distancias, se intercambian los dos lados de un *espejo*, que ahora es un plano en toda su extensión y magnitud.

Otra manera de describir el efecto de una refle-

ción es considerar al haz de líneas perpendiculares al espejo: cada una de ellas se voltea, se refleja, en su punto de intersección con el espejo. Si nos incorporamos al Espacio Desarguesiano, este haz de líneas es el haz concurrente en un punto ideal y en cada una de éstas líneas, la transformación es el apareamiento de armonía respecto a ese punto ideal (en el infinito) y el punto en el que corta la línea al espejo; pues el punto medio entre cada punto-fuente y su punto-imagen está en el espejo.

Llamaremos **reflexión armónica** a la generalización natural de esta idea:

- Dado un plano  $\pi$ , llamado el **espejo**, y un punto  $C$  fuera de  $\pi$ , llamado el **centro**: la **reflexión armónica** que determinan  $\pi$  y  $C$  es la transformación que a cada punto  $X$  le asocia el punto  $X' \in C \vee X$  que es armónico de  $X$  respecto al centro  $C$  y al espejo  $\pi$  (más precisamente: al punto en el espejo  $\pi$  por donde pasa la línea  $C \vee X$ ).<sup>1</sup>

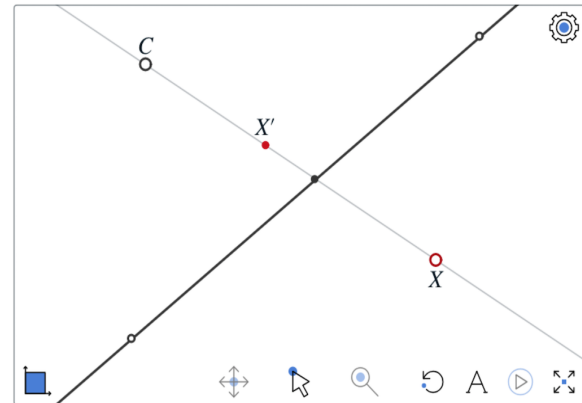
<sup>1</sup>Cuando se trabaja con reflexiones armónicas, conviene suponer, como ya habíamos indicado, que la característica es distinta de 2 para que no sean la función identidad.

**Escena 26.** Por supuesto, esta definición también tiene sentido en un plano cuando el espejo es una línea  $e$  que no contiene al centro  $C$  –es lo que tenemos en la figura con el espejo  $e$  en negro. La cuarteta

$$C, X, (C \vee X) \wedge e, X'$$

es armónica para cualquier  $X$ . (Se obtiene a  $X'$  con la herramienta “Armonía”: se selecciona a  $X$  con un click y luego a la pareja  $C$ , e arrastrando al ratón entre ellos.)

Además, una reflexión armónica en el espacio



se restringe a la reflexión armónica en los planos que pasan por el centro con espejo en la línea de intersección. Y en las líneas que pasan por el centro es el apareamiento de armonía: fija dos puntos e intercambia los dos segmentos en que éstos la parten; típicamente (y en el Espacio Desarguesiano) uno de ellos tiene al punto medio y el otro al punto ideal.

Las reflexiones euclidianas son entonces las reflexiones armónicas (en la extensión Desarguesiana) respecto a un espejo (línea o plano dependiendo del ambiente considerado) y cuyo centro es el punto ideal asociado a (o al infinito en) su dirección perpendicular. Así, el espejo se vuelve la *mediatriz* entre cualquier objeto y su imagen.

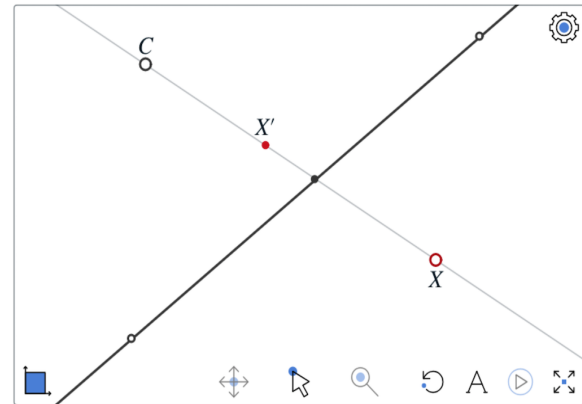
Por otro lado, si en el plano tomamos como espejo a la línea al infinito, la reflexión armónica es la rotación de media vuelta (180 grados) alrededor del centro; y, en el espacio de 3 dimensiones, con el espejo en el plano al infinito se obtiene la inversión antipoda (o central) en el centro.

En general, una reflexión armónica cualquiera se ve como estos dos ejemplos bien acoplados y

trabajando al unísono, en plena armonía. Cerca del espejo se ve como una reflexión y cerca del centro como un medio giro (juegue con  $X$  en la figura para observar este comportamiento); en particular, deja fijos (en su lugar y sin mover) a cada uno de los puntos del espejo y al centro.

La simetría de la armonía implica que si aplicamos una reflexión armónica dos veces, todo regresa a su lugar. Como función es su propia inversa que es lo que se llama una *involución*. Y además,

Esc:26↑bt



veremos a continuación que cumple la propiedad básica que las transformaciones geométricas deben cumplir.

## 2.4.2. Líneas van en líneas

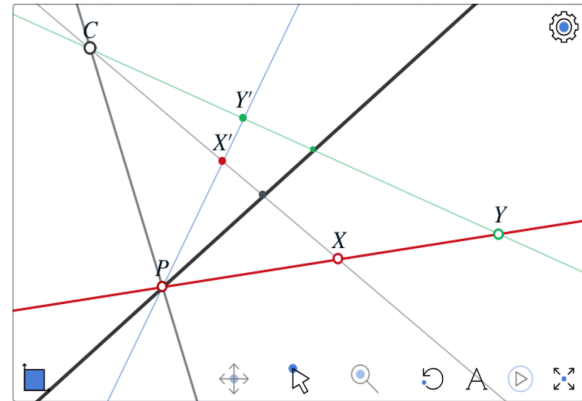
**Proposición 1** *Una reflexión armónica manda líneas en líneas.*

27.1

**Escena 27. (Demostración)** Consideremos a la reflexión armónica con centro  $C$  y espejo  $e$  en el plano que generan,  $\pi = e \vee C$ .

Puesto que será el personaje central, conviene ponerle nombre a la transformación, la llamaremos  $\rho$  (léase “rho”). Y sea  $\ell$  una línea cualquiera. Queremos demostrar que la imagen de  $\ell$  bajo la reflexión  $\rho$ , que denotaremos  $\ell \cdot \rho$  (que se puede leer “ $\ell$  bajo  $\rho$ ” o “ $\ell$  punto  $\rho$ ”), y que es el conjunto de todas las imágenes de puntos en  $\ell$  bajo  $\rho$ , también es una línea.

Si la línea  $\ell$  es el espejo  $e$ , se queda fija punto a punto y no hay nada que demostrar ( $e = e \cdot \rho$ ).



Supongamos entonces que

$$P = e \wedge \ell$$

es un punto y podemos considerar a un nuevo punto  $X \in \ell$ , de tal manera que  $\ell = P \vee X$ .

27.2

Sea  $X'$  la imagen de  $X$  bajo  $\rho$ , esto es,

$$X' = X \cdot \rho.$$

Vamos a probar que si definimos  $\ell' = P \vee X'$ , entonces

$$\ell' = \ell \cdot \rho$$

27.3

para concluir con la demostración (a la línea  $\ell$ , la reflexión  $\rho$  la manda en la línea  $\ell'$ ).

Esto es fácil de ver, pues si consideramos cualquier otro punto  $Y \in \ell$  y definimos

$$Y' = (C \vee Y) \wedge (P \vee X') = (C \vee Y) \wedge \ell',$$

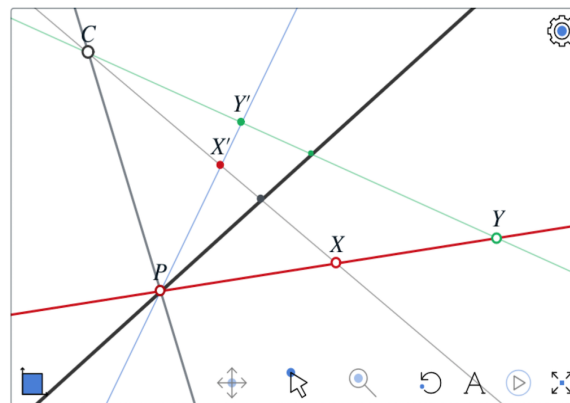
obtenemos dos cuartetitas alineadas y en perspectiva desde  $P$ ; es decir,  $P$  proyecta a una en la otra. Por la definición de  $\rho$ , una de ellas es armónica  $(C, X, e \wedge (C \vee X), X')$ , y por lo tanto la otra (asociada a  $Y$ ) también lo es. Y esto implica que

$$Y' = Y \cdot \rho \in \ell \cdot \rho;$$

asi que  $\ell' = \ell \cdot \rho$ .

De hecho, y esto será usado después, obsérvese que  $\rho$  actúa como la proyección desde el centro  $C$  entre la línea  $\ell$  y su imagen  $\ell'$ .

También hay que remarcar que la cuartetita de líneas  $C \vee P, \ell, e, \ell'$  es una cuartetita armónica de líneas concurrentes en  $P = e \wedge \ell$ . Lo cual implica que en el plano dual,  $\rho$  induce una reflexión armónica:



la que tiene centro  $e^*$  (el punto que corresponde a  $e$ ) y espejo en  $C^*$  (la línea que corresponde a  $C$ ).

Hemos supuesto –implícitamente por las figuras– que  $C \notin \ell$ , pero en el caso en que  $C \in \ell$ , la recta se queda fija como recta, pues  $\rho$  es una reflexión armónica ahí.

Finalmente, para una reflexión armónica en dimensión 3, la argumentación se restringe al plano  $C \vee \ell$  con espejo en la línea de intersección con el espejo, y este es el caso que ya vimos.  $\square$

Esc:27↑bt

### 2.4.3. Configuración del cuadrángulo extendido (y dos grupitos)

Para entender un concepto, o familiarizarse con él, es bueno trabajarlo y ver ejemplos. Muy en particular, nos interesan los ejemplos de reflexión armónica relacionados con *la configuración del cuadrángulo extendido*, que aunque ya ha surgido en diversos contextos, nos conviene tratarla primero en sí misma con calma y más precisión.

28.1 **Escena 28.** Un *cuadrángulo* son cuatro puntos coplanares en posición general (es decir, ningunos tres de ellos colineales) y que a veces llamaremos sus *esquinas*.

28.2 Entre ellos, se pueden trazar seis líneas.  
Éstas líneas se dividen naturalmente en tres parejas, que llamaremos *parejas opuestas*, y que tocan a las cuatro esquinas. Pintando a las seis líneas con tres colores (uno para cada pareja opuesta de líneas), este apareamiento queda muy claro y por cada punto original (por cada esquina) pasan líneas de los tres colores.

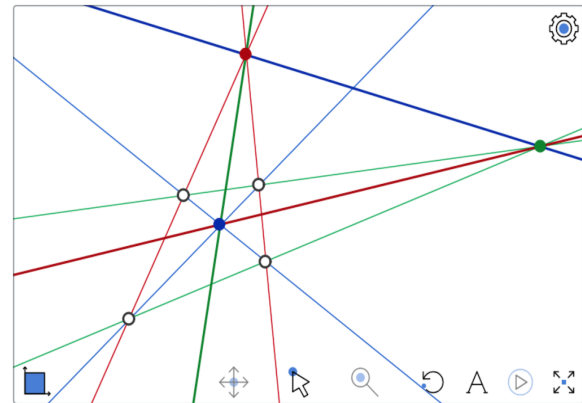
28.3 Cada par de líneas opuestas se corta en un nue-

vo punto, que resulta natural pintar con el color correspondiente... y estos tres puntos definen un triángulo, cuyos lados pintamos del color del vértice opuesto.

28.4

Así, tenemos un nuevo triángulo que llamaremos el *triángulo derivado* o *diagonal*. Con él, se completa una configuración que consta de 7 puntos y 9 líneas y que denominamos *configuración del cuadrángulo extendido*.

Antes de seguir adelante, abramos un parénte-





sis para expiar algunos pecados de terminología de los que somos culpables.

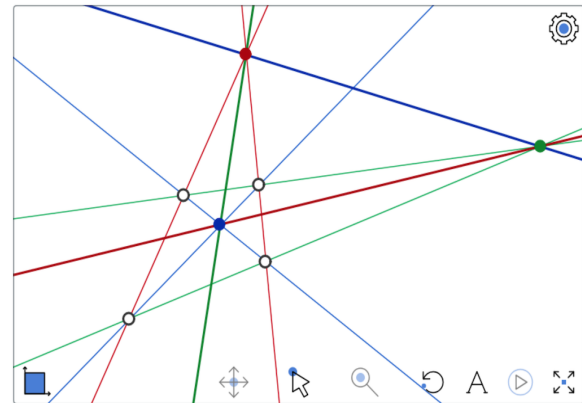
En la primera construcción del libro arrancamos con lo que llamamos una *loseta*, que ahora podemos definir como un cuadrángulo junto con un punto distinguido en su triángulo derivado, o un color. Esto es lo que determina que *su horizonte* esté bien definido como el lado opuesto en el triángulo derivado. En aquel entonces, representamos a la selección de este punto con algo más mundano como “colorear la loseta”, pues hubiera sido imposible y contraproducente intentar abordar estos detalles técnicos.

Los tres puntos del triángulo derivado corresponden a los posibles *ordenes cíclicos* de la cuarteta de puntos: al eliminar las líneas de su color, queda un ciclo con cuatro puntos y cuatro líneas con los dos colores restantes alternados.

También, hemos sido un poco ambiguos en el uso de los términos “cuadrángulo”, “cuadrilátero” y “loseta”. Pero ahora ya podemos precisar: un *cuadrángulo* son cuatro puntos en posición general; un *cuadrilátero* son cuatro líneas en posición ge-

neral (ninguna tercia concurrente). Y entonces una loseta son los dos juntos: cuatro puntos y cuatro líneas que dan un orden cíclico (en puntos y líneas) y que dejan fuera a un par de líneas opuestas del cuadrángulo (las *diagonales* de la loseta que se cortan en su punto derivado escogido). Además usaremos los términos *cuadrángulo cíclico*, o *cuadrilátero cíclico*, cuando la loseta está determinada por 4 puntos, o 4 líneas, con un orden cíclico dado.

28.5



Regresemos a la configuración del cuadrángulo extendido. Obsérvese que cada lado del triángulo derivado corta a las dos líneas originales de su mismo color en dos nuevos puntos que naturalmente heredan color –les llamaremos “puntitos” para distinguirlos de los “originales” y los “derivados”. No es difícil comprobar –sin necesidad de trazos nuevos– que cada una de las nueve líneas tiene ahora a una cuarteta armónica de puntos.

Si el lector pensó en ese “no es difícil comprobar que...”, y se convenció rápido, seguro que uso un argumento de simetría: no hay que ver nueve casos sino únicamente dos. Pues hay dos tipos de líneas, las “derivadas” (3) y las “originales” (6). Lo que nos interesa describir ahora es que esa simetría lógica (en qué paso de la construcción apareció), también se expresa de manera geométrica.

Consideremos a las reflexiones armónicas (asociadas a un color) con centro en un vértice del triángulo derivado y espejo en su lado opuesto.

Para experimentar con el efecto de estas tres transformaciones, hemos incorporado a un punto libre X (en gris) y a sus tres reflejados armónicos

28.6

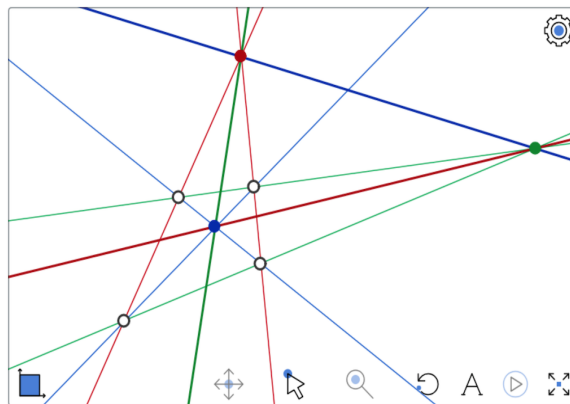
con el color (tenue) correspondiente; y además los unimos con segmentos a X para identificar visualmente su procedencia.

Al llevar X a los cuatro puntos-esquina, se ve que las tres reflexiones los permutan: intercambian –o transponen– a las dos parejas en las líneas del color correspondiente (pues las cuartetitas en esas líneas son armónicas).

Pero se puede observar algo más:

La composición de dos de las reflexiones da a

28.7



la tercera; por ejemplo, primero aplicar la roja a  $X$  para después aplicarle la verde al resultado, da lo mismo que aplicarle la azul a  $X$ . Esto es cierto para las cuatro esquinas del cuadrángulo aunque es cierto en general y lo demostraremos en el apartado siguiente.

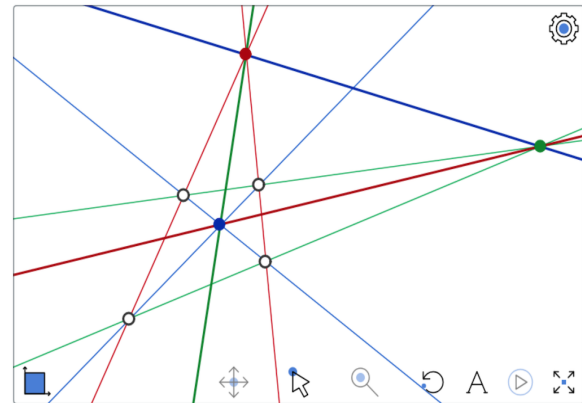
Si al conjunto de las tres reflexiones le añadimos a la **identidad** (es decir, la transformación que no hace nada, que deja a todo mundo en su lugar) y que en el dibujo, su efecto en  $X$  está representado por  $X$  mismo, se tiene que cualquier composición de un par en el conjunto está ahí y que también están ahí todas las transformaciones inversas –que en este caso son ellas mismas. Éstas son las condiciones que se le ponen a un conjunto de transformaciones para llamarle *grupo*.

Definámoslo con precisión. Estamos llamando **transformación** a una biyección, o correspondencia 1-1, de un conjunto consigo mismo; y por lo tanto tiene bien definida a una transformación inversa. Un conjunto de transformaciones de un conjunto base, es un **grupo de transformaciones** si contiene a la identidad, a todas las transformaciones

inversas de sus elementos y a cualquier composición de ellas (es cerrado bajo composición).

El grupo que teníamos, las tres reflexiones armónicas definidas por el triángulo derivado más la identidad es un grupo de orden (o tamaño) 4, conocido como el **grupo de Klein**. Se le puede pensar como grupo de transformaciones de todo el plano, o bien de las cuatro esquinas del cuadrángulo; y se dice que son dos **acciones** del mismo grupo.

Pero todavía no incluye a todas las simetrías



28.8

geométricas de la configuración, sólo a aquellas que preservan la coloración. Y aún hay más.

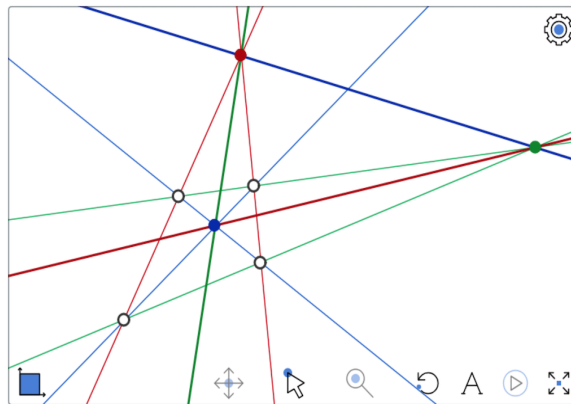
Consideremos a la reflexión armónica con centro en un puntito rojo y espejo en la línea roja que no lo contiene. Su efecto en las cuatro esquinas es que las dos que están en el espejo se quedan en su lugar pero las dos de su lado opuesto se transponen. Como los cuatro puntos que dan lugar a ella se permutan, toda la configuración se tiene que quedar invariante, aunque se muevan internamente sus elementos; en particular, en el ejemplo transponen color todos los elementos verde y azul.

Como se pueden obtener de manera análoga (variando el color y el espejo), a las 6 transposiciones simples de cualquier par de los cuatro puntos-esquina originales, entonces se puede lograr cualquier permutación de ellos componiendo a estas transposiciones. Y permutaciones de un conjunto de 4 elementos hay 24; forman el llamado **grupo simétrico** de orden 4. Así que componiendo a las correspondientes reflexiones armónicas que hemos señalado, se obtiene un grupo de transformaciones del plano de orden 24 en el que ya no

todas ellas son reflexiones armónicas (encuentra un ejemplo y demuestra que no es una reflexión armónica).

28.9

Antes de pasar a demostrar el hecho que enunciarnos y usamos sin demostrar, debemos notar que estamos a un paso de la configuración 13-13 que ya habíamos mencionado y usado tanto en la prueba de la simetría como en el de la armonía entre Ceva y Menelao. El Teorema Armónico implica que los seis puntitos se alinean en ternas tricoloro-



res para dar cuatro líneas (grises).

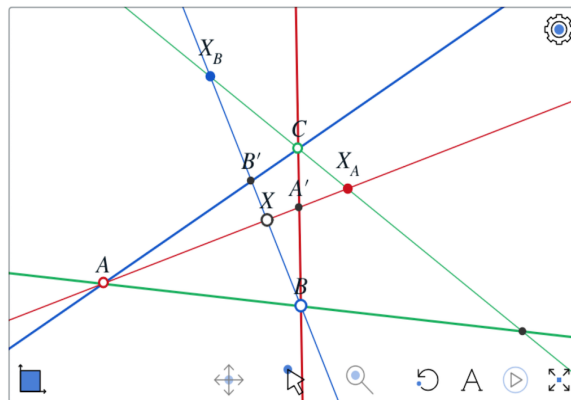
EJERCICIO. Es un buen ejercicio de dualidad ver que si con este último cuadrilátero (cuatro líneas en posición general) se desarrolla la construcción dual, se obtiene exactamente la misma configuración y el último paso es encontrar los cuatro puntos originales donde concurren tres rectas de distinto color. Esto se uso en la descripción de un plano proyectivo de característica 3.

Esc:28↑bt

#### 2.4.4. Lema del triángulo de Klein

Quedamos de demostrar algo, y lo haremos en general (el caso que nos interesa es aplicar el siguiente lema al triángulo derivado). El nombre es porque las reflexiones armónicas que define un triángulo dan un grupo de Klein.

**Lema 3 (Triángulo de Klein)** Sean  $A, B, C$  tres puntos no colineales. Entonces, la reflexión armónica con centro en  $A$  y espejo en  $B \vee C$  seguida de la reflexión armónica con centro en  $B$  y espejo en  $C \vee A$  es la reflexión armónica con centro en  $C$  y espejo en  $A \vee B$ .



**Escena 29. (Demostración)** Llamemos  $\rho_A$  a la reflexión armónica con centro en  $A$  y espejo en  $B \vee C$ ; y análogamente, sean  $\rho_B$  y  $\rho_C$  las reflexiones armónicas con centro en  $B$  y en  $C$ , y con espejo en el respectivo lado opuesto del triángulo.

29.1

Puesto que son funciones del plano en sí mismo, se pueden componer; es decir, aplicar una después (o seguida) de la otra para obtener una nueva función. Lo que dice el lema es que si componemos a dos de ellas, obtenemos a la tercera; pues los

nombres son intercambiables. Y para demostrar la igualdad de dos funciones (en este caso transformaciones) hay que verificar que tienen el mismo efecto en cualquier elemento del dominio.

29.2

Sea  $X$  un punto cualquiera en el plano; y sea  $X_A$  (respectivamente,  $X_B$ ) el reflejado armónico de  $X$  con centro  $A$  y espejo  $B \vee C$  (resp. con centro  $B$  y espejo  $C \vee A$ ). Esto lo podemos escribir de manera más concisa y clara, como

$$X_A = X \cdot \rho_A \quad \text{y} \quad X_B = X \cdot \rho_B.$$

Vamos a demostrar que  $X_A$  y  $X_B$  son reflejados armónicos con centro  $C$  y espejo  $A \vee B$ , es decir, que

$$X_B = X_A \cdot \rho_C.$$

29.3

Si llamamos

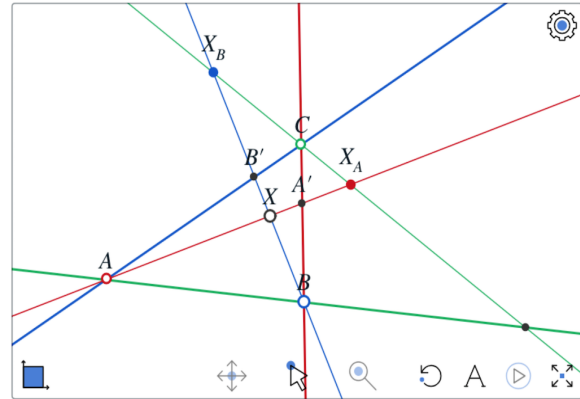
$$A' = (A \vee X) \wedge (B \vee C)$$

y

$$B' = (B \vee X) \wedge (C \vee A),$$

entonces la proyección desde  $C$  de la línea  $A \vee X$  en la línea  $B \vee X$  manda a la terna

$$A, X, A' \quad \text{en la terna} \quad B', X, B.$$



Y puesto que las proyecciones preservan armónica, tiene que mandar a  $X_A$  en  $X_B$  y por lo tanto  $C, X_A, X_B$  son colineales.

29.4

Falta ver que la cuarteta

$$(A \vee B) \wedge (C \vee X_A), X_A, C, X_B$$

en esta nueva línea por  $C$  es armónica. Y esto se sigue de que es la proyección desde  $A$  de la cuarteta armónica  $B, X, B', X_B$ .

Hemos demostrado que para  $X$  fuera del trián-

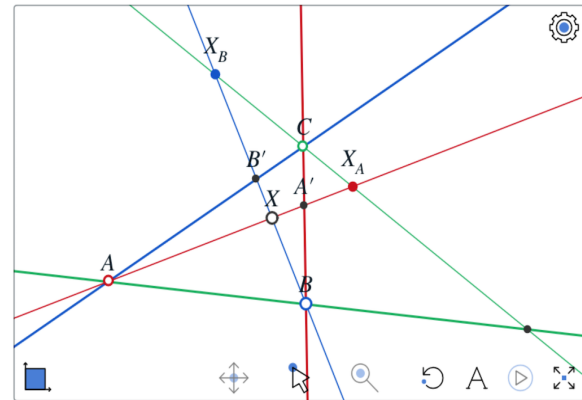
gulo:  $X_B = X_A \cdot \rho_C$ . Pero también es cierto para  $X$  en las líneas del triángulo o en sus vértices (aunque en algunos casos haya que cambiar un poco la argumentación, y lo dejamos como ejercicio). Entonces, denotando a la composición de funciones con un puntito, y leyéndolo como “seguido de” o “bajo” en el orden de lectura natural, tenemos que para cualquier  $X$  en el plano:

$$\begin{aligned} X \cdot (\rho_A \cdot \rho_C) &= (X \cdot \rho_A) \cdot \rho_C \\ &= X_A \cdot \rho_C = X_B = X \cdot \rho_B. \end{aligned}$$

Y entonces podemos concluir que  $(\rho_A \cdot \rho_C)$  y  $\rho_B$  son la misma función del plano en sí mismo.  $\square$

29.5

Por último, hay que notar que si completamos la escena con  $X_C = X \cdot \rho_C$ , y los trazos equivalentes a los de la demostración, llegamos a la escena anterior que arrancó con un cuadrángulo (quizá haya que mover a  $X$  para verlo). Pero ahora, se inició con el triángulo derivado; y el punto  $X$  (fuera de él) es quien da lugar al cuadrángulo  $X, X_A, X_B, X_C$ , que se obtiene aplicando las cuatro transformaciones del grupo de Klein –definido por el triángulo– a un



punto general  $X$ ; conjunto al que se llama la **órbita** de  $X$  bajo la acción del grupo.

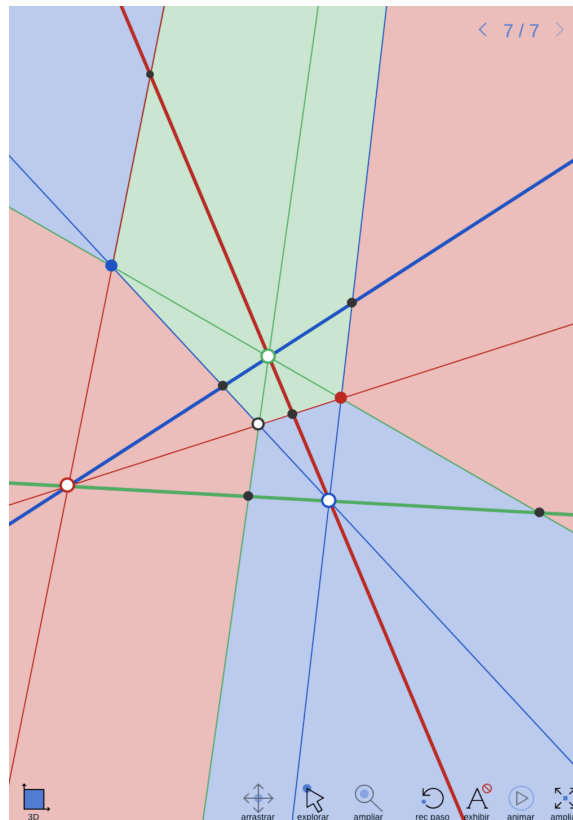
29.6

Además, podemos resaltar con su correspondiente color a las tres posibles losetas a las que da lugar el cuadrángulo para que, moviendo adecuadamente a  $X$ , quede claro como corresponden a sus tres ordenes cíclicos.

*(Para lograr la escena, se usa la herramienta “Triángulo” con una línea previamente seleccionada; y entonces, ProGeo3D dibuja al triángulo que no la toca. Tam-*

*bién funciona así la herramienta “Segmento”: con una línea seleccionada, se dibuja al segmento que no la toca. Y si no hay línea seleccionada se presupone a la del infinito, que da a los segmentos y a los triángulos en su sentido euclidiano clásico. Esto fue crucial para lograr la escena “El otro lado del horizonte”.)*

Esc:29↑bt





## Capítulo 3

# Curvas Armónicas y Reglados

Uno de los logros más trascendentes de la matemática griega fue detectar la importancia de las curvas cónicas, definir las y estudiarlas. De ellas, convivimos cotidianamente con las elipses ya que son los círculos vistos de lado y por tanto, las vemos por doquier en nuestro entorno contemporáneo. Pero los griegos tuvieron la audacia de incluir en la misma familia a las parábolas y a las hipérbolas. Las llamaron **curvas cónicas** pues las definieron como la sección, o intersección, de un plano con un cono circular. Ahora, se les define también

como *lugares geométricos* en el plano determinados por ciertas propiedades métricas que no viene al caso hacer específicas.

Como sucede reiteradamente con objetos matemáticos importantes, surgen naturalmente en diversos contextos.

Casí veinte siglos después, fueron una pieza clave para entender la naturaleza y echar a volar a lo que hoy llamamos *física*, Johannes Kepler (1571 – 1630) usó a las elipses para describir las órbitas de los planetas; también aparecieron en el tiro para-

bólico. Y cuando Descartes coordinatizó al plano, las curvas cónicas resultaron estar asociadas a los polinomios de segundo grado en dos variables. Éstos polinomios definen curvas en el plano, a las que se llamó de segundo orden o de segundo grado y se demostró que incluían de manera protagónica a las viejas y conocidas curvas cónicas.

Sin embargo, para definir las no se necesita la noción de distancia (de la que dependen los conos circulares y sus descripciones como lugares geométricos asociados a focos y constantes numéricas), ni de aritmetizar la geometría (para asociarlas con ceros de polinomios). Se les puede definir con base en simple incidencia.

La primera definición de curvas cónicas en el contexto de la Geometría Proyectiva se debe al matemático alemán Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867), presentada en su libro *Geometrie der lage* de 1847. Se basa en una propiedad de las curvas cónicas, que ya había sido estudiada por Girard Desargues y Jean-Victor Poncelet (1788 – 1867), y que consiste en que inducen una *polaridad* en el plano; esto es, inducen un apareamiento entre

puntos y líneas que extiende a todo el plano la asociación, o apareamiento, natural de cada punto en una curva cónica con su línea tangente. Lo que hace Von Staudt es estudiar a las polaridades en un contexto más general y abstracto que es el de funciones geométricas que relacionan a los puntos y a las líneas de un plano. Así, una cónica surge de una polaridad dada: se le obtiene como el conjunto de los puntos que inciden en su línea asociada (llamada en general su *línea polar* y que en el caso de estar en la cónica será su tangente). Esta definición es *auto-dual* en el sentido de que simultáneamente a los puntos, se está haciendo específico a un conjunto de líneas, las que forman el *haz tangente* o *haz envolvente* de la curva cónica y por lo cual Coxeter, [?] pg. 72, dice que “es una definición extraordinariamente natural y simétrica”. Poco tiempo después, Jakob Steiner (1796 – 1863) da otra posible definición de curvas cónicas basada en *proyectividades*, a las cuales estudiaremos con cuidado en el Capítulo ??.

Las definiciones que usamos en este libro son nuevas o, hasta donde sabemos, inéditas. La pri-

mera es sorprendentemente simple y elegante; aunque no es simétrica o auto-dual en el sentido de Coxeter, conduce naturalmente a su dualización y no es difícil demostrar que ambos objetos geométricos (curva y haz de líneas) se corresponden naturalmente. Esta definición como lugar geométrico surge de darle su lugar a los conceptos de armonía y de “ver” (en el espíritu de Desargues). Tiene la particularidad de estar asociada o anclada a una cuarteta de puntos. Sin embargo, de esta definición se deduce de inmediato la invarianza bajo proyecciones, lo cual identifica naturalmente a estas curvas con las clásicas secciones cónicas en el caso del Espacio Desarguesiano.

Nuestra segunda definición –la “de batalla” por ser la que usamos para demostrar el Teorema de Polaridad que incorpora al punto de vista de von Staudt– está en el espíritu de la descripción griega clásica, pues usa a la tercera dimensión para obtenerlas como secciones planas de ciertas superficies. En nuestro caso, serán las doblemente regladas que se pueden definir elegantemente por simple incidencia. Este enfoque está inspirado en

el trabajo del matemático francés Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847), [ref??], en el cual define a las esferas famosas que llevan su nombre, pero cuyo objetivo principal era dar una demostración del Teorema de Pascal sobre curvas cónicas usando superficies regladas. Veremos esta demostración y la del Teorema de Pappus en la última sección.

Como no es correcto presuponer cosas que no se demuestren inmediatamente, aunque a la larga sean ciertas, pues la esencia de las matemáticas es no aceptar hechos como dados hasta que estén debidamente validados: hemos optado por darles un nuevo nombre a estas curvas. Llamaremos a las primeras “*curvas de armonía*” y a las de batalla “*curvas armónicas*” en referencia a su íntima relación con ese concepto. Esto nos permitirá parafrasear con más facilidad los teoremas que establecen la equivalencia de las distintas definiciones pues, a final de cuentas, en el contexto del Espacio Desarguesiano como extensión del Espacio Euclidiano, resultan ser las mismas curvas cónicas de siempre.

### 3.1. Curvas de armonía

De una definición bien intencionada pero incompleta surge, al completarla como indican los dibujos y la intuición, una asociación natural con su definición dual. Una vez demostrada esta correspondencia o auto-dualidad, vemos la equivalencia de las curvas de armonía con las secciones cónicas y experimentamos en este nuevo contexto con sus tres tipos clásicos. Para finalizar la sección, precisamos la noción de *polaridad*, enunciamos el teorema básico que equipara a las curvas de armonía con las curvas cónicas a la von Staudt y demostramos una parte de esa equivalencia.

#### 3.1.1. Definición

Consideremos un *cuadrángulo cíclico*. Consta de cuatro puntos en posición general, que llamamos sus *esquinas* y que además vienen con un orden cíclico establecido o, lo que es lo mismo, vienen ya apareados en dos *parejas opuestas* (dadas en las figuras por dos colores):

- su **curva de armonía** es el lugar geométrico de los puntos que los ven como una *cuarteta armónica*.

Donde, un punto **ve** a una cuarteta de puntos como armónica, si las cuatro líneas a ellos son una *cuarteta armónica de líneas concurrentes*; y esto es equivalente a que al cortar a estas líneas con una línea-lienzo cualquiera, se obtiene una *cuarteta armónica de puntos*.

**Escena 30.** Sea  $A, C, B, D$ , un cuadrángulo cíclico.

30.1

30.2

< 2 / 8 >



30.3 Su curva de armonía se construye como sigue:  
**i)** La *línea diagonal*,  $A \vee B$ , servirá de lienzo para detectar armonía y, a su vez, de *carril* para un punto en ella (el *parámetro*  $X \in A \vee B$ ).

30.4 **ii)** Sea  $Y$  el cuarto armónico de  $X$  respecto a  $A, B$ .

**iii)** Se trazan líneas de la pareja  $X, Y$  a las otras dos esquinas y se marca a su punto de intersección:

$$Z = (X \vee C) \wedge (Y \vee D),$$

30.5 que claramente está en la curva de armonía.

**iv)** Al variar al punto  $X$  (libre en la línea  $A \vee B$ ), el punto  $Z$  dibuja a la curva de armonía deseada.

*En el último paso se utiliza a una herramienta que nos faltaba usar: la de "Curva/Familia". Con ella activa, se selecciona a un punto (en esta instancia, el negro  $Z$ , del cual se quiere obtener el rastro) y se arrastra a un punto variable que la hace de parámetro (en nuestro caso, el gris  $X$  que está definido en un carril unidimensional aceptable: la línea roja  $A \vee B$ ). Y el producto es la curva que pintaría el punto negro si se le cargara de tinta y se moviera al punto gris por todo su carril.*

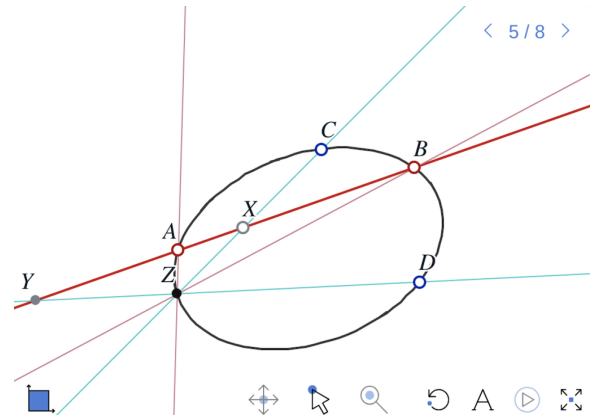
Hay que observar primero que la construcción da cuenta de todos los puntos del *lugar geomé-*

*trico* que se definió. Pues si un punto  $P$  cualquiera ve a la cuarteta como armónica, corresponde al punto-parámetro

$$X = (P \vee C) \wedge (A \vee B).$$

Pero hay algo delicado que no captó nuestra primera definición, aunque sí que tiene, en principio, la intención correcta.

El dibujo de la curva de armonía indica a todas luces que es una elipse; pero hay huecos en su de-



definición formal, que son los cuatro puntos que la generaron. En esos cuatro puntos debemos interpretar eso de “ver” con una sutileza que nos indica con claridad la figura cuando el punto-parametro X pasa sobre los puntos de una cuarteta armónica distinguida: ... la de las dos esquinas rojas, A, B, la intersección de las diagonales (el centro, O, de la loseta pintado de verde) y su cuarto armónico.

30.6

Ampliamos nuestra definición de “ver”, siguiendo lo que sugiere la figura:

- Un punto se **ve** a sí mismo al escoger a una línea de visión que pasa por él.

30.7

Entonces, para ver armónica a la cuarteta, los puntos originales escogen a la cuarta línea armónica respecto a sus líneas hacía los otros tres; que es la línea que va al cuarto armónico del centro O respecto a los puntos del color opuesto. A estas líneas las llamaremos las **tangentes** de los cuatro puntos respecto a la curva porque, como veremos después, sólo la tocan en un punto (y más adelante, las llamaremos también sus **líneas polares**).

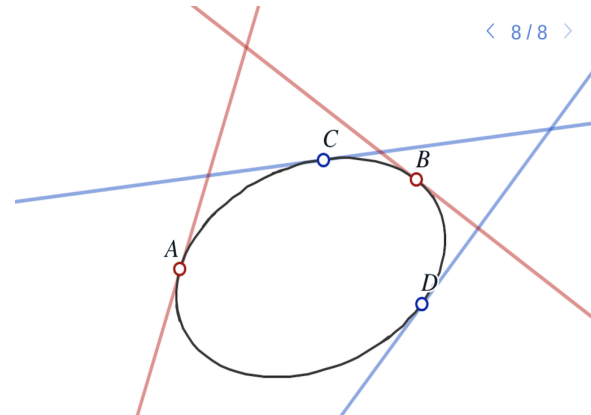
30.8

Con esta noción generosa de “ver” (para puntos), la definición formal del lugar geométrico ya

corresponde a lo que vemos (nosotros, humanos) en la imagen. La curva de armonía de un cuadrángulo cíclico lo incluye a él y es, efectivamente, una **curva** en el sentido de que:

- *está parametrizada por los puntos de una línea.*

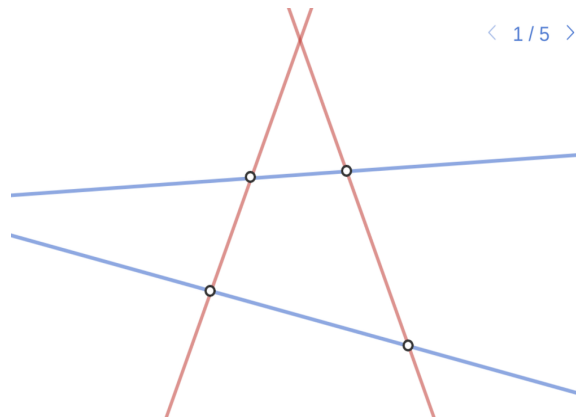
Pero además está en correspondencia 1-1 con la línea que la parametriza, y de tal manera que una cuarteta armónica distinguida en la línea, corresponde al cuadrángulo cíclico generador. Y aún más:



en esos puntos-esquina que la *generan*, la definición nos ha dado de regalo a sus líneas tangentes.

Esc:30↑bt

Para la selección de puntos originales (con el orden cíclico en posición convexa) lo que se obtiene es una elipse, pero se pueden (y deben) mover para obtener hipérbolas; y en general da curvas cónicas. Pero antes de ver esto con cuidado, conviene explotar el regalo de las cuatro líneas tangentes, para resaltar que estas curvas vienen equipadas con un *haz tangente* o *envolvente*.



### 3.1.2. Haces armónicos

Consideremos ahora a la versión dual: un *cuadrilátero cíclico* que consiste en una cuarteta de líneas en posición general (sin ternas concurrentes), a las que podemos llamar *lados*, con un orden cíclico determinado, o bien, pintadas en dos parejas de dos colores (los lados opuestos). Diremos que una línea cualquiera las *ve armónicas* si tiene una *cuarteta armónica de puntos que están en ellas*.

Hay dos casos, un lado del cuadrilátero tiene que escoger como su punto representante al cuar-

to armónico de las intersecciones con los otros tres lados; y si es una línea general, la cuarteta de puntos donde la cortan los lados del cuadrilátero es armónica. Entonces definimos:

- El **haz armónico** de un cuadrilátero cíclico es el conjunto de líneas que las ve armónicas.

**Escena 31.** La construcción de un haz armónico es la dualización de la construcción de una curva de armonía:

31.1

31.2

31.3

i) Se parametriza con las parejas de líneas armónicas, respecto a los dos lados rojos (en el haz de líneas por su punto de intersección); y esto lo podemos hacer con un punto variable en uno de los lados azules y considerando a su armónico respecto a la intersección con los lados rojos.

31.4

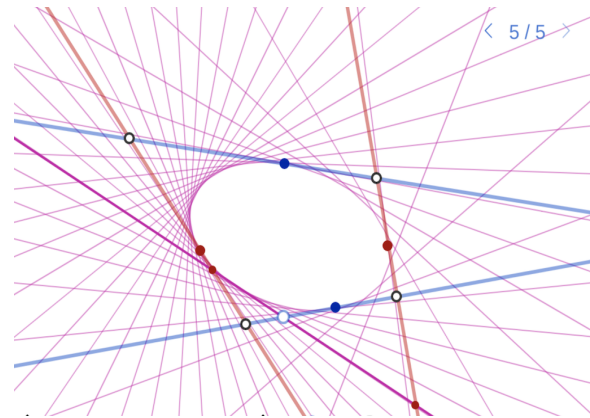
ii) Se toma la intersección con los dos lados azules (una es el propio parámetro) y se traza la línea entre ellos (morada) que claramente ve armónico al cuadrilátero... la familia de líneas que se obtiene es el haz armónico deseado.

31.5

*Esta familia de líneas –parametrizada por un punto en una línea (el punto libre en un lado azul)– se dibuja con la misma herramienta “Curva/Familia” .*

Hay que observar que los cuatro lados del cuadrilátero cíclico generador vienen con el extra de traer puntos distinguidos –los que les regalaron el boleto para entrar a la familia– que son llamados sus **puntos de contacto**. Se obtienen como el armónico del punto donde corta el lado opuesto, respecto al par donde lo hacen los otros dos lados.

Hay que ver que ambas definiciones –curvas de armonía y haces armónicos– se corresponden.



**Teorema 6 (de Dualidad)** *Hay un apareamiento natural entre los puntos de una curva de armonía de un cuadrángulo cíclico y las líneas del haz armónico del cuadrilátero de sus tangentes; y es tal que cada punto incide con su línea asociada (llamada su **tangente**).*

**Escena 32. (Demostración)** Para demostrar esto tenemos que ser más precisos, por lo que hay que darles nombre a los protagonistas. Sean A, D, B, C las esquinas de un cuadrángulo cíclico;

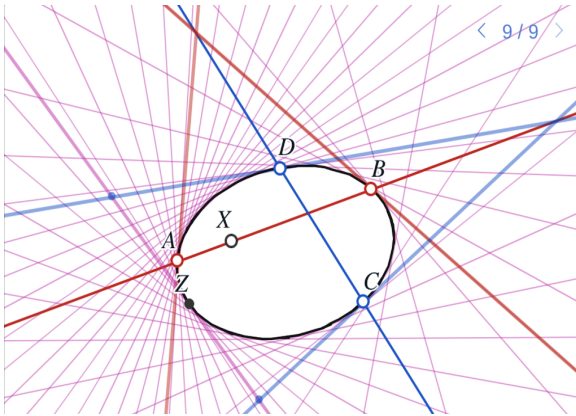
32.1

Esc:31↑bt









De manera dual, tenemos que

$$\begin{aligned} c \cdot \rho_Y &= (d \cdot \rho_P) \cdot \rho_Y \\ &= d \cdot (\rho_P \cdot \rho_Y) = d \cdot \rho_X. \end{aligned}$$

Y como una línea y su reflejada armónica concurren con el espejo, se tiene que los puntos  $c \wedge x$  y  $d \wedge y$  están en la línea  $c \cdot \rho_Y$ . Por lo tanto:

$$\ell_X = c \cdot \rho_Y.$$

Lo cual, como habíamos previsto, concluye la demostración de que  $Z \in \ell_X$ .  $\square$

32.9

Así que las curvas de armonía vienen con sus haces armónicos asociados. Cada punto en ellas es el *punto de contacto* de una línea *tangente* en el haz armónico que determinan sus cuatro tangentes. E inversamente, un haz armónico tiene bien definida su curva de armonía por los cuatro puntos de contacto que determinan sus líneas generadoras.

Esc:32↑bt

### 3.1.3. Las cónicas son curvas de armonía

Vamos a ver ahora que las curvas de armonía incluyen a las curvas cónicas en su versión clásica de secciones de un cono circular. Para esto, observemos primero que:

- *La proyección de una curva de armonía es una curva de armonía.*

Consideremos una proyección de un plano en otro; y en uno de ellos una cuarteta cíclica de puntos en posición general. Estos van, con su mismo orden cíclico, en otra cuarteta de puntos en el plano-

imagen (“la Segunda”, digamos); y está en posición general pues las proyecciones son biyecciones entre planos que preservan líneas.

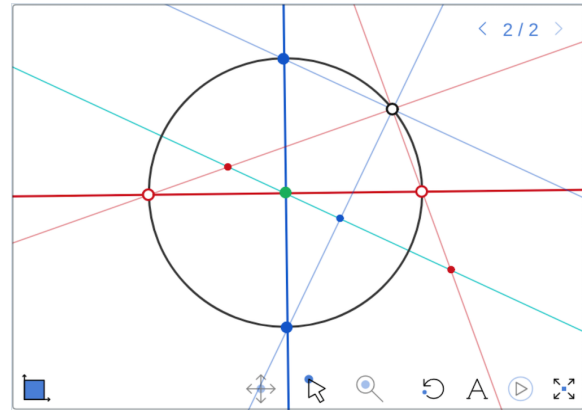
Como las proyecciones también preservan armonía, la imagen de un punto que ve armónica a la primera cuarteta es un punto que ve armónica a la Segunda. (Para probarlo, basta tomar una línea-lienzo testigo para la primera y observar que es mandada a una línea-testigo de la armonía para la Segunda.)

A partir de aquí, y hasta el final de esta sección, vamos a trabajar en el Espacio Desarguesiano y a considerar al Espacio Euclidiano como un subconjunto de él. En este contexto:

- *Un círculo es una curva de armonía.*

**33.1 Escena 33.** Consideremos un círculo con dos diámetros perpendiculares y la cuarteta cíclica de puntos que determinan.

**33.2** Por resultados clásicos de geometría euclidiana, cualquier punto en el círculo ve a la cuarteta en dos parejas de líneas perpendiculares y estas dos parejas están a 45 grados. Ésta es claramente una



cuarteta armónica de líneas, así que el círculo **es** una curva de armonía.

Esc:33↑bt

Entonces, las secciones de un cono circular – es decir, las curvas cónicas según los griegos– son curvas de armonía pues son la proyección, con foco en el vértice del cono, del círculo en el plano de la base a la sección con en el plano dado. La imagen es la propia sección del cono, es decir, la curva cónica y acabamos de ver que, por ser ésta una proyección, es una curva de armonía.

Además, de paso hemos demostrado que se cumple aquello de que “las elipses son círculos vistos de ladito” pues el argumento funciona con un “cono oblicuo”. O mejor dicho, y ahora con plena formalidad matemática: “los círculos vistos de ladito son curvas de armonía”.

### 3.1.3.1. La elipse de una loseta

Las curvas cónicas clásicas viven en el Plano Euclidiano. A las curvas de armonía que viven en su extensión, el Plano Desarguesiano, se les llama también su *cerradura proyectiva* y la manera tan elegante en que las extienden fue un aliciente histórico para el desarrollo de la geometría proyectiva. Lo que determina a qué tipo de curva cónica clásica corresponde una curva de armonía es cómo ésta se relaciona con **la línea ideal al infinito**:

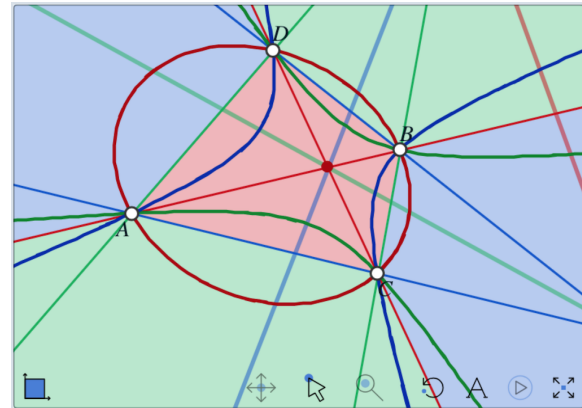
- si no la toca, es una **elipse**; si la tiene como tangente es una **parábola**, y si la corta en dos puntos es una **hipérbola**.

Las elipses son cómo se dibuja un círculo en un lienzo, pero hay que precisar: este es el caso cuando

todo el círculo cae en el cuadro. En estos términos y suponiendo, para simplificar, que el plano del lienzo es perpendicular al piso, las parábolas –o mejor dicho, tramos de ellas– pueden aparecer en el cuadro cuando el pintor está pisando al círculo y las hipérbolas son inevitables cuando el pintor está adentro del círculo y entonces, sus dos ramas se separan por el horizonte.

**Escena 34.** Para experimentar con los distintos tipos de curvas de armonía, presentamos la confi-

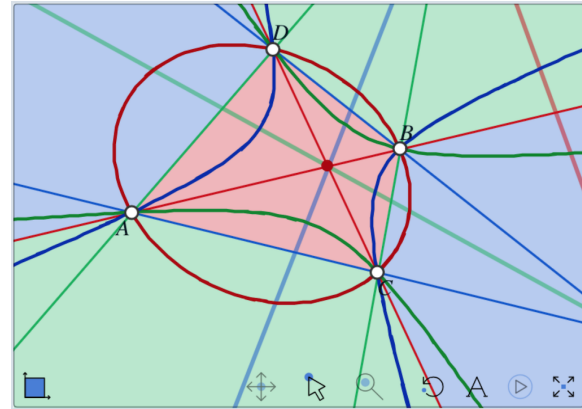
34.1



guración de un cuadrángulo extendido con las tres losetas a las que da lugar (de los tres colores), y decoradas ahora con las tres curvas de armonía correspondientes a sus ordenes cíclicos. Pero ojo: no hay que confundir el uso de los colores que ahora son tres, con el de las construcciones anteriores, en las que con uno de los colores de ahora fijo, se volvía a partir en dos.

Cuando los cuatro puntos están en posición francamente convexa (cerca de un cuadrado), se ve una elipse y dos hipérbolas. Cuando un punto está dentro del triángulo que forman los otros tres, tenemos tres hipérbolas.

Entre los dos casos estables –elipses e hipérbolas– hay uno inestable o efímero. Cuando la curva, al estarse moviendo o deformando, cruza la línea al infinito para aparecer por el otro lado; hay un momento de cambio, el de primer contacto con la línea horizonte en el cual la toca sólo en un punto, y esa curva, efímera e inestable, es una parábola.

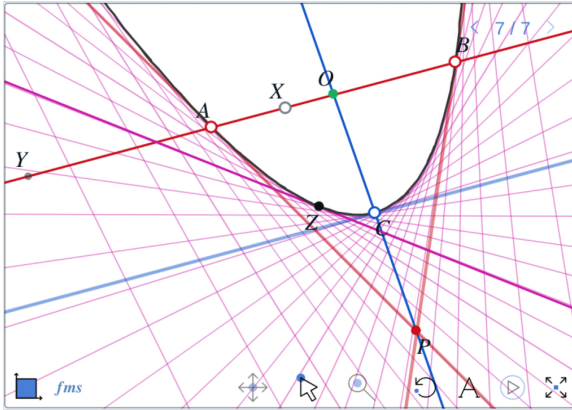


### 3.1.3.2. Parábolas

Las parábolas son la parte euclidiana de las curvas de armonía que tienen a la línea al infinito como línea tangente.

**Escena 35.** Para asegurarnos que éste sea el caso y construir una parábola siguiendo a la construcción de curvas de armonía, vamos a mandar a una de las cuatro líneas tangentes generadoras al infinito. La que conviene, con la notación de la cons-

35-1



35.2

trucción penúltima en la que todos los elementos tenían nombre, es la que llamabamos  $d$ , y pasaba por el punto  $D$ . Tenemos entonces tres puntos libres,  $A$  y  $B$  rojos y  $C$  azul –como  $D$  aunque no lo veamos.

35.3

Que  $d$  sea la línea al infinito implica que  $O$  es el punto medio entre  $A$  y  $B$  y que  $D$  es el punto ideal en la dirección  $C \vee O$ .

35.4

Para la construcción de  $Z$ , ahora hay que tomar una línea paralela... y también para trazar  $c$ , que es

la tangente por  $C$ .

35.5

Para trazar las tangentes en  $A$  y en  $B$ , hay que doblar la distancia de  $O$  a  $C$  para que  $C$  sea el punto medio entre  $O$  y  $P$ ; y esto se logra con paralelas.

35.6

Finalmente, podemos trazar la tangente en  $Z$  usando un punto al infinito y  $Z$  mismo... y así dibujar el haz tangente.

35.7

35.8

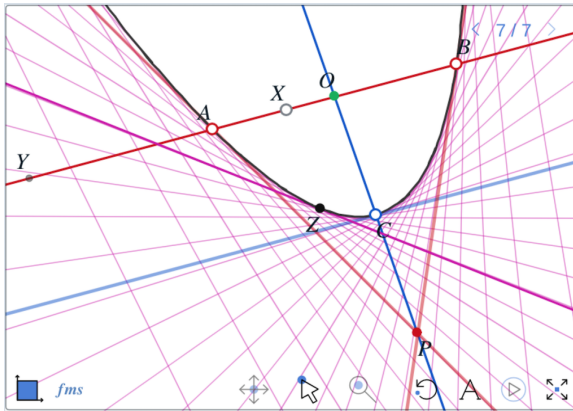
Una observación a esta construcción que vale la pena hacer, es lo cerca que está de uno de los resultados más sorprendentes de la matemática griega que es la *cuadratura de la parábola*, debida a Arquímedes de Siracusa (287 – 212 ac.). Indica que el área del sector de la parábola bajo el segmento  $AB$  es  $4/3$  el área del triángulo  $ABC$ .

El punto clave es que con el punto  $P$ , donde se cortan las tangentes a  $A$  y a  $B$ , se puede recuperar a  $C$  usando a la herramienta del punto medio, y además, la tangente a  $C$  es paralela a  $A \vee B$ .

35.9

Tenemos entonces los datos geométricos para encontrar nuevos puntos en la parábola y triangulitos sobre los lados. Hemos dibujado uno,... y es claro que se puede iterar la construcción sobre los

35.10



la cuarteta al infinito. Lo que se necesita para determinarlos allá son dos líneas (las que pasan por los puntos  $C'$  y  $D'$ ) que cortan a la línea al infinito en  $C$  y en  $D$  respectivamente.

36.2

La construcción de la curva de armonía es la misma, utilizando a la herramienta de paralelas para trazar las líneas por nuestros puntos en el infinito  $C$  y  $D$ .

36.3

Las tangentes a esos puntos,  $c$  y  $d$ , son las famosas *asíntotas* de la hipérbola. Como lo que lla-

nuevos segmentos de parábola para indicar una idea de la demostración, en la que se tienen que calcular áreas y una sumatoria infinita.

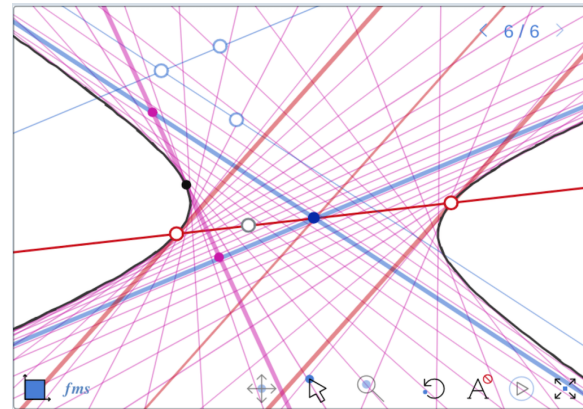
Esc:35↑bt

EJERCICIO. Construye nuevos triangulitos de la iteración y concluye la prueba de la cuadratura de la parábola.

### 3.1.3.3. Hipérbolas

36.1

**Escena 36.** Para construir hipérbolas como curvas de armonía, mandamos a los dos puntos azules de





mabamos “centro”, y denotabamos  $O$  ( $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ ), es el punto al infinito de la línea  $A \vee B$ , las tangentes a  $C$  y  $D$  ( $c$  y  $d$ ) pasan por el punto medio entre  $\bar{A}$  y  $B$ ; que es lo que comunemente se conoce como *centro de la hipérbola*.

36.4

Para trazar las tangentes por  $A$  y por  $B$  ( $a$  y  $b$ ) hay que encontrar la línea armónica de la diagonal roja ( $A \vee B$ ) respecto a las asíntotas ( $c$  y  $d$ )—esto se hizo con una línea auxiliar, perpendicular a  $A \vee B$  y la herramienta armonía. Para finalmente trazar sus paralelas por  $A$  y por  $B$ .

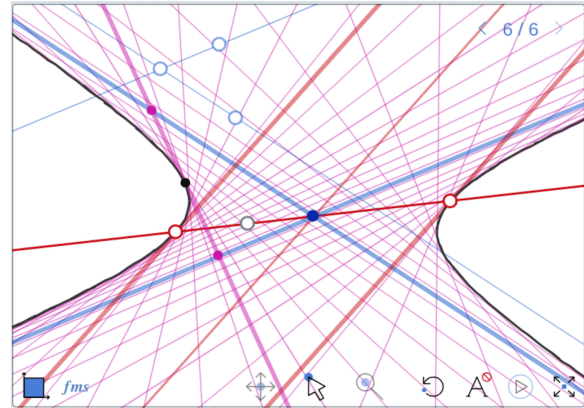
36.5

Ahora, el trazo de la tangente general, se hace tomando las paralelas por el punto-parámetro y su armónico e intersectando con las asíntotas.

36.6

Es interesante observar cómo se mueve la línea tangente (al animar al parámetro) y cómo el punto que dibuja la curva cambia de rama siguiendo a la continuidad que impone el plano Desarguesiano: justo en el momento en el que la tangente cambia, con sutileza, la dirección de su giro.

EJERCICIO. Construye una hipérbola y su haz tangente, empezando con sus dos asíntotas (como dos líneas, dadas por tres puntos) y un punto (rojo) por el cual pasa.



### 3.1.4. Polaridad y simetría

Las curvas de armonía están asociadas a cuatro puntos. Pero dan lugar a lo que llamaremos *curvas armónicas*, que definimos en este apartado como *el conjunto de puntos,  $\mathcal{C}$ , de una curva de armonía, olvidándonos de la cuarteta que le dio origen*.

Una curva armónica,  $\mathcal{C}$ , en principio, se puede expresar como la curva de armonía de muchas cuartetas y, por tanto, tiene derecho a una existen-

cia propia e independiente. Sabemos que incluyen a las “cerraduras proyectivas” de las curvas cónicas clásicas y además, que tienen asociado un haz armónico. Pero más explícito aún, que cada punto de la curva tiene asociada una línea del haz con la cual es incidente (su línea tangente). Diremos que son *polares* respecto a  $\mathcal{C}$ , y algo que va a distinguir a las curvas armónicas es que esta asociación entre puntos de  $\mathcal{C}$  y líneas de su haz tangente, se extiende de manera coherente y significativa a todos los puntos y líneas del plano.

Llamaremos *correlación* a una función que a cada punto del plano le asocia una línea, que a cada línea le asocia un punto y que preserva la incidencia (o invierte la contención); es decir, si un punto  $X$  esta contenido en una línea  $y$ , entonces la línea asociada a  $X$  contiene al punto asociado a  $y$ . Simbólicamente, si  $X \mapsto x$  y  $y \mapsto Y$  se tiene que

$$X \in y \Rightarrow Y \in x.$$

A una correlación la llamaremos *polaridad* cuando, más aún, es involutiva, es decir, cuando es su propia inversa. Se tiene entonces un apareamiento o

correspondencia 1-1 entre puntos y líneas: la línea asociada a un punto es su *polar*, el punto asociado a una línea es su *polo* y la pareja es una *pareja polar*; la polaridad los intercambia.

Hay que hacer notar que tanto von Staudt como Coxeter, le piden una condición extra a las polaridades. Pero aún no tenemos los elementos para enunciarla. Tiene que ver con el tipo de las funciones y lo veremos en el Capítulo ???. Así que nuestras polaridades son más generales que las suyas.

Nuestro objetivo a largo plazo es demostrar:

**Teorema 7 (de Polaridad)** *Una curva armónica,  $\mathcal{C}$ , induce una polaridad tal que para cualquier punto  $X$  del plano, si  $x$  es su línea polar, se cumple que:*

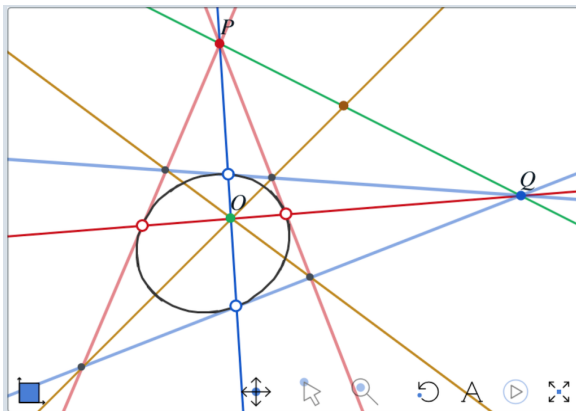
- i)  $X \in \mathcal{C}$  si y sólo si  $X \in x$ .
- ii) Si  $X \notin \mathcal{C}$ , la reflexión armónica con centro en  $X$  y espejo en  $x$  (bien definida por (i)), deja invariante a  $\mathcal{C}$ .

El inciso (i) ya lo tenemos pues corresponde a la existencia del haz tangente. El segundo inciso dice

que una curva armónica tiene mucha simetría: que cada punto fuera de ella es un centro de simetría, que cada línea no tangente es un espejo que la refleja en sí misma y que la polaridad es cómo aparearlos en centro y espejo de reflexiones armónicas que son simetrías. Por su definición, podemos encontrar varios ejemplos de parejas polares.

37.1

**Escena 37.** Consideremos a un cuadrángulo cíclico, a la curva de armonía,  $\mathcal{C}$ , que genera y a sus cuatro líneas tangentes. El Teorema de Polaridad dice



que induce una *polaridad respecto a  $\mathcal{C}$* , veremos algunos casos de parejas polares.

Por supuesto, las cuatro parejas punto generador con su línea tangente son parejas polares respecto a  $\mathcal{C}$ , o simplemente polares.

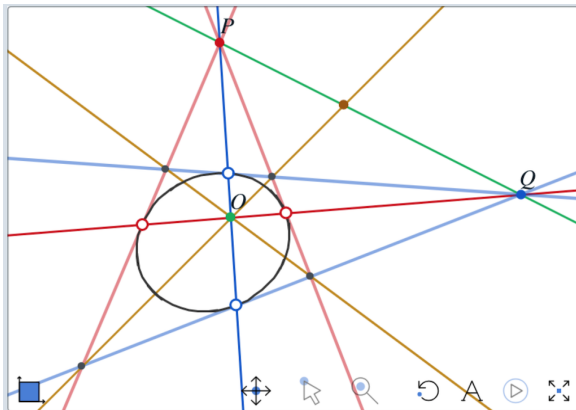
Esto implica que las diagonales (líneas roja y azul intensos) tienen como polos a los puntos donde se cortan las tangentes correspondientes (que está en la otra diagonal y tiene el mismo color, a saber, P y Q respectivamente). Pues si conocemos a las líneas polares en dos de sus puntos, al invertirse la incidencia en una correlación, el polo de la línea es la intersección de esas dos polares.

Efectivamente, para éstas dos parejas polares se cumple el inciso (ii), ya que las reflexiones armónicas respectivas fijan a dos de los puntos generadores (los del mismo color que están en el espejo) e intercambian a los otros dos, de tal manera que dejan a  $\mathcal{C}$  invariante pues el lugar geométrico de puntos que los ven armónicos no cambia.

Por el Lema del Triángulo de Klein (3), la composición de estas dos reflexiones es la reflexión armónica con centro en O y espejo en  $P \vee Q$ , dán-

donos una tercera pareja polar. Y efectivamente, porque la polaridad es correlación, se tiene que la línea polar de  $O$ , visto como intersección de las líneas polares de  $P$  y  $Q$ , tiene que ser  $P \vee Q$ .

Los cuatro elementos de este grupo (tres reflexiones armónicas y la identidad) se pueden asociar a los cuatro “cuadrantes” o “cuadritos” de la loseta que enmarca a la elipse, una vez que se escoge a uno y se le asocia a la identidad. Y también corresponden a la ambigüedad que tiene la construc-



ción básica (Escena 3.1.1); mejor dicho, a sus cuatro posibilidades, pues se escogió una pareja opuesta (un color, el rojo) y luego cómo asociar los puntos grises a la otra pareja.

37.2

Nótese que el triángulo que da lugar a este grupo de Klein ( $OPQ$ ) es el triángulo derivado del cuadrángulo (cíclico) que definen las cuatro tangentes (intersectándolas cíclicamente).

37.3

Así que también podemos considerar al triángulo,  $OHK$ , derivado del cuadrángulo original para obtener otro grupito de Klein que deja invariante a la curva. Comparte con el anterior a la media vuelta en el centro  $O$  (y con espejo en  $H \vee K = P \vee Q$ ). Pero ahora, las reflexiones armónicas con centro en  $H$  y en  $K$  (y espejo en el lado opuesto del triángulo) intercambian a las parejas opuestas (a los colores rojo y azul).

Hemos señalado cinco reflexiones armónicas que, por construcción, son simetrías de la curva de armonía  $\mathcal{C}$ . Las parejas centro-espejo son ejemplos de parejas polares respecto a  $\mathcal{C}$ .

El Teorema de Polaridad va mucho más allá de estos casos aislados de parejas polo-polar, y su

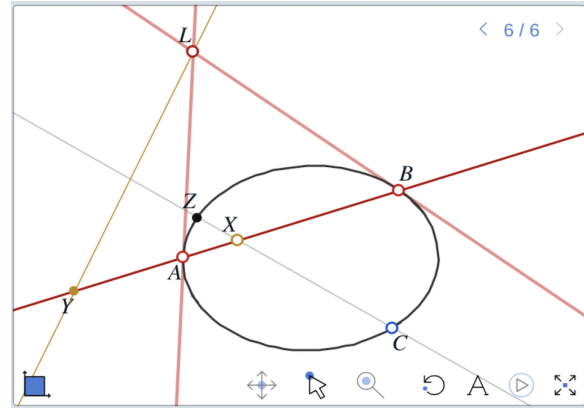
Esc:37↑bt

demostración requiere trabajo; la concluimos casi hasta el final de este capítulo. En particular, requiere de una nueva definición “global” u homogénea, en el sentido de que no se haga particular a una cuarteta. A semejanza de las pruebas de los Teoremas Armónico y de Desargues, lo lograremos recurriendo a la tercera dimensión.

Pero por lo pronto, podemos señalar que lo que estos ejemplos de parejas polo-polar sí indican es la naturaleza de estas cuartetas distinguidas que hacen de una curva armónica, su curva de armonía. Cumplen que *al partirlas en sus pares opuestos, la línea por un par contiene al polo de la línea por el otro*. Jugarán un papel análogo al de las cuartetas armónicas en una línea.

Y lo otro que sí podemos demostrar con lo que sabemos ahora es un resultado en la dirección del inverso al Teorema de Polaridad (7).

**Proposición 2** *Si un conjunto no vacío  $\mathcal{C}$  cumple la conclusión del Teorema de Polaridad (7) y es tal que cualquier línea lo toca en no más de dos puntos, entonces  $\mathcal{C}$  es una curva de armonía.*



**Escena 38. (Demostración)** Por ser no vacío, podemos escoger un punto  $A \in \mathcal{C}$ . Sea  $\alpha$  su línea polar (también por hipótesis tenemos una polaridad dada), y por cumplirse el inciso (i) del Teorema de Polaridad, se tiene que  $A \in \alpha$ .

Las líneas por  $A$  y los puntos en  $\alpha$  están apareados por la polaridad. Sea  $\ell$  una línea por  $A$  distinta de  $\alpha$  y sea  $L$  su polo: se tiene que  $L \in \alpha$  y además que  $L \neq A$ . Y también se tiene que  $L \notin \mathcal{C}$ , pues  $L \notin \ell$ . Así que hemos demostrado que

38.1

38.2

- La línea polar de un punto en  $\mathcal{C}$  sólo toca a  $\mathcal{C}$  en ese punto.

38.3

Esto caracteriza a las líneas tangentes, pues si  $A \in \ell$  y  $\alpha \neq \ell$ , afirmamos que en  $\ell$ , además de  $A$ , hay otro punto de  $\mathcal{C}$  que llamaremos  $B$ . Sea  $X \in \ell$  un punto distinto de  $A$ ; si  $X$  está en  $\mathcal{C}$ , lo llamamos  $B$  y se acabó. Debemos suponer entonces que  $X \notin \mathcal{C}$ . Sea  $x$  su línea polar. Sabemos que pasa por  $L$  y que no contiene ni a  $A$  ni a  $X$  (por (i)). Sea  $\rho_X$  la reflexión armónica con centro  $X$  y espejo  $x$ ; por el inciso (ii), se tiene que

38.4

$$B = A \cdot \rho_X \in \mathcal{C} \cap \ell$$

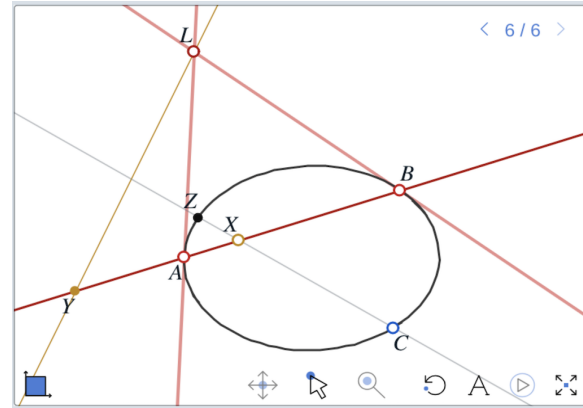
es el punto que buscábamos ( $B \neq A$  pues estamos en característica distinta de 2). Además, por hipótesis sabemos que ya no hay más puntos de  $\mathcal{C}$  en  $\ell$ . Es decir,

$$X \in \ell \setminus \{A, B\} \Rightarrow X \notin \mathcal{C}.$$

38.5

Con el mismo argumento (y el Axioma NT), al empezar con otra línea por  $A$ , se puede obtener a un nuevo punto  $C \in \mathcal{C}$  distinto de  $A$  y de  $B$ .

38.6



Sea  $\rho_L$  la reflexión armónica con centro  $L$  y espejo  $\ell$ ; y sea

$$D = C \cdot \rho_L$$

(obsérvese que  $D \in \mathcal{C}$  por el inciso (ii)).

Sea  $\mathcal{C}'$  la curva de armonía de la cuarteta cíclica  $A, D, B, C$ .

- Afirmamos que  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ .

El meollo del asunto será que  $A, D, B, C$  son cuatro puntos en  $\mathcal{C}$  que cumplen la propiedad de

38.7

que: la diagonal  $C \vee D$  pasa por el polo  $(L)$  de la otra diagonal  $A \vee B = \ell$ .

Recordemos que teníamos a  $X \in \ell$  distinto de  $A$  y de  $B$ ; y que habíamos llamado  $x$  a su línea polar que pasa por  $L$ . Sea  $Y = x \wedge \ell$ . Se tiene que

$X$  y  $Y$  son armónicos respecto a  $A$  y  $B$ ,

pues por construcción los cuatro puntos son distintos y  $B$  se obtuvo como el cuarto armónico de  $A$  respecto a  $X$  y  $Y$ .

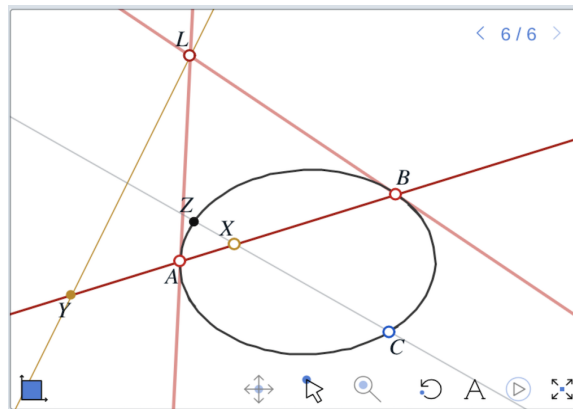
Por lo tanto, la reflexión armónica  $\rho_X$  (con centro en  $X$  y espejo en  $x = Y \vee L$ ) es la que se uso en la prueba del Teorema de Dualidad (6), para demostrar el apareamiento entre puntos de una curva de armonía y líneas de su haz tangente, aunque con los nombres un poco alterados ( $L$  era  $P$  y a la línea  $x$  la llamábamos  $y$ ). En esa demostración, se probó que la curva de armonía  $\mathcal{C}'$  (generada por  $A, D, B, C$ ) es el conjunto de puntos

38.8

$$\mathcal{C}' = \{C \cdot \rho_X \mid X \in \ell \setminus \{A, B\}\} \cup \{A, B\},$$

que claramente está contenido en  $\mathcal{C}$ , pues cada  $\rho_X$  deja invariante a  $\mathcal{C}$  por (ii) y  $C \in \mathcal{C}$ .

38.9



Falta probar que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ . Para esto, consideremos a  $Z \in \mathcal{C}$  y podemos suponer que es distinto de  $A, B, C$  que sí están en  $\mathcal{C}'$ . Sea

$$X_Z = (A \vee B) \wedge (C \vee Z) = \ell \wedge (C \vee Z).$$

Basta probar que  $Z = C \cdot \rho_{X_Z} \in \mathcal{C}'$  para concluir.

Por la hipótesis de que las líneas cortan a  $\mathcal{C}$  en a lo más dos puntos, se tiene que:

$$\mathcal{C} \cap (C \vee Z) = \{C, Z\}.$$

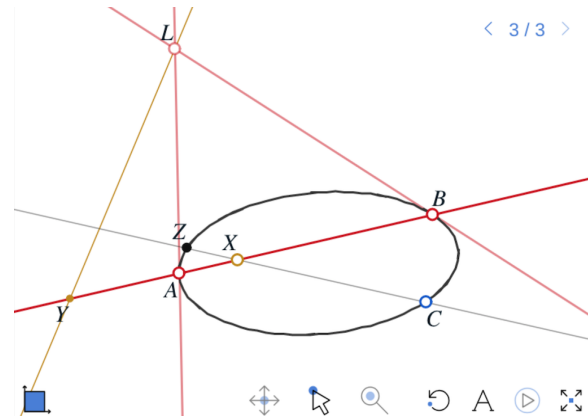
Así que la reflexión armónica  $\rho_{XZ}$  transpone a  $C$  y a  $Z$  siempre y cuando  $C$  se mueva, que no sea el centro o esté en el espejo.  $C$  no es el centro pues  $C \notin \ell$ ; y si está en el espejo, éste tiene que ser  $L \vee C$  cuyo polo  $X_Z$  está en la línea polar de  $C$ . Pero vimos al principio de la prueba que una línea tangente sólo toca a  $\mathcal{C}$  en su punto de contacto (en su polo), lo cual hace imposible que  $Z \neq C$  como supusimos de entrada. Así que  $Z = C \cdot \rho_{XZ} \in \mathcal{C}'$ .  $\square$

Esc:38↑bt

Un ingrediente que debemos destacar como corolario de la demostración es la construcción de una curva armónica que ya hemos usado dos veces y volveremos a usar. La llamaremos (por la figura inicial que parece una A) **construcción-A**:

- 39.1 **Escena 39.** Dadas dos líneas ( $\alpha = L \vee A$  y  $\beta = L \vee B$ ) con puntos distinguidos  $A$  y  $B$ ; la curva armónica que las tiene como tangentes en esos puntos y que además pasa por un punto independiente  $C$  se construye como sigue:
- 39.2
- 39.3

Se considera a un punto parámetro  $X$  en  $A \vee B$  y a su armónico  $Y$  (respecto a  $A$  y  $B$ ), para que el



reflejado armónico de  $C$  con  $X$  como centro y  $\alpha = Y \vee L$  como espejo ( $Z = C \cdot \rho_X$ ), barra a la curva armónica deseada (ver [?], pg 78).

Esc:39↑bt

Como corolario a esta construcción obtendremos una que da a la curva y a su haz tangente con base en pura incidencia (intersección y generación de líneas), sin usar a la herramienta de armonía.

**Escena 40.** La construcción dual a la construcción-A empieza con un triángulo cuyos lados son tangentes al haz armónico por construir, y dos de ellos

40.1

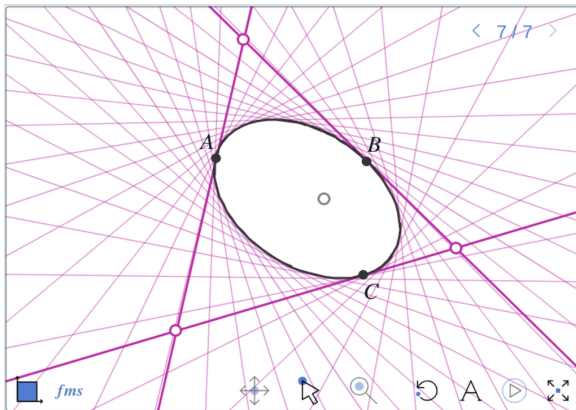


40.2

tienen ya definidos a sus puntos de contacto,  $A$  y  $B$ . Llamemos  $a$  y  $b$  a los lados correspondientes.

El tercer punto de contacto,  $C$ , en la tangente que falta,  $c$ , tiene que ser el punto que hace de Ceva a la configuración  $A, B, C$  en el triángulo, porque es el cuarto armónico de  $c \wedge (A \vee B)$  respecto a  $c \wedge a$  y  $c \wedge b$ . Por tanto, para controlar la figura es más fácil y elegante usar al punto de Ceva, que se podría obtener a partir de cualquier par de los puntos de contacto en los lados.

40.3



En la construcción-A, se toma a un punto variable  $X \in (A \vee B)$  y a su armónico  $Y$  respecto a  $A, B$  para determinar a la reflexión armónica  $\rho_X$  con centro en  $X$  y espejo  $Y \vee (a \wedge b)$ . Pero, veremos que basta con dibujar a  $X$ .

Como  $\rho_X$  transpone a  $A$  y  $B$ , y además deja fijo al punto  $a \wedge b$  (que está en el espejo); entonces, intercambia a las rectas  $a$  y  $b$  (i.e.,  $a \cdot \rho_X = b$ ). Pero además, actúa en ellas como la proyección desde el centro  $X$ ; así que podemos obtener a la recta  $c \cdot \rho_X$  por la imagen bajo  $\rho_X$  de sus dos vértices en el triángulo. Estas imágenes son

40.4

$$((c \wedge a) \vee X) \wedge b \quad \text{y} \quad ((c \wedge b) \vee X) \wedge a,$$

y por tanto,  $c \cdot \rho_X$  es la línea por ellos. De aquí, se obtiene a  $Z = C \cdot \rho_X$  como la proyección de  $C$  desde  $X$  en esa línea.

40.5

Al variar  $X \in A \vee B$ , se obtienen simultáneamente a la curva  $\mathcal{C}$  y a su haz armónico tangente.

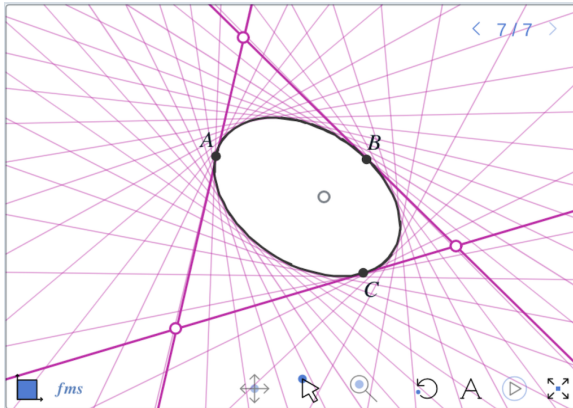
40.6

Es interesante experimentar con los datos originales y su producto final; llevarlo a hipérbolas que están a punto de reaparecer, pero ahora desde la tercera dimensión.

40.7

EJERCICIO. Demuestra que la línea polar, respecto a la curva armónica, del punto de Ceva ( en el que concurren las líneas de los tres de contacto al vértice opuesto) es la línea de Menelao correspondiente (la que pasa por la configuración armónica de  $a, b, c, A, B, C$ ). Completa la construcción para incluirla.

Esc:40↑bt



## 3.2. Superficies regladas

El salto conceptual que necesitamos dar para demostrar –más allá de ofrecer evidencias experimentales– que las curvas armónicas existen con la plenitud, simetría y fuerza que les da la propiedad de polaridad, es volver a recordar que vivimos en dimensión 3; y estudiar ahí a las líneas.

En el Espacio Desarguesiano, que tiene tres dimensiones, es una *coincidencia*, algo muy especial y raro, que dos rectas se corten y esto equivale a que sean coplanares. El caso genérico es que estén en *posición general*, es decir, que no se toquen. Y diremos que tres líneas están en *posición general* si dos a dos lo están. Éstas ternas de rectas generan por simple incidencia a unas superficies que llamaremos *superficies regladas*. En el mundo euclidiano se les conoce como hiperboloides de una hoja o paraboloides hiperbólicos y son –para los que ya las han visto– a lo que visualmente remiten los haces envolventes que acabamos de ver. De ellas, habremos de extraer las definiciones, el entendimiento y las pruebas que anhelamos.

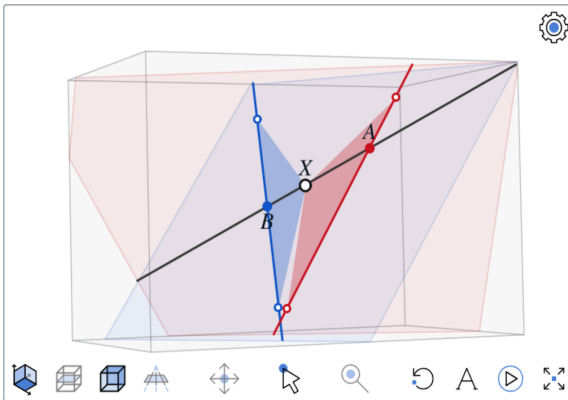
### 3.2.1. Reglados

A dos líneas que no se tocan, también es correcto llamarlas *líneas generadoras*, pues

- cualquier punto del espacio vive en una línea que toca a ambas y es única si está fuera de ellas.

41.1 **Escena 41.** Para probarlo, consideremos dos líneas en posición general,  $a$  y  $b$ ; y sea  $X$  un punto que no está en ellas.

41.2



Por esto último,  $X \vee a$  y  $X \vee b$  son planos; y además son distintos pues  $a$  y  $b$  no son coplanares. Por lo tanto,

41.3

$$\ell = (X \vee a) \wedge (X \vee b)$$

es una línea que claramente pasa por  $X$  y, como está en ambos planos, también toca a  $a$  y a  $b$ .

41.4

Esto demuestra que  $a$  y  $b$  generan al espacio tridimensional. Pero de manera muy justa y precisa, pues podemos ser aún más explícitos. Sean:

$$A = (X \vee b) \wedge a \in a$$

$$B = (X \vee a) \wedge b \in b;$$

entonces,  $A \vee B$  es la única línea que pasa por  $X$  y que incide con  $a$  y con  $b$ .

Esc:41↑bt

En términos visuales, dos líneas son coplanares si hay puntos del espacio que las confunden; puntos de vista donde se empalman. Y esos puntos especiales forman al plano que generan. Cuando son generadoras nadie las confunde. Siempre se ven como dos líneas. Sin embargo, parece que se cortan en un punto; y ahí, por esa “intersección visual”,

pasa la línea que acabamos de encontrar para el ojo en cuestión.

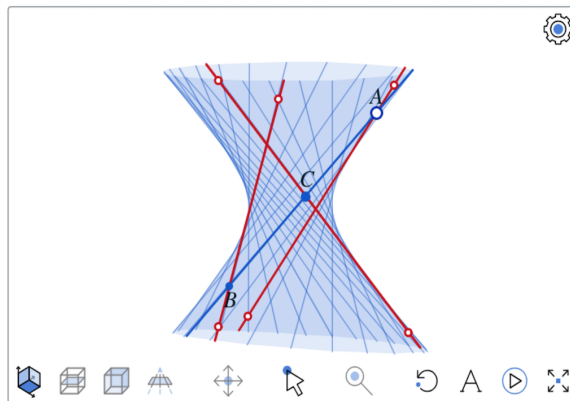
Al considerar tres líneas en *posición general* (esto es, que dos a dos no son coplanares) se van a ver, en general, como un triángulo. Y ese triángulo varía conforme se mueve el punto de vista. Pero hay puntos muy especiales: aquellos que las ven como tres líneas concurrentes; esos puntos de vista formarán la superficie reglada que generan:

**Definición.** Un *reglado*,  $\mathcal{R}$ , es el conjunto de todas las líneas que tocan a tres líneas en posición general. A los elementos de un reglado dado (que son líneas) los llamaremos sus *reglas*.

### 3.2.2. Construcción de Hilbert-CohnVossen

42.1

**Escena 42.** Consideremos tres rectas en posición general,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ . Pensemos que son de color rojo para colorear de azul a su *reglado transversal*,  $\mathcal{R}$ , que, por definición, consiste de todas sus rectas *transversales*, es decir, que tocan a las tres. La



construcción que haremos a continuación aparece en las primeras páginas del libro clásico *Geometría e Imaginación* de David Hilbert y Stephan Cohn-Vossen, y como ahí no dan crédito a nadie, nosotros se la achacamos a ellos.

42.2

Dado un punto  $A \in \mathbf{a}$ , se toma al plano que genera con la línea  $\mathbf{b}$  y se interseca a éste con la línea  $\mathbf{c}$ , para darnos un punto que llamamos C. Es decir, sea

$$C = (A \vee \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}.$$

42.3

La línea  $A \vee C$  está en el reglado transversal  $\mathcal{R}$ , pues toca a las tres líneas: a  $\mathbf{a}$  en  $A$ , a  $\mathbf{c}$  en  $C$  y a  $\mathbf{b}$  en  $B = (A \vee C) \wedge \mathbf{b}$  que es un punto pues ambas rectas están en el mismo plano  $A \vee \mathbf{b}$ .

42.4

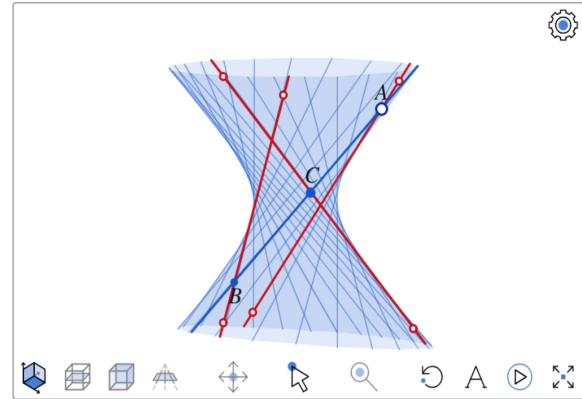
Al variar al punto  $A$  a lo largo de la línea  $\mathbf{a}$ , la regla  $A \vee C$ , barre una **superficie reglada**  $\mathcal{S}$ .

Esc:42↑bt

Otra manera de verlo es con la observación del apartado anterior, pues implica que por cualquier punto en una de las rectas,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , pasa una única línea que toca a las otras dos, así que el reglado  $\mathcal{R}$  se puede parametrizar por los puntos en cualquiera de las tres rectas:

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(A \vee \mathbf{b}) \wedge (A \vee \mathbf{c}) \mid A \in \mathbf{a}\} \\ &= \{(B \vee \mathbf{c}) \wedge (B \vee \mathbf{a}) \mid B \in \mathbf{b}\} \\ &= \{(C \vee \mathbf{a}) \wedge (C \vee \mathbf{b}) \mid C \in \mathbf{c}\}.\end{aligned}$$

De tal manera que es correcto pensar que un reglado es una “línea de líneas” y al juntarlas, o dibujarlas, se obtiene una superficie que, como ya mencionamos, es probable que el lector asocie con el nombre de hiperboloide de una hoja (el paraboloi- de hiperbólico es un caso muy particular). Nótese

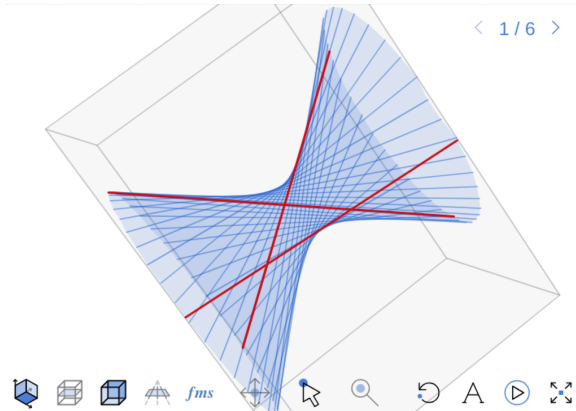


que sólo estamos dibujando lo que cae dentro de la caja, y a la larga demostraremos que la intuición visual es la correcta: al ver la figura estática de lado (o por fuera, podríamos decir), el contorno es una hipérbola con las reglas como su haz envolvente; pero si la vemos en su interior (por las bocas) vemos elipses, también con su haz envolvente.

### 3.2.3. Axioma del Equipal

43.1 **Escena 43.** Teniendo tanta regla azul (tantas como puntos en una línea), se antoja escoger a tres, llamémoslas  $p, q, r \in \mathcal{R}$  (y pintaditas de azul) para volver a hacer la construcción de Hilbert-CohnVossen con ellas. Se vale, porque están en posición general; pues que dos azules se toquen, implicaría que las tres rojas originales son coplanares.

43.3



De tal manera que  $p, q, r$  definen un nuevo reglado  $\mathcal{R}$ , que pintamos de rojo, y que contiene a  $a, b, c$ , pues éstas tocan a  $p, q, r$ . Diremos que el reglado  $\mathcal{R}$  **extiende** a la terna de líneas  $a, b, c$ .

43.4

Al dibujar juntos a los dos reglados, se distingue que “van en direcciones opuestas” cuando la superficie no tiene atrás a otra parte de ella misma; pues en este caso, se confunden las reglas con reglas opuestas (del otro color) en el otro lado por la transparencia.

Con los dos últimos pasos de esta escena: ...reglado azul... reglado rojo... damos la posibilidad de verlos alternadamente.

43.5

43.6

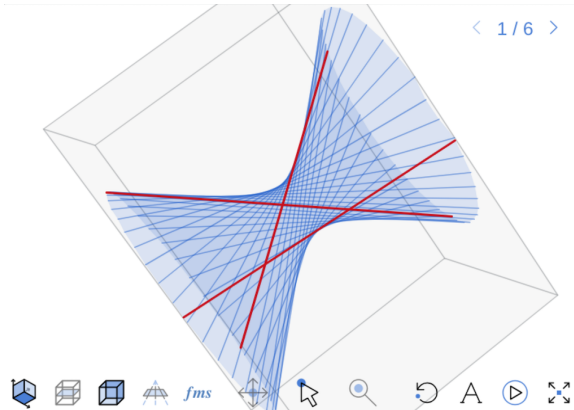
Esc:43↑bt

Nuestra intuición del espacio físico indica que estos dos reglados definen a la misma superficie; y en la geometría real (la asociada a los *números reales*, con la que modelamos nuestros dibujos y al Espacio Desarguesiano que extiende al Euclidiano) se tiene que efectivamente así es. Pero hay que demostrarlo en ese contexto explícito, pues no se sigue de los cuatro axiomas —hacia el final del libro veremos un ejemplo que lo prueba. Así que aquí debemos usar nuestra hipótesis de trabajo.

Otra manera de expresar que la superficie obtenida como unión de reglas sea única, que sea doblemente reglada, es que el reglado rojo sea único, que no dependa de las tres reglas azules que se escogieron para definirlo, y lo llamaremos:

**Axioma del Equipal.** *Tres líneas en posición general en un espacio de dimensión 3 son reglas de un único reglado.*

El nombre viene de unos ejemplos de reglados



dobles, que son los “equipales”: un estilo artesanal mexicano de sillones y muebles cuyas bases están hechas de muchas tiras de madera inclinadas y que “circulan” en dos direcciones.



Suponiendo cierto al Axioma del Equipal –que es lo que haremos en adelante a menos que se diga lo contrario– tenemos que la unión de las reglas en un reglado forman una **superficie doblemente reglada**, pues si  $\mathcal{R}$  es un reglado y consideramos al conjunto que es la unión de todas sus reglas,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{l \in \mathcal{R}} l,$$

obtenemos una superficie por la bidimensionalidad de su definición (regla y parametro; al moverse

algo de una dimensión, “barre” algo de dos dimensiones).

El Axioma del Equipal implica que se tiene un reglado transversal  $\mathcal{R}$  independientemente de qué terna escojamos en  $\mathcal{R}$  para definirlo (estamos entendiendo, hay que enfatizar, que el color da un símbolo diferente, ésta  $\mathcal{R}$  es roja y es distinta de la azul... con una sentida disculpa a los daltónicos). Entonces,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{l \in \mathcal{R}} l = \bigcup_{l \in \mathcal{R}} l.$$

Y por lo tanto se cumple que:

- Por cualquier punto en  $\mathcal{S}$  pasan dos reglas: una roja y una azul.
- Dos reglas de  $\mathcal{S}$  de color distinto se tocan.
- Dos reglas de  $\mathcal{S}$  del mismo color son generadoras (no se tocan).

### 3.2.4. Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes

Concluimos esta sección con un poker de definiciones. Las tres que se refieren al plano cambian temporalmente el significado de los términos usados en la sección anterior, aunque a la larga demostraremos que coinciden.

Si  $\mathcal{S}$  es una superficie doblemente reglada, en cualquier punto de ella se distingue a un plano.

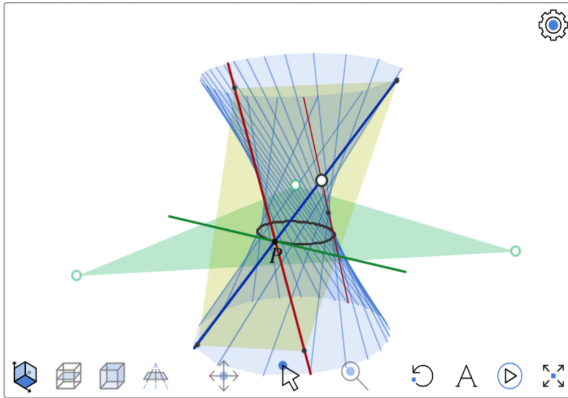
Sea  $P$  un punto en  $\mathcal{S}$ . Por  $P$  pasa una regla de cada color (o de cada reglado). Al plano que generan esas dos líneas se le llama el **plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$** , o bien el **plano polar de  $P$  respecto a  $\mathcal{S}$** . Y se cumple que este plano tangente corta a la superficie justo en esas dos líneas: en dos reglas de distinto color que se cortan en  $P$ .

Y ahora sí, estamos en posición de poder expresar nuestra definición de batalla.

**Escena 44. (Definición)** Una **curva armónica**  $\mathcal{C}$  es la intersección de una superficie doblemente reglada

44.1





$\mathcal{S}$  con un plano  $\pi$  que no es tangente a  $\mathcal{S}$ . Es decir,

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi.$$

44.2

• Para cada punto  $P \in \mathcal{C}$ , la **línea tangente** a  $\mathcal{C}$  en  $P$  es la intersección de  $\pi$  con el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

• Y el **haz envolvente o tangente** a  $\mathcal{C}$  es la familia de sus líneas tangentes.  $\square$

Esc:44↑bt

### 3.3. Polaridad

Recordemos que nuestra misión en la vida — bueno, en lo que concernía a este libro y que en esta sección habrá de realizarse— era demostrar que las curvas armónicas cumplen la propiedad de inducir una polaridad en su plano. Veremos que para las superficies regladas, la polaridad se expresa de manera muy natural y que demostrarla es... no es justo decir que fácil, pero sí muy directa y natural: sin recovecos ni trucos. Las ideas van hilvanándose con fluidez y los argumentos se enlazan con sorprendente claridad y contundencia.

En el primer apartado enunciamos el Teorema de Polaridad para reglados y demostramos su parte existencial. En el segundo, demostramos la compatibilidad con la incidencia que formalmente es un poco más abigarrada pero necesaria y reveladora, corresponde a la generalización de lo que habíamos llamado una *correlación*. Abundamos entonces en las implicaciones visuales del teorema —en por qué vemos como vemos a las superficies regladas y qué es lo que realmente vemos. Por úl-

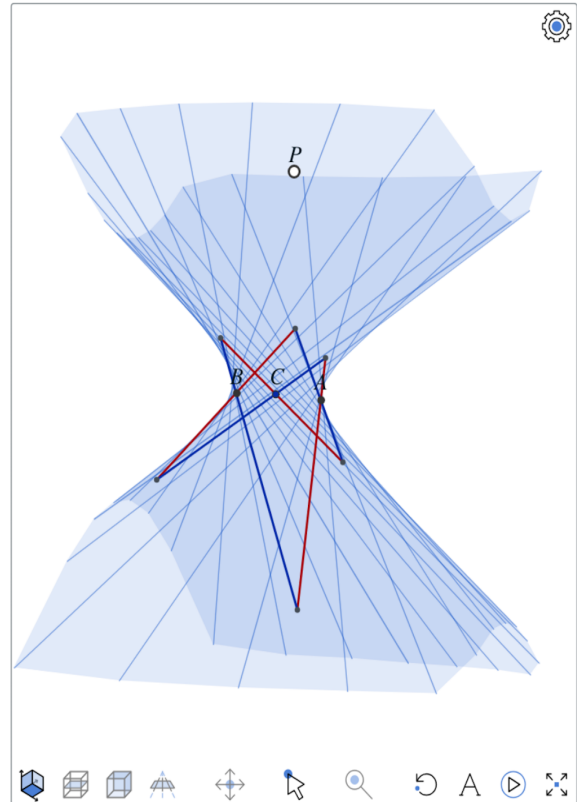
timo, demostramos la versión bidimensional del teorema, que establece la polaridad para las curvas armónicas y vemos que las curvas de armonía son curvas armónicas en el sentido actual del término.

### 3.3.1. En superficies regladas

**Teorema 8 (Polaridad en reglados)** *Una superficie reglada,  $\mathcal{S}$ , induce una **polaridad** en el espacio. Esto es, un apareamiento (correspondencia 1-1) entre puntos y planos que cumple:*

- i) *Para  $P \in \mathcal{S}$ , su plano polar es el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$  (y contiene a  $P$ ).*
- ii) *Si  $P \notin \mathcal{S}$ , entonces  $P$  no está en su plano polar y la reflexión armónica con centro en  $P$  y espejo en su plano polar, deja invariante a la superficie  $\mathcal{S}$ .*
- iii) *Si  $P$  está en el plano polar de  $Q$ , entonces  $Q$  está en el plano polar de  $P$ .*

La demostración abarcará lo que queda de este apartado y el que sigue.



Para un punto  $P \in \mathcal{S}$ , ya definimos su *plano polar* como el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$  (el generado por las dos reglas ahí) y queda establecido el inciso (i).

45.1

45.2

**Escena 45.** Consideraremos ahora el caso genérico en que

$$P \notin \mathcal{S}.$$

45.3

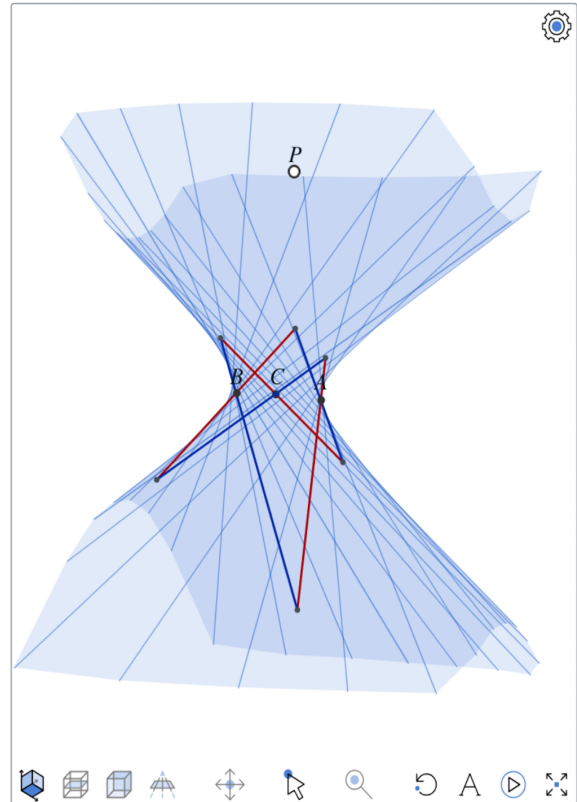
Para poder precisar, sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  tres líneas rojas en posición general que definen a  $\mathcal{S}$ ; es decir, tales que el reglado transversal a ellas  $\mathcal{R}$  que consta de las líneas transversales a las tres (y pintadas de azul), tiene como unión a  $\mathcal{S}$ . Pero además tenemos que hay otro reglado, el rojo,  $\mathcal{R}$  que contiene como reglas a las tres originales ( $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{R}$ ) y está definido como el reglado transversal a cualquier terna de reglas azules —esto es el legado del Axioma del Equipal.

45.4

Consideremos al plano

$$\alpha = P \vee \mathbf{a}.$$

Afirmamos que en  $\alpha$  vive otra regla, y que es de color azul.



Puesto que  $\alpha$  corta a todas las reglas rojas: ¡estos puntos se tienen que alinear! Más concretamente, los puntos de intersección de  $\alpha$  con  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  generan una línea en  $\alpha$  que también corta a  $\mathbf{a}$  y por lo tanto es una regla de  $\mathcal{R}$  (pues es transversal a las tres). Llamémosla  $\mathbf{a}$ ; es decir:

$$\mathbf{a} = (\alpha \wedge \mathbf{b}) \vee (\alpha \wedge \mathbf{c}) \in \mathcal{R}$$

(recuerde que colores distintos dan símbolos distintos). Y sea

$$A = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}.$$

Obsérvese que el punto  $A$  y la regla  $\mathbf{a}$  dependen del punto  $P$ , pues el plano  $\alpha$  depende de él.

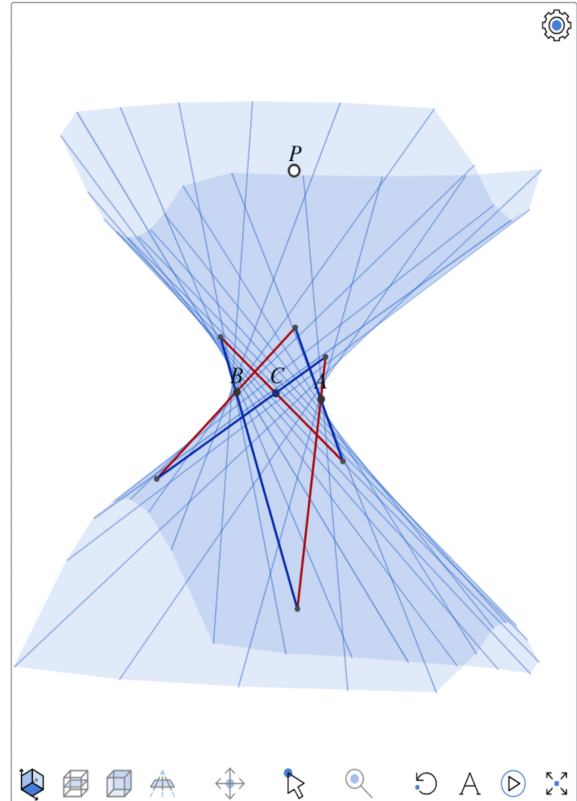
En el fondo, hemos demostrado que:

- *si un plano contiene a una regla, entonces es un plano tangente y contiene también a una regla del otro reglado.*

45.5

De tal manera que si ahora consideramos a los planos  $\beta = \mathbf{b} \vee P$  y  $\gamma = \mathbf{c} \vee P$  nos definen otras dos reglas azules

$$\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{R},$$



por la propiedad de que

$$P \in \mathbf{b} \vee \mathbf{b} = \beta \quad \text{y} \quad P \in \mathbf{c} \vee \mathbf{c} = \gamma.$$

Lo cual da dos nuevos puntos en la superficie,

$$B = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \quad \text{y} \quad C = \mathbf{c} \wedge \mathbf{c},$$

cuyos planos tangentes a  $\mathcal{S}$  son  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente.

45.6

Los tres puntos que hemos nombrado, generan un plano

$$\pi = A \vee B \vee C,$$

que llamaremos **el plano polar de**  $P$  respecto a  $\mathcal{S}$ .

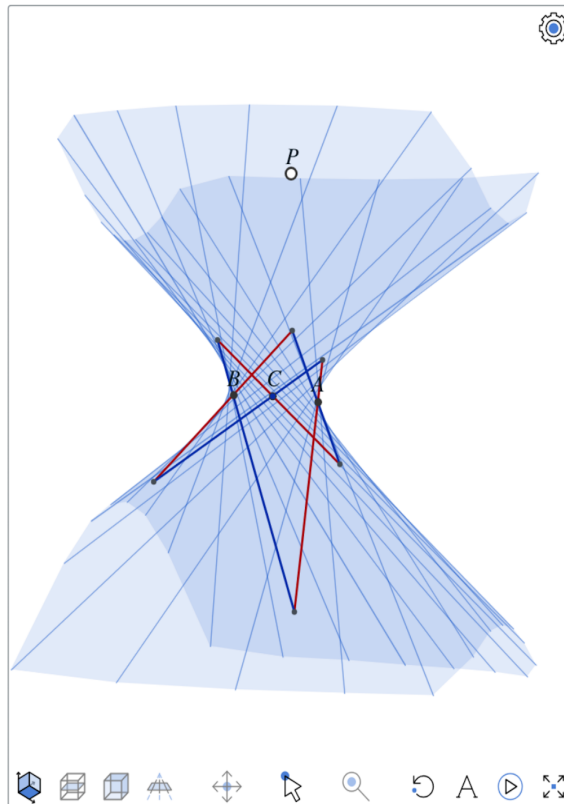
Afirmamos que

- *la reflexión armónica,  $\rho$ , con centro  $P$  y espejo  $\pi$  deja invariante a  $\mathcal{S}$ ,*

para concluir con el inciso (ii) del teorema.

Las seis reglas que tenemos (3 rojas y 3 azules) definen por intersección a nueve puntos en  $\mathcal{S}$ . Con ellos –y la configuración de líneas y planos que generan– bastará para acabar de demostrar a (ii).

45.7



En el plano  $\alpha = \mathbf{a} \vee \mathbf{a}$  (que es el tangente a  $\mathcal{S}$  en  $\mathbf{A} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$ ) tenemos a otros cuatro de esos nueve puntos. A saber,

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}), (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}), (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}),$$

que forman un cuadrángulo plano que (con este orden cíclico) tiene como punto distinguido en su triángulo derivado precisamente a  $\mathbf{A}$ . Es decir, en  $\alpha$  tenemos lo que habíamos denominado una lo-seta (ver §2.3.3).

45.8

Otro de los puntos del triángulo derivado es  $\mathbf{P}$ . Pues  $\mathbf{P}$  es la intersección de los planos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ ; y dos de las líneas de intersección de estos planos se pueden expresar

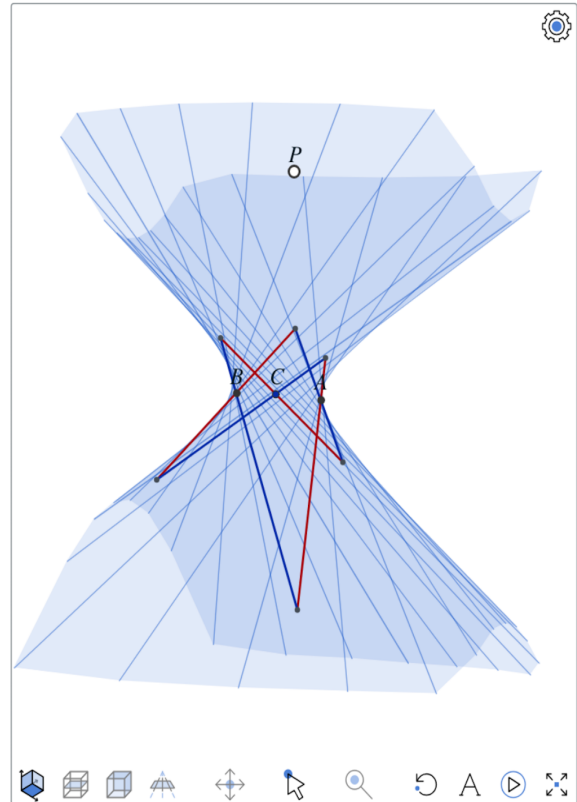
$$\alpha \wedge \beta = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$$

$$\alpha \wedge \gamma = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) \vee (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}).$$

Por lo tanto, éstas son rectas que pasan por  $\mathbf{P}$ .

Para ver que la línea opuesta a  $\mathbf{P}$  en el triángulo derivado, es  $\alpha \wedge \pi$ , demostraremos que el punto derivado que nos falta es  $\alpha \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})$ .

45.9



Para ello, consideremos a los planos tangentes

$$(b \vee c) \text{ y } (c \vee b).$$

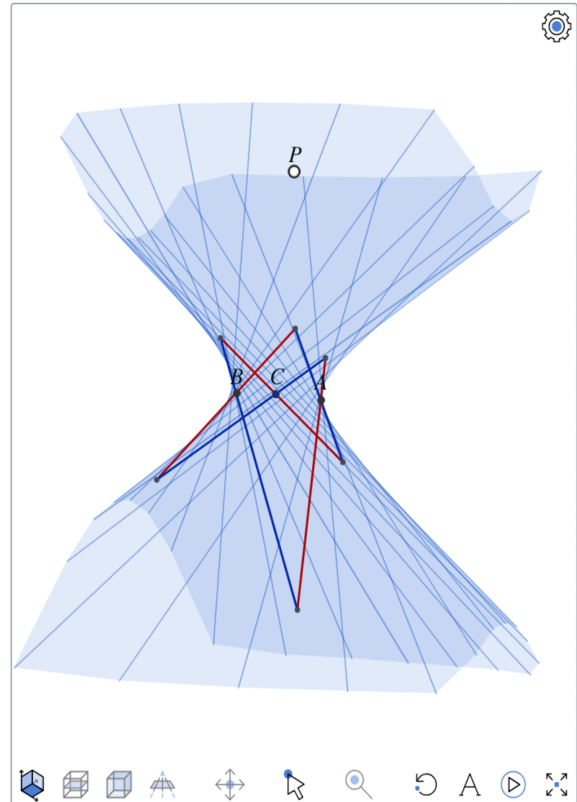
Se cortan en la línea  $B \vee C$  pues ambos planos contienen a ambos puntos. Además, sus intersecciones con  $\alpha$  dan a la otra pareja de lados opuestos de la loseta:

$$(b \wedge a) \vee (a \wedge c) \text{ y } (c \wedge a) \vee (a \wedge b).$$

45.10 Así que donde estas líneas se cortan (el tercer punto derivado) es la intersección de los tres planos, que es  $\alpha \wedge (B \vee C)$ .

45.11 Tenemos entonces (conforme a §2.3.3) que la reflexión armónica con centro  $P$  y espejo  $\pi$ , que habíamos llamado  $\rho$  (y deja invariante al plano  $\alpha$  pues  $P \in \alpha$ ), deja fijo a  $A$  e intercambia a las reglas  $a$  y  $a$  como si fuera la proyección desde  $P$ .

Como  $\rho$  también deja fijos a los puntos  $B$  y  $C$ , pues están en el espejo; podemos concluir que intercambia a los pares de líneas  $b, b$  y  $c, c$ , porque ya sabemos que intercambia a sus respectivos puntos de intersección con el plano  $\alpha$ .



Por lo tanto, la reflexión armónica  $\rho$  intercambia a las reglas rojas  $a, b, c$  con las reglas azules  $a, b, c$ , respectivamente. Le cambia el color a la configuración.

Esc:45↑bt

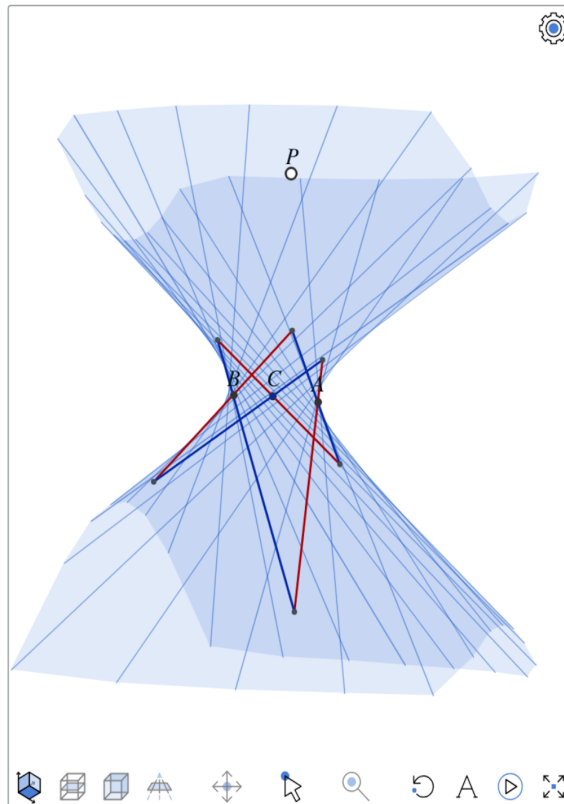
Consideremos ahora a cualquier otra regla azul, que podemos llamar  $x \in \mathcal{R}$ .

Como  $x$  toca a las líneas  $a, b$  y  $c$ , su imagen bajo  $\rho$  —que seguimos denotado  $x \cdot \rho$ — es una línea que toca a  $a = a \cdot \rho$ , a  $b = b \cdot \rho$  y a  $c = c \cdot \rho$ . Y por lo tanto, tiene que ser una línea del reglado rojo, es decir,

$$x \in \mathcal{R} \implies x \cdot \rho \in \mathcal{R}.$$

Ya sabemos que  $x \cdot \rho$  es una regla roja. Y podemos decir cuál es, pues en una reflexión armónica el punto de intersección con el espejo se queda fijo. Así que  $x \cdot \rho$  es la regla roja que pasa por  $x \wedge \pi$  y que conviene denotar  $x = x \cdot \rho$ .

Se tiene por definición que  $x \wedge x \in \pi$ . Pero también que  $P \in x \vee x$  pues el plano que generan cualquier línea y su imagen bajo una reflexión armónica, contiene al centro. Así, hemos demostrado que:





- *Todos los planos tangentes a  $\mathcal{S}$  en puntos de  $\pi$  pasan por  $P$ .*

Y de aquí podemos concluir que la definición de  $\pi$  no depende de las tres reglas con que arrancamos; con cualquier otra terna de reglas rojas (o azules), hubiéramos obtenido al mismo plano.

Como la reflexión armónica  $\rho$  es una involución (es su propia inversa), tiene que mandar a cada regla roja en la azul de la que viene,  $x = x \cdot \rho$ . En fin, ya tenemos lo que buscábamos, que  $\rho$  deja invariante a la superficie  $\mathcal{S}$ , pero sabemos ahora que es así porque intercambia a sus dos reglados.

Para remachar que la polaridad es un apareamiento (correspondencia 1-1) entre puntos y planos, podemos reinterpretarla en abstracto. Cualquier punto  $P$  fuera de  $\mathcal{S}$  y cualquier plano  $\pi$  no tangente a  $\mathcal{S}$  (pensados ahora libres y sin relación aparente entre ellos), definen por simple incidencia una correspondencia 1-1 o apareamiento natural entre los dos reglados de  $\mathcal{S}$ :

*Dos reglas de colores opuestos se aparean según un punto  $P$  si  $P$  está en el*

*plano que generan; y se aparean según un plano  $\pi$  si su intersección está en  $\pi$ .*

Las parejas polares punto-plano respecto a  $\mathcal{S}$  son aquellas en las que estos apareamientos entre los dos reglados coinciden. Pero además, cuando este es el caso, hemos demostrado que la biyección entre reglados se realiza también geoméricamente (en todo el ambiente) como la reflexión armónica en la pareja polar.

### 3.3.2. Respeto a la incidencia

Veremos ahora que la polaridad respecto a  $\mathcal{S}$  se lleva de maravilla con la relación de incidencia. En términos generales, se define una **correlación** en el espacio (de 3 dimensiones) como una función que a cada punto le asocia un plano, que a cada plano le asocia un punto y que invierte la inclusión, es decir si un punto está en un plano sus asociados también inciden (el plano asociado contiene al punto asociado). El inciso (iii) del Teorema de Polaridad dice que el apareamiento es una correlación,

y una correlación que es su propia inversa es una polaridad. Demostraremos ahora al inciso (iii).

Supongamos, para continuar usando la misma nomenclatura, que un punto  $P$  tiene como plano polar a  $\pi$ ; queremos probar que:

- si un punto  $Q$  está en  $\pi$  entonces el plano polar de  $Q$  contiene a  $P$ .

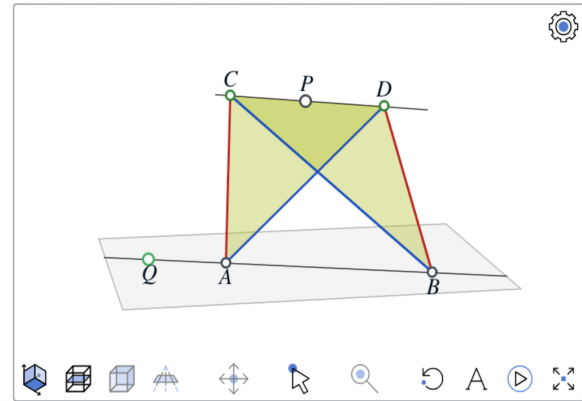
Es inevitable ver varios casos según si los puntos  $P$  y  $Q$  están o no en la superficie  $\mathcal{S}$ .

**Primero**, cuando ambos están en  $\mathcal{S}$ . Uno está en el plano polar del otro, sólo cuando ambos están en una misma regla y la conclusión se cumple.

**Segundo**, el caso en que alguno de los puntos está en la superficie y el otro no. Se vio, se estudió y se uso de manera protagónica en el apartado anterior. Que un punto  $Q$  dentro de la superficie  $\mathcal{S}$  esté en  $\pi$  es equivalente a que el plano polar a  $Q$  pase por  $P$ .

Y **tercero**, cuando ambos puntos ( $P$  y  $Q$ ) están fuera de  $\mathcal{S}$  y además  $Q \in \pi$ . Si llamamos  $\eta$  (léase “eta”) al plano polar de  $Q$ , probaremos que  $P \in \eta$ .

**Escena 46.** Sea  $A$  un punto cualquiera en  $\mathcal{S} \cap \pi$



(existen muchos de estos pues  $\pi$  corta a cualquier regla). Y como antes, sean  $\alpha$  y  $\alpha$  las reglas de  $\mathcal{S}$  que cumplen

$$A = \alpha \wedge \alpha \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \alpha \vee \alpha = \alpha.$$

Sea  $B$  el reflejado armónico de  $A$  con centro en  $Q$  y espejo  $\eta$ . Y supongamos primero que  $B \neq A$  (el caso general).

Sabemos que  $B$  está en la superficie  $\mathcal{S}$  (pues  $Q$  y  $\eta$  son polares respecto a  $\mathcal{S}$ ) y que también está

46.2

46.1

en  $\pi$  (pues el centro de la reflexión,  $Q$ , está en  $\pi$ ). Por lo cual, de nuevo, existen reglas  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}$  para las cuales

$$B = \mathbf{b} \wedge \mathbf{b} \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \mathbf{b} \vee \mathbf{b} = \beta.$$

46.3 Como reglas de distintos colores siempre se cortan, tenemos dos nuevos puntos en  $\mathcal{S}$ :

$$C = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad \text{y} \quad D = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}.$$

Nótese que  $P \in \alpha \wedge \beta = C \vee D$ , pues ambos puntos están en ambos planos.

46.4 Los respectivos planos tangentes a  $\mathcal{S}$  en  $C$  y en  $D$  son

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} \vee \mathbf{a},$$

y ambos contienen a  $A$  y a  $B$ . Por lo tanto, también contienen a  $Q \in A \vee B$ . Entonces se tiene que  $C$  y  $D$  están en el plano polar de  $Q$ , que es  $\eta$ . Pero  $P$  está en la línea  $C \vee D$  y por lo tanto en  $\eta$ , como queríamos demostrar.

Nos queda por ver el caso particular en que  $A = B$ , donde, recuérdese,  $B$  se definió como la

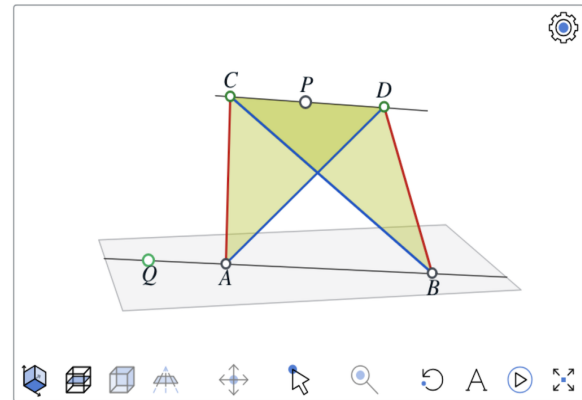
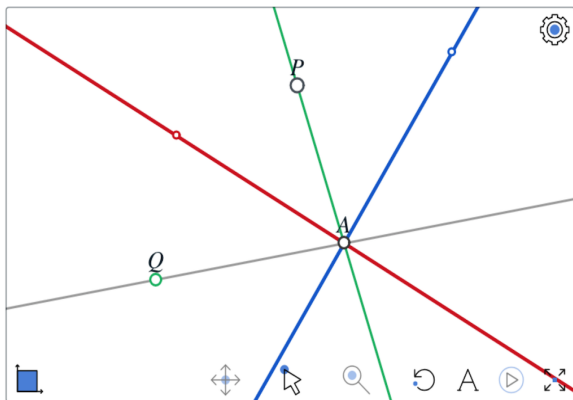


imagen de  $A$  bajo la reflexión armónica con centro en  $Q$  y espejo en su plano polar  $\eta$ . Esto sólo sucede cuando  $A$  está en el espejo (pues el centro  $Q$  no está en la superficie  $\mathcal{S}$ ).

**Escena 47.** Cuando  $A \in \eta$ , tenemos el caso especial en que tanto  $P$  como  $Q$  están en el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $A$ , que hemos llamado  $\alpha$ . Pero entonces  $Q \vee A$  y  $P \vee A$  tienen que ser líneas armónicas respecto a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}$  (pues tenemos que  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{a}$  lo son respecto a  $P \vee A$  y  $\alpha \wedge \pi = Q \vee A$ ). Lo cual

47.1



ver cómo implica a la polaridad en curvas armónicas, vamos a interpretarla en términos visuales.

**Escena 48.** Definimos a una curva armónica  $\mathcal{C}$  como la intersección de un plano  $\pi$  (verde) con una superficie reglada  $\mathcal{S}, \dots$  y a su línea tangente en un punto  $A \in \mathcal{C}$  como la intersección del plano polar a  $A$ , que llamamos  $\alpha$ , con el plano  $\pi$ .

48.1

48.2

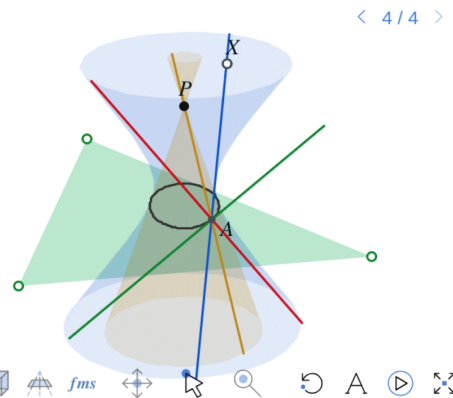
48.3

Ahora sabemos que, dentro de  $\alpha$ , la línea armónica a la tangente respecto a las dos reglas de  $\mathcal{S}$  pasa por el punto polar de  $\pi$ , que seguimos deno-

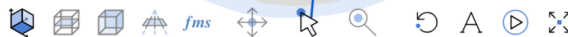
demuestra que  $P \in \eta$ .

Las dos reflexiones armónicas (de las dos parejas polares  $P, \pi$  y  $Q, \eta$ ) intercambian a  $\alpha$  y  $\alpha$ ; pero punto a punto son muy diferentes: restringidas a estas reglas una es la proyección desde  $P$  y la otra desde  $Q$ . Los correspondientes planos polares,  $\pi$  y  $\eta$ , cortan al plano tangente  $\alpha$  en las líneas  $Q \vee A$  y  $P \vee A$ , respectivamente.

Esto concluye con la demostración del Teorema de Polaridad para superficies regladas. Antes de



< 4 / 4 >



tando  $P$  y ahora depende de  $\pi$  en la figura.

De tal manera que lo que ve  $P$  como el contorno de  $\mathcal{S}$  es a la curva armónica  $\mathcal{C}$ . Justo por los puntos de  $\mathcal{C}$  (anítese a  $X$ ), es por donde pasan los rayos visuales que salen de  $P$  y rosan apenas, o son tangentes, a  $\mathcal{S}$ . Ahí donde se traza un contorno.

48.4

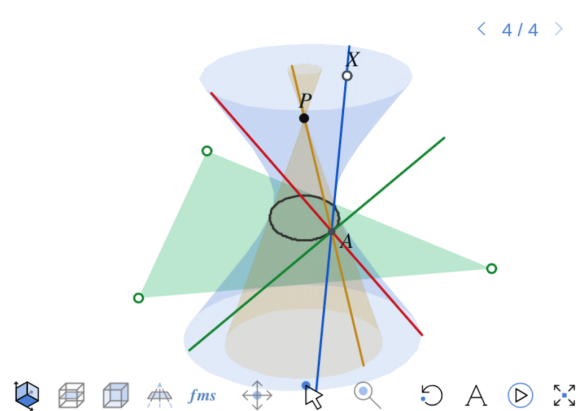
Si dibujamos esa familia de líneas, obtenemos el cono visual desde  $P$  que define  $\mathcal{C}$ .

Además, a  $P$  se le enciman los dos reglados. Para cada regla roja hay una azul de la que no la distingue; y ambas se proyectan a una línea tangente a  $\mathcal{C}$ . Por eso es difícil distinguir en los dibujos fijos entre los dos reglados: ambos se dibujan (o se ven) como el haz envolvente al contorno.

Esc:48↑bt

Por otro lado, debemos observar que la demostración indica que la polaridad respecto a la superficie reglada  $\mathcal{S}$  también se extiende a las líneas del espacio. *La línea polar (respecto a  $\mathcal{S}$ ) de una línea es la intersección de los planos polares a sus puntos*; al mover un punto en una línea, los planos polares correspondientes giran alrededor de una línea. Para una línea tangente (en un plano tangente y que pasa por su polo), su polar es la armónica

respecto a las reglas. Para líneas que cortan en dos puntos a  $\mathcal{S}$  (como  $A \vee B$  en la demostración), se obtiene con las reglas por ellos ( $C \vee D$ ). Pero además, hay líneas que no tocan a  $\mathcal{S}$  y sus polares quedan en el otro lado de la superficie.



### 3.3.3. En curvas armónicas

Veremos ahora, que la polaridad en superficies regladas se hereda a las curvas armónicas.

Sea  $\mathcal{C}$  una curva armónica en un plano  $\pi$ . Entonces existe una superficie reglada  $\mathcal{S}$  tal que

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi,$$

y sea  $P$  el polo de  $\pi$  respecto a  $\mathcal{S}$ . Se define naturalmente una polaridad en  $\pi$  como sigue:

• Dado un punto  $Q \in \pi$ , su **línea polar** respecto a  $\mathcal{C}$  es

$$q = \eta \wedge \pi,$$

donde  $\eta$  es el plano polar de  $Q$  respecto a  $\mathcal{S}$ .

• Dada una línea  $q \subset \pi$ , su **polo** respecto a  $\mathcal{C}$  es el polo del plano  $q \vee P$  respecto a  $\mathcal{S}$  (que es un punto en  $\pi$ ).

De aquí, se sigue inmediatamente nuestro anhelado Teorema de Polaridad (7) para curvas armónicas. Veámoslo a vuelo de pájaro o a manera de repaso.

**Demostración (del Teorema de Polaridad).** Que esta polaridad sea una correlación involutiva, se sigue de que la polaridad tridimensional lo es (el inciso (iii) del Teorema de Polaridad en Reglados (8)).

Que distingue a la curva como los puntos incidentes en su polar (inciso (i)) es consecuencia de las definiciones de planos y líneas tangentes, así como de (i) en el Teorema (8).

Que las reflexiones armónicas correspondientes a pares polares no incidentes preservan a la curva, se sigue de que en el espacio preservan tanto al plano como a la superficie (incisos (ii) de ambos teoremas).  $\square$

Nos falta ver que las dos acepciones de *curva armónica* que hemos empleado son la misma.

**Teorema 9** Las curvas armónicas (como secciones de superficies regladas) coinciden con las curvas de armonía (definidas por una cuarteta de puntos).

**Demostración.** Ya tenemos un buen trecho andado con la Proposición 2. Para emplearlo sobre una curva armónica que, como acabamos de ver, cumple el

Teorema de Polaridad, nos falta ver que cumple la hipótesis extra de que cada línea la corta en a lo más dos puntos. Pero esto lo vuelve a heredar de la superficie reglada que la determina como sección, pues si una línea corta en tres puntos a una superficie reglada, toca a tres reglas de un color y por tanto es una regla del otro color. Está totalmente contenida en la superficie. Pero, por definición, el plano que corta como sección a una curva armónica no contiene reglas de la superficie. Por tanto, una línea corta a una curva armónica en a lo más dos puntos.

Así que la Proposición 2 implica que una curva armónica es una curva de armonía.

Para ver que una curva de armonía es la sección plana de una superficie reglada volvemos a usar a una construcción-A (Escena 3.1.4) que la defina, y de ella sacamos al doble reglado. La construcción no solamente es fácil y natural, sino bonita en el sentido de que la superficie que surge cambia de manera muy elegante al mover los datos; mucho más armónicamente que si se mueven tres reglas de manera titubeante.

**Escena 49.** Supongamos que tenemos los datos  $A, B, C, L$  para trazar una curva de armonía con la construcción-A en un plano  $\pi$ . Escogemos un punto  $P$  fuera de  $\pi$  que jugará el papel de su polo y un punto  $S \in P \vee L$  por el que pasará la superficie reglada. Y ya con esta información, todo queda determinado.

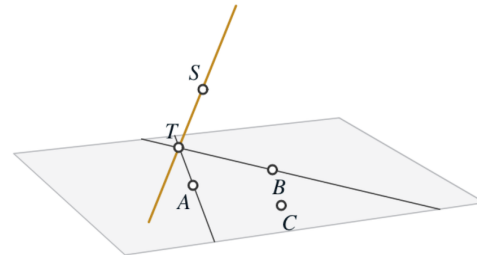
De  $S$  y su armónico,  $S'$ , respecto a  $P$  y  $L$ , debemos trazar líneas a  $A$  y a  $B$ , y colorearlas con dos colores como corresponde; éstas serán reglas.

49.1

49.2

49.3

< 1 / 4 >



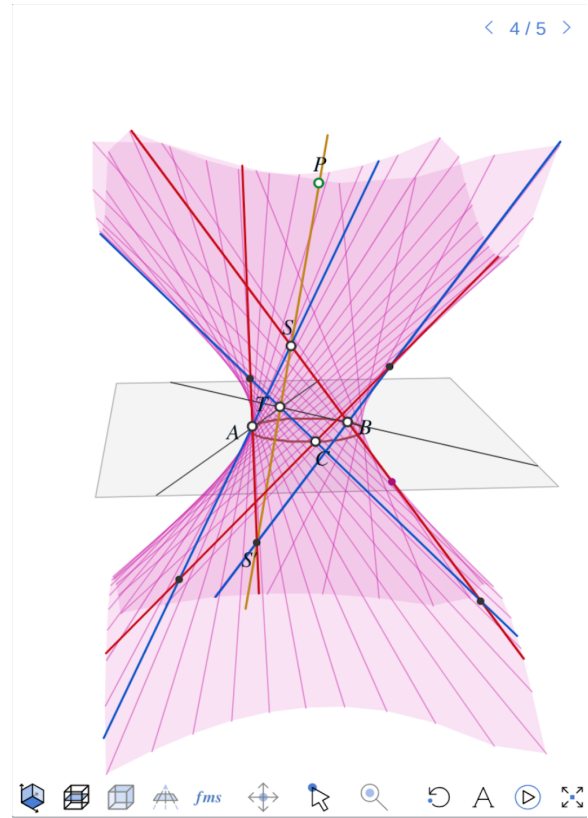
49.4

Por el punto C pasa una única línea que toca a las dos reglas azules, la pintamos de rojo; y una única línea azul que corta a las dos rojas.

Ya tenemos tres reglas rojas y tres azules que se cortan como deben. Con la construcción de Hilbert-CohnVossen sobre cualquiera de las ternas se obtiene la superficie reglada que queremos y que corta a  $\pi$  en la curva de armonía que definen los datos.

Muévala, verá que es más general de lo que pretendíamos.  $\square$

Esc:49↑bt





## 3.4. Teoremas clásicos

En esta última sección, demostramos los teoremas clásicos de Pappus y Pascal siguiendo a la idea de Germinal Pierre de Dandelin (1777-1822), que fue la que nos condujo al tratamiento de curvas cónicas que hemos presentado.

Conviene comenzar con el resultado que se atribuye a Blaise Pascal (1623-1662), pues su demostración, que era el objetivo principal del artículo de Dandelin, [?], está muy cerca de la configuración que fue base de la prueba del Teorema de Polaridad en Reglados. Además, la construcción que se usa en esa demostración, conduce naturalmente al Teorema de Pappus como un caso límite interesante (pasar de un plano general a un plano tangente). Pero este resultado, muy lejos de ser un caso particular o especial, es sobresaliente y notable en sí mismo.

Pappus de Alejandría (3??-4??) lo enunció y demostró un milenio antes de que apareciera la perspectiva. Tiene la particularidad de que es el primer teorema geométrico que se refiere unicamen-

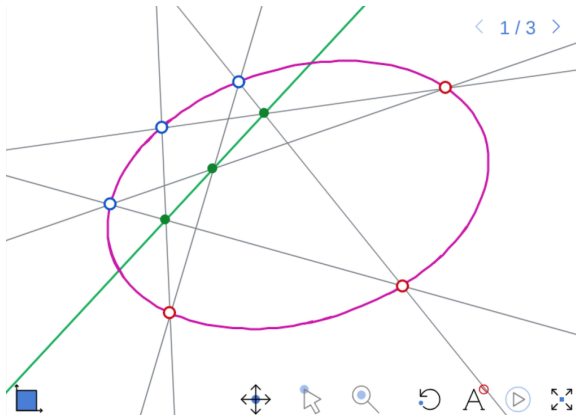
te a cuestiones de incidencia. De tal manera que es el primer resultado de la geometría proyectiva (o de incidencia) que se enuncia y demuestra — aunque las demostraciones clásicas siempre usan nociones métricas. Quedó como un resultado aislado; sin compañeros aparentes. Pero resultó ser un enunciado fundamental pues, como pronto veremos, es equivalente al Axioma del Equipal. Con el paso del tiempo, ha cobrado tal magnitud que John Stillwell, en [?], lo propone como enunciado embajador de la raza humana ante el cosmos. Es decir, que si hemos de mandar en sondas espaciales algo que indique nuestro avance intelectual a posibles seres inteligentes, el enunciado del Teorema de Pappus —que se puede expresar en lenguaje gráfico— es un candidato idóneo. Veremos hacia el final del libro más razones para tan alta distinción.

### 3.4.1. El Teorema de Pascal

Cuenta la historia que Blaise Pascal demostró su famoso Teorema del Hexágono a la edad de 16

años. Sin embargo, sólo trascendió el enunciado pues su prueba original se perdió. De tal manera que era muy natural buscar nuevas pruebas del teorema a principios del siglo XIX. En este contexto histórico es en el que Dandelin publica la demostración que damos a continuación.

**Teorema 10 (del Hexágono de Pascal)** *Los lados opuestos de un hexágono inscrito en una curva armónica se cortan en tres puntos colineales.*



**Escena 50. (Demostración)** Nótese primero, que el enunciado no hace referencia alguna al orden cíclico que en la geometría real induce la curva en los seis puntos. *Juéguese con ellos trastocando su orden cíclico; el teorema funciona siempre, aunque la línea de Pascal (la verde) y sus tres puntos se salgan con frecuencia de la pantalla. En particular, llevar la figura a un hexágono convexo (el más tradicional) manda a la línea verde cerca de la ideal al infinito.*

50.1

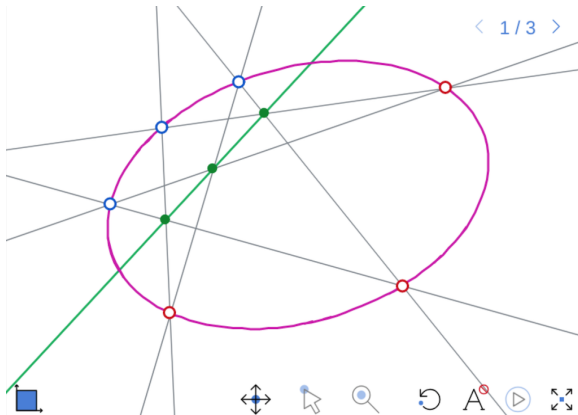
Lo que el enunciado nos da con la palabra *hexágono* es la estructura combinatoria de un ciclo: distinguir a seis parejas de puntos o *vértices*, que dan los *lados* o *aristas* del hexágono, de tal manera que cada vértice aparece justo en dos y que al seguir el camino natural que esto produce: brincando de un vértice a otro usando una arista como puente y así al siguiente y al siguiente... se circula por los seis vértices antes de regresar al del inicio. Por ser seis un número par, se pueden pintar los vértices con dos colores que se alternan y... se pueden nombrar con dos ternas ordenadas de tal manera que los vértices opuestos se correspondan en el orden; conviene así, pues las aristas opuestas

50.2

ya se distinguieron en el enunciado.

Buena parte del artículo original de Dandelin se va en construir una superficie doblemente reglada que tenga como sección a una cónica general (pensada a la antigüita); pero aquí, por la definición de curva armónica (que aquel trabajo inspiró), esto es inmediato: existe una superficie doblemente reglada  $\mathcal{S}$ , con reglados rojo,  $\mathcal{R}$ , y azul,  $\mathcal{B}$ , y un plano  $\pi$  tales que la curva armónica en la que está inscrito

50.3



el hexágono es

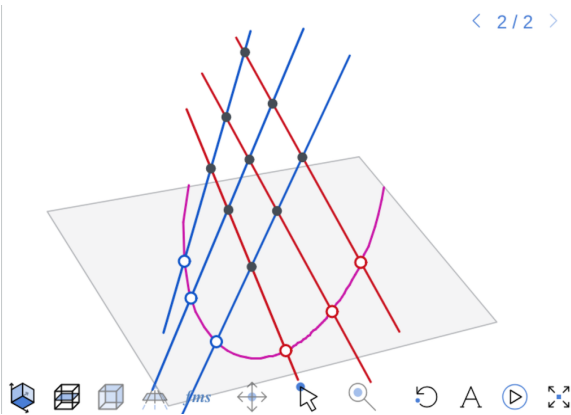
$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi.$$

Entonces, podemos considerar a la configuración de tres reglas rojas y tres azules a la que da lugar el hexágono bicoloreado. Por los puntos  $A_1, A_2, A_3$  de la curva  $\mathcal{C}$ , pasan reglas rojas  $a_1, a_2, a_3$ ; y los puntos  $B_1, B_2, B_3$ , están en las reglas azules  $b_1, b_2, b_3$  respectivamente. Debemos pensar a esta configuración de  $3 \times 3$  reglas como conteniendo a la configuración dual del hexágono original: por cada punto en él hay ahora una línea (que es regla del mismo color) y por cada línea o arista del original, hay ahora un punto de intersección de las reglas correspondientes en la superficie. El extra de información que tiene la configuración espacial es lo que dará, contundente, la demostración.

50.4

Conviene cambiar a una imagen que capture mejor la estructura abstracta de la configuración de líneas que tenemos. Pues combinatoriamente es bastante simple, es un arreglo de  $3 \times 3$  líneas, con 9 puntos de intersección que también definen planos.

Esc:50↑bt



51.1 **Escena 51.** Regresando a la demostración del teorema, las líneas en el plano  $\pi$  que se generan por vértices de distinto color en la curva, se pueden expresar ahora como intersecciones de planos:

51.2

$$A_i \vee B_j = (a_i \vee b_j) \wedge \pi,$$

para cualquier par de índices  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Los puntos “de Pascal” que nos interesan, también corresponden a los tres índices. El primero es

51.3

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2) \\ &= ((a_2 \vee b_3) \wedge \pi) \wedge ((a_3 \vee b_2) \wedge \pi) \\ &= ((a_2 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_2)) \wedge \pi. \end{aligned}$$

La clave es que a una intersección de dos de los planos tangentes, también la podemos expresar como línea generada por dos de los 9 puntos:

$$\begin{aligned} (a_2 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_2) \\ = (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3); \end{aligned}$$

pues los dos puntos están en los dos planos. Así que

$$P_1 = ((a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \pi.$$

Análogamente, se tiene que

$$P_2 = ((a_3 \wedge b_3) \vee (a_1 \wedge b_1)) \wedge \pi,$$

$$P_3 = ((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge \pi.$$

Y concluimos la demostración al considerar al plano generado por los tres puntos diagonales del timbiriche; pues  $P_1, P_2, P_3$  están en la línea:

$$((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \pi.$$

□

51.4

51.5

Esc:51↑bt

### 3.4.1.1. La cónica por cinco puntos

La herramienta más común en los programas de geometría dinámica para definir cónicas, como en *ProGeo3D*, es en la que selecciona uno 5 puntos y ¡pum! aparece una curva que pasa por ellos.

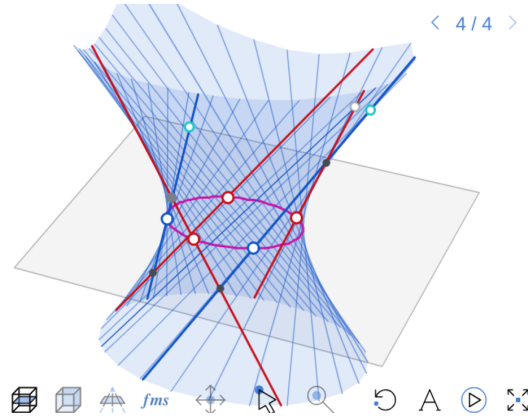
**Teorema 11 (Por 5 puntos ...)** *Por cinco puntos en posición general en un plano pasa una única curva armónica.*

52.1 **Demostración. Escena 52.** Dados 5 puntos en un plano  $\pi$ , primero vamos a construir una superficie reglada que los contenga.

52.2 Pintamos tres puntos de rojo y dos de azul... Por los azules, consideramos líneas generadoras (azules) que corten al plano  $\pi$  en ellos.

52.3 Entonces, por los puntos rojos pasan líneas únicas que tocan a las dos azules. Las pintamos de rojo y se considera a la superficie reglada  $\mathcal{S}$  que generan éstas tres líneas.

52.4 Por definición,  $\mathcal{S}$  contiene a las dos líneas azules como reglas (tocan a las tres rojas). Además, el plano  $\pi$  no contiene reglas pues lo que *posición*



*general* quiere decir en el plano, es que ninguna terna de puntos es colineal. Por lo tanto,  $\pi$  no es un plano tangente y la curva armónica

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi$$

pasa por los cinco puntos. Esto demuestra la existencia.

La unicidad tiene dos vertientes. La combinatoria, que se zanja rápidamente. No depende de qué par de puntos se escogieron para trabajar de “cha-

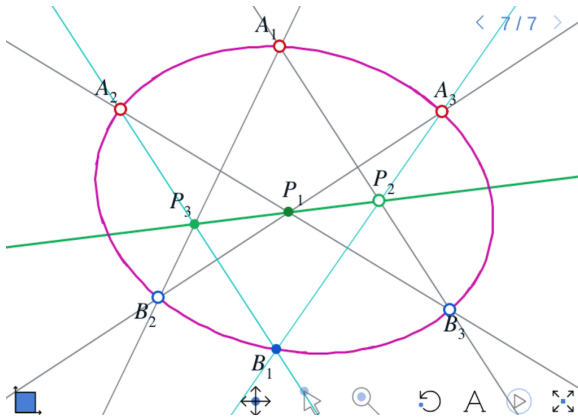
Esc:52↑bt

lanes azules”; pues para cualquier otro par, podemos escoger a las reglas azules que pasan por ellos y obtendremos a la mismita superficie reglada  $\mathcal{S}$ .

Y la unicidad geométrica: no depende de qué reglas azules se escojan en el espacio. Esto se sigue de que se puede construir la curva sin salirse nunca del plano. Pero ahora con los datos de 5 puntos en posición general y el Teorema de Pascal nos provee con una construcción.

53.1

**Escena 53. (Construcción de Pascal)** Dados cinco



puntos en posición general en el plano ... se toma una trayectoria de longitud 4 con líneas como aristas y ellos como vértices. Se le colorea y bautiza de acuerdo a la demostración del Teorema del Hexágono de Pascal. Hemos escogido al punto rojo  $A_1$  como centro de la trayectoria; el azul (y opuesto en el hexágono por armarse)  $B_1$ , es quien falta y al que le tocará recorrer con brocha a la curva.

53.2

El primer punto de Pascal,

$$P_1 = (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2),$$

ya está determinado.

53.4

Del siguiente,  $P_2$ , sabemos que está en la línea  $A_1 \vee B_3$  y será el punto variable. Pues de él se obtiene la “línea de Pascal” y su tercer punto

$$P_3 = (A_1 \vee B_2) \wedge (P_2 \vee P_1),$$

53.5

y con esto ya obtenemos al sexto vértice que cierra al hexágono:

53.6

$$B_1 = (A_3 \vee P_2) \wedge (A_2 \vee P_3),$$

que al correr con parámetro  $P_2$  dibuja la curva armónica deseada.  $\square$

53.7

Esc:53↑bt

### 3.4.2. El Teorema de Pappus

Como pronto veremos, la demostración del Teorema de Pappus es exactamente la del de Pascal, pero cortando con un plano tangente de la superficie reglada, en vez de con uno general como lo requiere la hipótesis de una curva armónica. En este sentido, Pappus es un caso límite o particular de Pascal; pero históricamente, Pappus es el que inspira a Pascal: la conclusión es justo la misma, sólo cambia el soporte del tinglado. El peso específico de la demostración, ahora recaerá en la construcción de la superficie reglada (ya no es de obvia resolución solventable con la cómoda frase de “por definición” como antes) y es a tal grado delicada y fina, que encarna —al grado de ser equivalente— al Axioma del Equipal que nos ha traído hasta aquí: así, con esa demostración cerramos este ciclo.

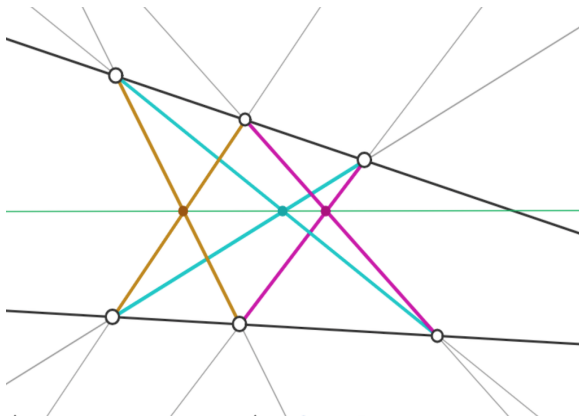
Pero antes de lanzarse de cabeza al ruedo, veremos señalar cuál ha sido el meollo técnico usado en las demostraciones (tanto del Teorema de Pascal, como en la compatibilidad con la incidencia en el Teorema de Polaridad, e incluso antes si se

le escarba con cuidado), y nombrarlo en honor al autor original de este enfoque. Como lema técnico, permite intercambiar picos con cuñas cuando se ésta jugando con reglas; pero también la idea de su demostración, para ver cuando la intersección de dos planos es una línea generada por dos puntos es usada con frecuencia.

**Lema 4 (de Dandelin)** *Sea  $\mathcal{S}$  una superficie doblemente reglada, y sean  $(a, p)$  y  $(b, q)$  dos parejas distintas de reglas en reglados opuestos de  $\mathcal{S}$ . Entonces*

$$(a \vee p) \wedge (b \vee q) = (a \wedge q) \vee (b \wedge p).$$

**Demostración.** Que las parejas sean distintas, implica que los planos que aparecen dentro de los paréntesis del lado izquierdo de la ecuación son distintos, y por lo tanto que su intersección es una línea. También implica que los dos puntos (dentro de los paréntesis) del lado derecho son distintos y entonces su cuña es una línea. La igualdad se sigue de que los dos puntos del lado derecho están en los dos planos del lado izquierdo.  $\square$



Ahora sí, sin más preámbulo, pasemos a lo barrido; que es un teorema enunciado para el plano:

**Teorema 12 (del Hexágono de Pappus)** *Las parejas de lados opuestos de un hexágono cuyos vértices caen alternadamente en dos líneas, se cortan en puntos colineales.*

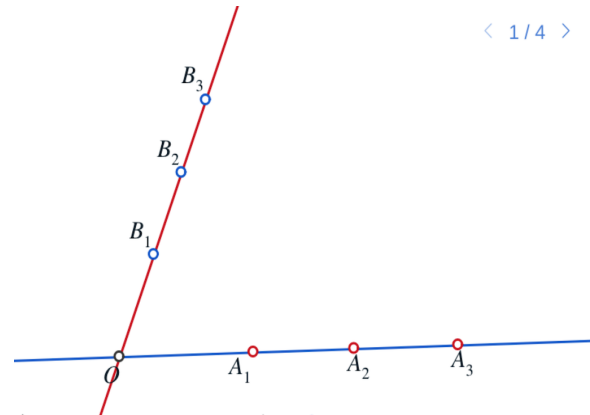
**Escena 54.** Antes de empezar con la demostración, vale la pena explorar la configuración de Pappus para observar que su demostración con puras

54.1

herramientas euclidianas no es fácil. En particular, hay varios casos especiales que considerar por cuestiones de paralelismo; por ejemplo, cuando la línea de Pappus está en el infinito.

**Escena 55. Demostración.** Con la consigna de seguir la idea de la demostración del Teorema de Pascal, pero ahora con un plano tangente, debemos considerar a las líneas dadas en la hipótesis como reglas de una superficie doblemente reglada por construir. Sean entonces  $b_0$  y  $a_0$  las líneas

Esc:54,↑bt  
55.1



< 1 / 4 >



que contienen a las ternas alternadas de puntos en el hexágono. Y llamémos  $A_1, A_2, A_3 \in b_0$  y  $B_1, B_2, B_3 \in a_0$  a los puntos, de tal manera que vértices opuestos en el hexágono reciban el mismo índice. Aparece un nuevo punto que hemos llamado  $O$  de “origen” ( $O = a_0 \wedge b_0$ ), y llamémos  $\pi$  al plano de la configuración ( $\pi = a_0 \vee b_0$ ).

55.2

Lo que debemos demostrar es que los puntos “de Pappus”:

$$P_1 = (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2),$$

$$P_2 = (A_3 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_3),$$

$$P_3 = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$$

55.3

son colineales.

Consideremos dos líneas rojas  $a_1$  y  $a_2$ , que sean generadoras (salimos a la dimensión 3) y que corten a  $\pi$  en los puntos  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

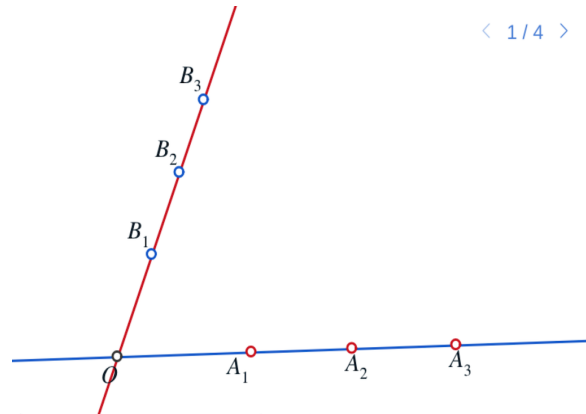
55.4

Sea  $\mathcal{R}$  el reglado transversal a las líneas  $a_0, a_1, a_2$ . Tiene reglas  $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{R}$  que pasan por  $B_1, B_2, B_3 \in a_0$ , respectivamente. Y además, contiene a la línea  $b_0$  porque ésta toca a las tres líneas generadoras.

Conviene dar con cautela el último paso.

Tenemos cuatro líneas azules y tres líneas rojas, tales que por parejas se cortan correspondiendo a si son de colores distintos o no. Para trazar (en la construcción) a la regla roja que falta ( $a_3$  por  $A_3$ ) que complete el timbiriche bicolor a ser de  $4 \times 4$ , hay que escoger a dos de las reglas azules del conjunto  $\{b_1, b_2, b_3\}$  pues  $A_3 \in b_0$ . Y que el efecto sea el mismo es lo que nos da el Axioma del Equipal, pues dice que las tres rojas se extienden a un

< 1 / 4 >



55.5

reglado de manera única. Veremos pronto que esto es justo la manera técnica de expresar este axioma... Por lo pronto, lo invocamos y completamos la configuración a **cuatro** y **cuatro** reglas en una superficie doblemente reglada.

55.6

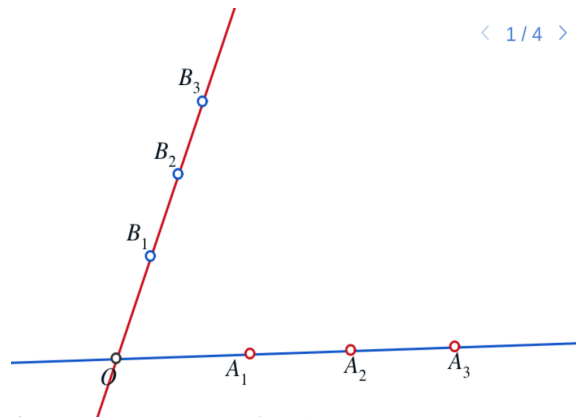
Y a partir de aquí, la demostración es la misma que la del Teorema de Pascal, pues si  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , el Lema de Dandelin nos da que

$$\begin{aligned} P_i &= (A_j \vee B_k) \wedge (A_k \vee B_j) \\ &= ((a_j \vee b_k) \wedge \pi) \wedge ((a_k \vee b_j) \wedge \pi) \\ &= ((a_j \vee b_k) \wedge (a_k \vee b_j)) \wedge \pi \\ &= ((a_j \wedge b_j) \vee (a_k \wedge b_k)) \wedge \pi. \end{aligned}$$

Y entonces, los tres puntos de Pappus,  $P_1, P_2, P_3$  están en la línea

$$((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \pi;$$

porque de hecho, son donde los lados del triángulo “diagonal”  $((a_1 \wedge b_1)(a_2 \wedge b_2)(a_3 \wedge b_3))$  del timbiriche, cortan al plano  $\pi$ .  $\square$



### 3.4.2.1. El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal

Demostramos, por último, lo que nos falta para tener que

- *el Axioma del Equipal es equivalente al Teorema de Pappus.*

Y por tanto, que la misma teoría se puede desarrollar suponiendo a este teorema clásico como axioma. Hay aún otros dos enunciados importan-

tes con la misma propiedad, que se refieren a las temáticas que abordaremos en los Capítulos 5 y 6.

**Teorema 13** *Si el Teorema de Pappus vale en los planos, entonces se cumple el Axioma del Equipal.*

56.1

**Escena 56. (Demostración.)** Sean  $a_0, a_1, a_2$  tres líneas en posición general. Queremos demostrar que pertenecen a un reglado único.

Sea  $\mathcal{R}$  su reglado transversal; consiste de todas las líneas que tocan a las tres rectas rojas dadas, y las pintamos de azul. Además, sabemos que está parametrizado por los puntos en  $a_0$ . Tenemos que demostrar que si tomamos dos ternas de reglas en  $\mathcal{R}$ , los reglados transversales que generan son el mismo (ésto es el Axioma del Equipal). Y para esto bastará demostrar que

- si una línea  $x$  toca a tres reglas de  $\mathcal{R}$  entonces también toca a cualquier otra.

Para ver con detalle que demostrar esta afirmación es suficiente, consideremos a dos ternas de reglas en  $\mathcal{R}$ :  $(p, q, r)$ , y  $(p', q', r')$ ; y sean  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  sus reglados transversales correspondientes (ambos son

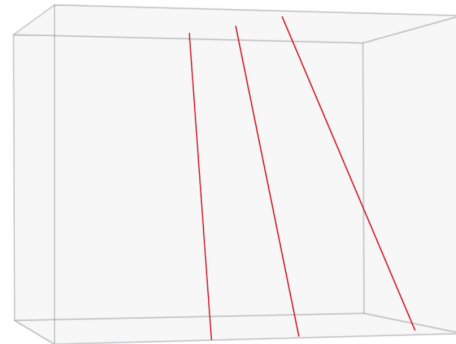
reglados que extienden a las tres rojas originales, pues están ahí por definición de  $\mathcal{R}$ ). Se tiene que

$$x \in \mathcal{R} \Rightarrow x \in \mathcal{R}';$$

pues  $x \in \mathcal{R}$  implica, aplicando tres veces la afirmación, que toca a  $p'$ , a  $q'$  y a  $r'$ , y esta es la definición de  $x \in \mathcal{R}'$ . Pero también se tiene (con idéntico argumento) la implicación inversa; y esto demuestra que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ .

Así que, el escenario que armamos para la de-

< 1 / 5 >



mostración del Teorema de Pappus es justo el que debemos considerar:

56.2

Sean  $b_0, b_1, b_2, b_3$  reglas de  $\mathcal{R}$  y sea  $a_3$  (que actuará como “la  $x$ ” en la afirmación) una línea transversal a  $b_0, b_1, b_2$ . Vamos a demostrar que  $a_3$  toca a  $b_3$  (en el papel de “cualquier otra”); sabiendo que todas los demás pares de líneas bicolors sí se tocan.

56.3

Sea  $O = a_0 \wedge b_0$ ; y para  $i = 1, 2, 3$ , sean:

$$A_i = a_i \wedge b_0 \quad \text{y} \quad B_i = a_0 \wedge b_i.$$

Podemos entonces aplicar el Teorema de Pappus en el plano  $\pi = a_0 \vee b_0$ , para obtener que

56.4

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2) \\ &= ((a_2 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_2)) \wedge \pi, \\ P_2 &= (A_3 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_3), \\ &= ((a_3 \vee b_1) \wedge (a_1 \vee b_3)) \wedge \pi, \\ P_3 &= (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) \\ &= ((a_1 \vee b_2) \wedge (a_2 \vee b_1)) \wedge \pi, \end{aligned}$$

son puntos colineales. Llamémos  $\ell_0 \subset \pi$  a la línea que los contiene.

56.5

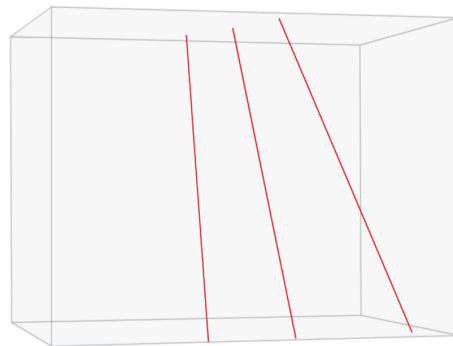
Sea  $\ell_3 = (a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)$ . Por la demostración del Lema de Dandelin:

$$\begin{aligned} \ell_3 \wedge \pi &= ((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge \pi \\ &= ((a_1 \vee b_2) \wedge (a_2 \vee b_1)) \wedge \pi \\ &= (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) = P_3. \end{aligned}$$

Como  $P_3 \in \ell_0$ , tenemos que  $\ell_0$  y  $\ell_3$  generan un plano; llamémoslo  $\lambda = \ell_0 \vee \ell_3$ , y obsérvese que también contiene a las líneas:

56.6

< 1 / 5 >



$$\begin{aligned} \ell_1 &= P_1 \vee (a_2 \wedge b_2) = (a_2 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_2) \\ \ell_2 &= P_2 \vee (a_1 \wedge b_1) = (a_1 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_1). \end{aligned}$$

Por ser coplanares (pues viven en  $\lambda$ ), éstas líneas se cortan. Sea

$$W = \ell_1 \wedge \ell_2.$$

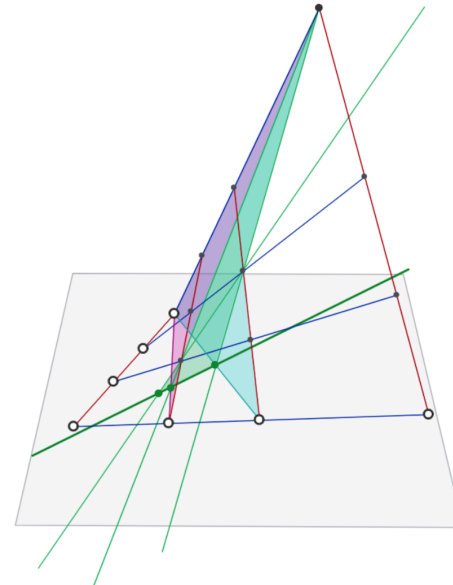
Vamos a probar que  $W \in a_3$  y  $W \in b_3$  para concluir que estas dos líneas también se tocan y con eso, se completa la demostración del teorema.

56.7

Consideremos a los planos  $\lambda$ ,  $a_3 \vee b_1$ ,  $a_3 \vee b_2$ . Se cortan por pares en las líneas  $\ell_2$ ,  $a_3$ ,  $\ell_1$ ; y como tres planos tienen un punto en común, ese tiene que ser  $W = \ell_2 \wedge \ell_1$ . Por lo tanto  $W \in a_3$ .

56.8

Análogamente, los planos  $\lambda$ ,  $a_1 \vee b_3$ ,  $a_2 \vee b_3$ , tienen como aristas a  $\ell_2$ ,  $b_3$ ,  $\ell_1$  y como vértice común a  $W$ ; por lo tanto  $W \in b_3$ .  $\square$



Esc:56↑bt

## Parte II

# Geometrías y aritmetización

## Capítulo 4

# Las tres geometrías planas rígidas

En el Capítulo 1, la exploración de los principios básicos de la perspectiva con escenas de geometría dinámica, nos condujo al estudio de *movimientos geométricos* de distintos tipos. También nos llevó a establecer a la geometría proyectiva como sistema axiomático. Con ello, y ya caminando sobre terreno matemático firme, establecimos en los siguientes dos capítulos a la armonía y a las curvas armónicas.

Es tiempo de volvernos a enfrentar a los movimientos; pero armados ahora con la poderosa

herramienta que nos da el Teorema de Polaridad; pues éste produce, al fijar una curva cónica, a una extensa familia de simetrías de la curva: todas las reflexiones armónicas en sus parejas polares. Empezaremos viendo la profunda implicación que tiene este hecho para la geometría clásica, que es producir al modelo de Beltrami-Klein del plano hiperbólico —la geometría no euclidiana por excelencia que describimos en la Escena ?? (en §1.2.3). Diremos que es una *geometría rígida* pues conduce a las nociones métricas de distancia y ángulo.

De aquí, y en el mismo *espíritu Kleiniano* (que quedará establecido con más claridad después de ver con detalle este primer ejemplo), pasamos a describir en los mismos términos a otras dos geometrías, pero ahora *guangas*: la proyectiva —que engloba a todas las demás— y la *afín*. Ésta última, a su vez contiene a, y comparte *espacio* con, la *euclidiana*, que es la clásica de siempre y constituye una segunda *geometría rígida*. Finalmente, veremos que íntimamente relacionada con la geometría euclidiana en la dimensión siguiente, está una tercera geometría plana rígida, la llamada *geometría elíptica* o *esférica* que es imponerle una estructura *rígida* al mismo plano proyectivo. Esto nos lleva naturalmente a discutir abiertamente ciertas cuestiones *topológicas* que hemos evitado enfrentar, y también, a la noción misma de *topología* que, en este mismo espíritu Kleiniano, caería en una nueva categoría de geometrías: la *super-extra-guanga*.

Pero antes de entrarle de lleno a este programa de trabajo, convendrá hacer un paréntesis histórico que sitúe cronológicamente a las ideas involu-

cradas; que dé algunos créditos relevantes de autoría, y que establezca el contexto para argumentar las hipótesis extra que tendremos que adoptar.

Como decíamos para abrir el Capítulo 1, “en el siglo XIX, las matemáticas ampliaron enormemente su abanico de objetos de interés”. En aquella introducción, esta frase servía de preámbulo para hablar de los *grupos* (que ya definimos formalmente en §2.4.3 y que son el personaje principal de este capítulo), pero ahora nos sirve para hablar de otros objetos y otras teorías que también nacieron o tomaron forma en esa época.

Lo que ahora llamamos *álgebra lineal*, o en ciertos ambientes *álgebra vectorial*, se acabó de asentar y establecer. Con el uso de las coordenadas, los matemáticos se sintieron a gusto (a sus anchas y seguros) para trabajar en espacios de muchas dimensiones: en el *Espacio Euclidiano* de dimensión  $n$  (denotado  $\mathbb{R}^n$  pues tiene como *campo base* a los números reales que se denotan  $\mathbb{R}$ ), cuyos puntos están determinados por  $n$  coordenadas. Y ya con la presencia contundente de estos *espacios vectoriales*, se abrieron, entre otros, dos importantes



cauces teóricos.

El de los espacios vectoriales complejos (cuando el *campo* que se usa para las coordenadas es el de los números complejos,  $\mathbb{C}$ , y se obtiene  $\mathbb{C}^n$  en el cual las *líneas* son copias de  $\mathbb{C}$ ), y el de las llamadas *variedades*<sup>1</sup> que viven en, o son subconjuntos de, algún espacio vectorial pero intrínsecamente tienen una dimensión más chica; es decir, *localmente* (en pequeñas porciones) se parametrizan con menos coordenadas que las de su ambiente. Son la generalización multidimensional de las superficies en el espacio  $\mathbb{R}^3$  (que localmente se describen con dos coordenadas). Hay que destacar aquí al matemático alemán (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), cuyo trabajo en esta dirección es tan importante que se conoce a su vertiente rígida como *Geometría Riemanniana*; la que sentó las bases para que, ya a principios del siglo XX, Albert Einstein (1879 - 1955) pudiera expresar

---

<sup>1</sup>Este es el nombre que acabo por adoptarse en español para referirse a estos objetos geométricos; pero tomó mucho tiempo y se pasó por distintas posibilidades en los distintos idiomas para llegar a un nombre estándar.

su teoría de la relatividad general.

Otra de las consecuencias del asentamiento del álgebra lineal, o quizá también una causa de ello, es que en cierta manera se funde con la geometría proyectiva. Hacia mediados del siglo se hace la observación, o acaba de caer el veinte, de que el Plano Desarguesiano es simplemente “*lo que ve un punto —o el origen para simplificar— en  $\mathbb{R}^3$* ” (los puntos corresponden a líneas por él y las líneas a planos), con lo cual se aprende a trabajar con las llamadas *coordenadas homogéneas* —que veremos en el Capítulo 6— y las transformaciones *proyectivas* se funden con las *lineales*.

En la presentación de su famoso *Programa de Erlangen*, en 1872, Felix Klein describe este panorama diciendo que —“... *la geometría, siendo sustancialmente única, se ha roto por su rápido y reciente desarrollo en una serie de teorías distintas, que avanzan independientes unas de otras*”. De aquí, concluye que —“*se justifica publicar observaciones que la reconecten... quiero presentar ciertos métodos y puntos de vista que han sido desarrollados en investigaciones recientes por [Sophus] Lie y por*

*mi mismo... pues aunque la naturaleza de los temas difiera, la conclusión de la concepción general [a la que ambos llegamos] es la misma".* Y ésta conclusión se puede resumir en que en la geometría, siempre hay un espacio y un grupo actuando en él (ambos pueden variar de una geometría a otra); y se buscan o se estudian las cosas y los fenómenos invariantes ante la acción del grupo.

Veremos en esta *concepción Kleiniana de la geometría* a los ejemplos que surgieron históricamente de poner en duda al quinto postulado. En todos ellos, la palabra *geometría* tiene el sentido más formal, restringido y preciso que le dimos en §1.4.1, como un conjunto de puntos (el *espacio base*) con una noción bien establecida de líneas (ciertos subconjuntos distinguidos de puntos) y que cumple el Axioma I. Estos ejemplos los incluyó Klein en su *Programa de Erlangen*; pero la manera en la que estamos llegando a ellos es diferente de la suya: nosotros por el camino de la geometría sintética y él por el de la analítica. Esto sucede con frecuencia en matemáticas; cuando algo es profundo, se le puede llegar o aproximar

desde muy diversos puntos de vista; emerge naturalmente de distintas situaciones o contextos.

Por último, conviene señalar que otro de los ejemplos que aborda Klein en su texto reunificador, es la *geometría* más general, flexible o *guanga* posible, basada en el concepto de *continuidad*, y que terminó por llamarse *Topología* ya entrado el siglo XX, pero que en ese entonces todavía se llamaba *Análisis Situs*. Se le concebía aún dentro del Análisis, pues aún no lograba el grado de abstracción necesario para obtener su independencia como teoría. La debemos mencionar, pues el tipo de suposiciones adicionales a los axiomas que debemos adoptar, son de índole topológica. En su momento las señalaremos puntualmente. Sin embargo, todo queda englobado en nuestra hipótesis de trabajo: en este capítulo, vamos a trabajar principalmente en el Plano Desarguesiano, también conocido como plano proyectivo real y denotado usualmente como  $\mathbb{RP}^2$ ; pero aquí lo seguiremos denotando  $\mathbb{D}^2$  en honor a su autor Desargues.

## 4.1. La geometría hiperbólica

Ya podemos hacer formalmente –y sin ayuda alguna de conceptos métricos– lo que describimos en la Escena 1.2.3 de §1.2.3, como contribución simultánea pero independiente de Eugenio Beltrami y Felix Klein a la geometría hiperbólica, que es el llamado *modelo proyectivo* o, a veces, modelo de Beltrami-Klein. Como ya hemos puesto planos a nombre de Euclides, Descartes y Desargues, haríamos bien en llamar a éste:

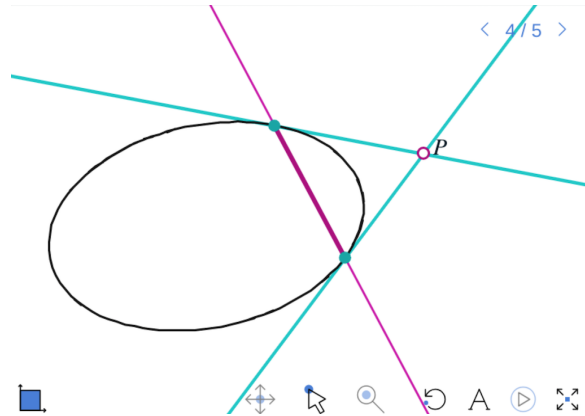
### 4.1.1. El Plano de Beltrami-Klein

57.1

**Escena 57.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva armónica en el Plano Desarguesiano,  $\mathbb{D}^2$ ; es decir,  $\mathcal{C}$  es la cerradura proyectiva de una curva cónica en el Plano Euclidiano,  $\mathbb{E}^2$ . Si es necesario, se le añaden uno o dos puntos ideales, pero conviene representarla como una elipse contenida en la pantalla.

57.2

Consideremos un punto libre  $P$ . Hemos demostrado que  $\mathcal{C}$  induce una polaridad, y entonces  $P$  tiene asociada una línea polar,  $p$  digamos, que pin-



tamos de morado como a  $P$ .

*En ProGeo3D, se obtiene con la herramienta “Armonía”. Al tener a ésta activa, si se selecciona primero a una curva armónica entra al modo “polo o polar”; se arrastra el cursor a un punto o a una línea, y al soltar ahí, se obtiene el polar asociado (línea o punto).*

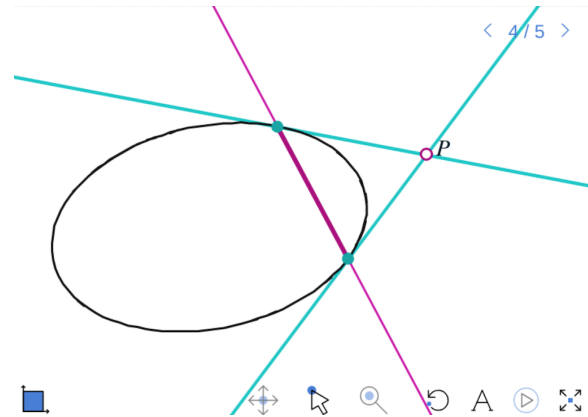
Observemos, moviendo a  $P$ , que hay tres tipos de puntos (en referencia a  $\mathcal{C}$ , por supuesto), pues sabemos que una línea corta a una curva armónica en a lo más dos puntos, y eso nos da tres tipos de

líneas. Visualmente los podemos identificar como:

- Los puntos de **adentro**, cuya línea polar es **externa**: no toca a  $\mathcal{C}$ .
- Los puntos de  $\mathcal{C}$  que están en su línea polar o tangente; y está toca a  $\mathcal{C}$  sólo en ese punto.
- Los puntos de **afuera**, cuya línea polar corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos.

Aunque visualmente sea evidente la existencia de los puntos de adentro de una elipse, ésta existencia no se sigue de los cinco axiomas (los cuatro básicos o de incidencia y el del equipal). Esto (de que efectivamente haya de los tres tipos de puntos) es una particularidad del Plano Desarguesiano, o mejor dicho del plano proyectivo real, pues es algo que tiene que ver con los números reales; con su estructura topológica y la continuidad; pero a su vez, con su estructura algebraica.

El ejemplo de plano proyectivo (que cumple los cinco axiomas y que definiremos en el Capítulo 6), pero en el cual todas las líneas cortan a una curva armónica en uno o dos puntos, es el que se construye usando a los números complejos,  $\mathbb{C}$ , en vez



de a los números reales. En la época del Programa de Erlangen se estaba estableciendo como una geometría válida: ahora la conocemos como Geometría Algebraica; tuvo avances teóricos espectaculares en el siglo XIX, y en buena medida por este hecho (todas las líneas tocan a una curva armónica) asociado a que  $\mathbb{C}$  es *algebraicamente cerrado* (todos los polinomios tienen solución).

Lo que vamos a suponer en el resto del capítulo es algo que nuestros ojos ven en los dibujos, y

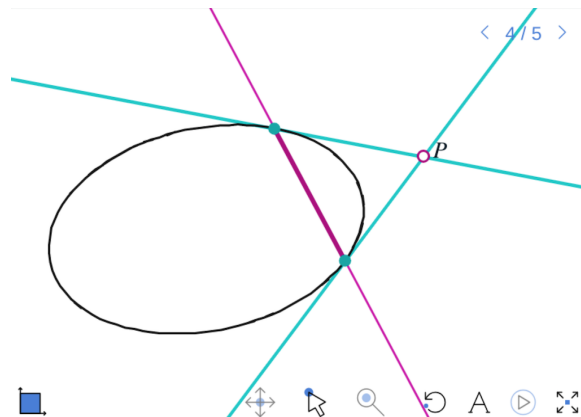
nuestra intuición geométrico-espacial dicta, pero que no vamos a demostrar:

**Hipótesis de Jordan.** Una curva armónica en el Plano Desarguesiano, parte a éste en tres pedazos no vacíos: los puntos de adentro, los de la curva y los de afuera; además, las líneas externas (polares a un punto de adentro) están formadas por puros puntos de afuera.

Antes de explicar las razones del nombre de ésta hipótesis, conviene observar que la última frase es equivalente, usando a la polaridad (y que ésta es una correlación), a que

- todas las líneas por un punto de adentro cortan a la cónica,  $\mathcal{C}$ , en dos puntos.

El nombre de esta hipótesis es en referencia al celebre *Teorema de la curva de Jordan* que dice que una curva cerrada simple (sin autointersecciones) en el plano, lo divide en dos regiones (adentro y afuera). Haber distinguido a éste como un enunciado digno de demostración fue muy importante pa-



ra el desarrollo de la topología; así como lo es intentar demostrarlo, pues conduce a precisar conceptos como *continuidad* (para precisar lo que es una curva) y lo que es *separar*. La primera demostración fue del matemático francés Camille Jordan (1838 – 1922). Nosotros sólo lo necesitamos en un caso muy especial que es el de una elipse (curva cónica que no toca a la línea al infinito).

Regresando a nuestra cónica y a la pareja polar que estábamos considerando, observemos que

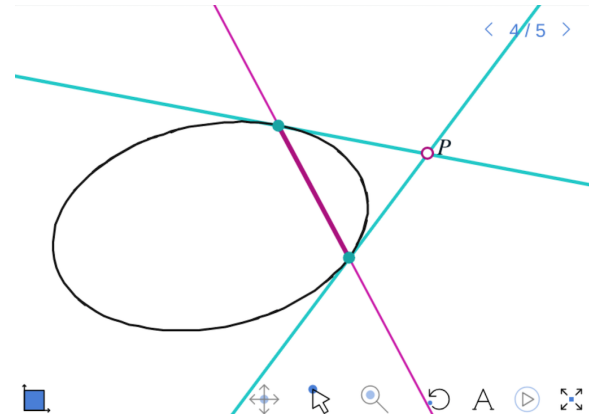
57.3

cuando el punto  $P$  está afuera (*si no está afuera, hay que sacarlo*), los puntos de intersección de su línea polar,  $p$ , con la curva  $\mathcal{C}$ , tienen como líneas polares a las dos tangentes que pasan por  $P$  porque la polaridad es una correlación (preserva incidencia o invierte contención). A estos dos puntos se les llama los *píes* de  $P$  en  $\mathcal{C}$  y son el equivalente bi-dimensional al contorno: “ahí donde  $P$  deja de ver a  $\mathcal{C}$ ”.

Nótese que estas líneas polares a puntos de afuera tienen puntos de los tres tipos: hay dos puntos de  $\mathcal{C}$  que *separan* a  $p$  en dos *segmentos abiertos*; uno está adentro y el otro afuera.

57.4

El **Plano de Beltrami-Klein** que define  $\mathcal{C}$ , y denotaremos  $\mathbb{H}^2$  (pues es un modelo de la geometría hiperbólica), tiene como puntos a los de adentro de  $\mathcal{C}$  y como líneas a todas las intersecciones con líneas que lo tocan; es decir, una **línea Kleiniana, hiperbólica** o **línea- $\mathbb{H}$**  consiste de puntos de adentro (los puntos de  $\mathbb{H}^2$ ) en la línea polar a un punto de afuera. Así que las líneas- $\mathbb{H}$  están en correspondencia 1-1 con los puntos de afuera; y también están en correspondencia con parejas no ordenadas



de puntos en  $\mathcal{C}$  a los que llamaremos sus **puntos límite** (aunque estos estén bien determinados por –y determinan a– la línea- $\mathbb{H}$ : no forman parte de ella). Es decir, también podemos identificar a las líneas- $\mathbb{H}$ , con las llamadas *cuerdas* de  $\mathcal{C}$ , en el entendido de que no incluyen a sus puntos límite.

**Escena 58.** Conviene rearmar a la misma figura, pero ahora controlando a la línea- $\mathbb{H}$  que seguimos llamando  $p$ , por sus dos puntos límite en  $\mathcal{C}$ , para que su polo,  $P$ , no quede encarcelado en la pan-

Esc:57↑bt  
58.1

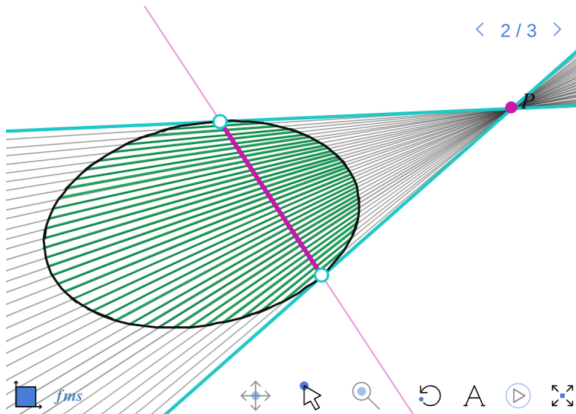
58.2

talla. Y entonces sí: se puede transitar, al menos potencialmente, sobre todas las posibles líneas- $\mathbb{H}$ , con sus polos  $P$  deambulando libres allá afuera.

Además —y este es el trabuco teórico que traemos entre manos y queremos explotar— cada línea- $\mathbb{H}$ ,  $p$ , viene acompañada de, una **reflexión hiperbólica** bien definida:

- la reflexión armónica con espejo en  $p$  y centro en su polo  $P$ , restringida a  $\mathbb{H}^2$ .

Puesto que esta reflexión armónica en todo  $\mathbb{D}^2$



deja invariante a la curva armónica  $\mathcal{C}$ , tiene que mandar a los puntos de adentro en puntos de adentro (a  $\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{H}^2$ ), a  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{C}$  y a lo de afuera en lo de afuera. Además, manda parejas polares (punto, línea) en parejas polares pues preserva armonía y manda tangentes de la curva en tangentes.

58.3

Esta reflexión hiperbólica (pensada en  $\mathbb{H}^2$ ) intercambia los dos lados, o cachetes, en que la línea- $\mathbb{H}$ ,  $p$ , parte al Plano de Beltrami-Klein. Pero además, sabemos cómo lo hace: intercambiando para cada punto de  $p$  en  $\mathbb{H}^2$ , los dos *lados* de la línea- $\mathbb{H}$  que va al polo  $P$  (el centro de la reflexión armónica) intercambiando sus dos puntos límite.

Hemos añadido a la escena un punto libre  $X$  y a su reflejado  $X'$  para insistir en, y que se pueda jugar con, el efecto geométrico de una de estas reflexiones.

Esc:58↑bt

Pero antes de seguir con las implicaciones de este hecho —de que haya tanta reflexión—, dejemos establecido por qué era tan escandalosa esta geometría. Por qué se creía que era incorrecto estudiarla ya que no correspondía a nuestro entorno; por qué encendió pasiones y se insistió en que vio-

laba nuestra “intuición”.

- El Plano de Beltrami-Klein,  $\mathbb{H}^2$ , es una geometría...

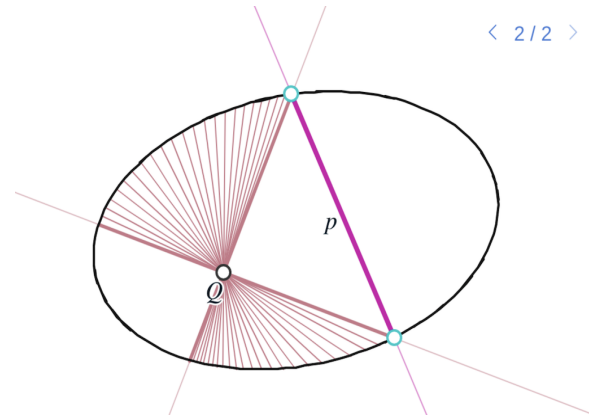
...pues cumple claramente el Axioma I: por cualesquiera dos puntos (en  $\mathbb{H}^2$ ) pasa una línea- $\mathbb{H}$  única (la que determina la línea proyectiva correspondiente).

59.1 **Escena 59.** Sin embargo, está muy lejos de cumplir al axioma euclidiano de las paralelas.

59.2 Dada una línea- $\mathbb{H}$ ,  $p$ , y un punto (en  $\mathbb{H}^2$ ) fuera de ella,  $Q$ ,... por ese punto no pasa una única, sino muchísimas líneas que no tocan a  $p$ .

De hecho, se pueden distinguir dos tipos de “paralelas” –entendiendo por esto que no se tocan. Hay pares de líneas- $\mathbb{H}$  que no se cortan (en  $\mathbb{H}^2$ ) pero que comparten un punto límite (en  $\mathcal{C}$ ) y las que ni siquiera en el límite, las que como líneas proyectivas se cortan en un punto de allá afuera. A las primeras, se les llama **paralelas** y a las segundas, **ultraparalelas**.

En la escena es claro que por un punto fuera de una línea, pasan exactamente dos paralelas a ella



< 2 / 2 >

(las que comparten sus puntos límite) pero además, hay una infinidad de ultraparalelas. Sería correcto decir que todo un segmento abierto, pues se parametrizan naturalmente (por intersección) con el segmento de afuera de la línea  $p$ .

Esc:59↑bt



### 4.1.2. Rotaciones y ortogonalidad

Para cada línea- $\mathbb{H}$ , tenemos una *reflexión hiperbólica* (insistimos: la reflexión armónica en la pareja polar asociada). Queremos entender qué pasa cuando se compone a dos de ellas; y para esto, hay que analizar varios casos correspondiendo a dónde se cortan los espejos.

Empecemos estableciendo notación. Como de costumbre, una línea se denota por una letra minúscula,  $p$  digamos. Para su punto polar usaremos a la mayúscula correspondiente,  $P$ ; y cuando  $p$  es una línea- $\mathbb{H}$ , denotaremos a su reflexión hiperbólica asociada decorándola con una tilde:

$$\tilde{p} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2,$$

que es una transformación de  $\mathbb{H}^2$ . Pero a veces, abusando de la notación, también podemos considerar a  $\tilde{p}$  como una transformación definida en todo el Plano Desarguesiano.

A la función identidad de  $\mathbb{H}^2$ , la denotaremos  $1_{\mathbb{H}^2}$ . Puesto que  $\tilde{p}$  es una reflexión, sabemos que

es su propia inversa, o una involución; es decir,

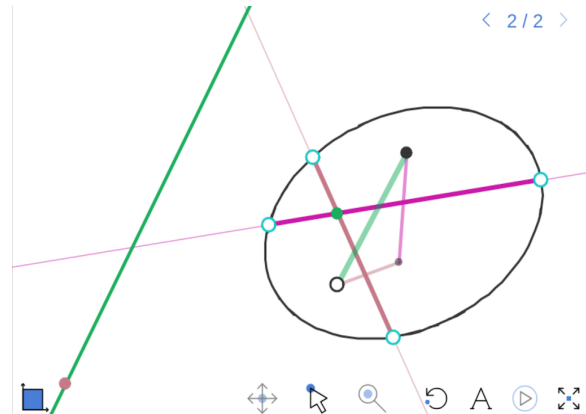
$$\tilde{p} \cdot \tilde{p} = 1_{\mathbb{H}^2}.$$

**Escena 60. (Definición)** Dadas dos líneas- $\mathbb{H}$ ,  $p$  y  $q$ , si su intersección,  $O = p \wedge q$ , es un punto de  $\mathbb{H}^2$ , decimos que su composición

60.1

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$$

es una *rotación* con centro en  $O$ .



60.2

Claramente,  $O$  se queda en su lugar pues está en los dos espejos. Y quedará más claro por qué le llamamos *rotación*... si movemos a un punto libre  $X$  y observamos cómo se mueve su imagen

$$X' = X \cdot (\tilde{p} \cdot \tilde{q}) = (X \cdot \tilde{p}) \cdot \tilde{q}.$$

Por ejemplo, al girar a  $X$  en, o cerca de,  $\mathcal{C}$ : se tiene que  $X'$  siempre va “adelante de”  $X$  en una misma “orientación” de  $\mathcal{C}$  con el segmento de  $X$  a  $X'$  dejando a  $O$  siempre del mismo lado;  $\tilde{p}$  se comporta como una *rotación alrededor de*  $O$ .

60.3

La inversa de una rotación también es una rotación. Se obtiene invirtiendo el orden en que se aplican las reflexiones, pues como la composición de funciones es asociativa y las reflexiones son involuciones:

$$\begin{aligned} (\tilde{p} \cdot \tilde{q}) \cdot (\tilde{q} \cdot \tilde{p}) &= \tilde{p} \cdot (\tilde{q} \cdot \tilde{q}) \cdot \tilde{p} \\ &= \tilde{p} \cdot 1_{\mathbb{H}} \cdot \tilde{p} = \tilde{p} \cdot \tilde{p} = 1_{\mathbb{H}}. \end{aligned}$$

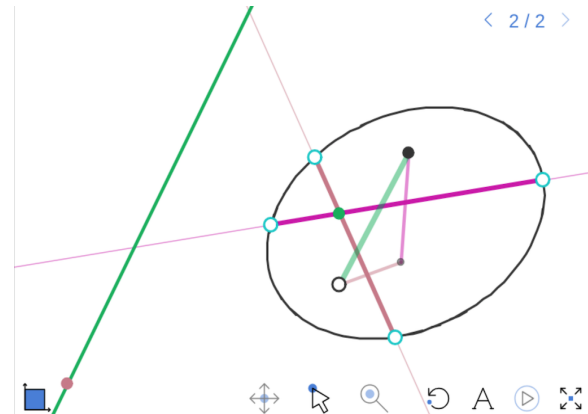
Hemos denotado  $X'' = X \cdot (\tilde{q} \cdot \tilde{p})$  para ver el efecto en un mismo punto de estas dos rotaciones. Juegue con la posición de las líneas para convencerse

experimentalmente de que la terminología corresponde a nuestra intuición. Y otro argumento para que la palabra “rotación” sea la adecuada es que

- si  $p \neq q$ , el único punto fijo de la rotación  $\tilde{p} \cdot \tilde{q}$  en  $\mathbb{H}^2$  (y en  $\mathcal{C}$ ) es  $O = p \wedge q$ .

60.4

Para demostrarlo, supongamos que  $X$  es un punto en  $\mathbb{H}^2$  o en su límite, la curva armónica  $\mathcal{C}$ , y que es un punto fijo de la rotación  $\tilde{p} \cdot \tilde{q}$ ; es decir,



tal que

$$X = X \cdot (\tilde{p} \cdot \tilde{q}) = (X \cdot \tilde{p}) \cdot \tilde{q}.$$

Supongamos primero que  $X \neq X \cdot \tilde{p}$ .

Que  $X = (X \cdot \tilde{p}) \cdot \tilde{q}$  implica que  $Q$ ,  $X$  y  $X \cdot \tilde{p}$  están alineados (puesto que  $\tilde{q}$  es una reflexión armónica con centro en  $Q$ ). Pero, por esta misma razón,  $P$ ,  $X$  y  $X \cdot \tilde{p}$  también están alineados. Por lo tanto

$$X, X \cdot \tilde{p}, P, Q$$

están alineados. Como  $P \neq Q$  (pues  $p \neq q$ ), esto implica que  $X \in P \vee Q = O$  (la línea polar de  $O$ ). Pero como esta línea es externa, se contradice nuestra suposición de que  $X \in \mathbb{H}^2 \cup \mathcal{C}$ .

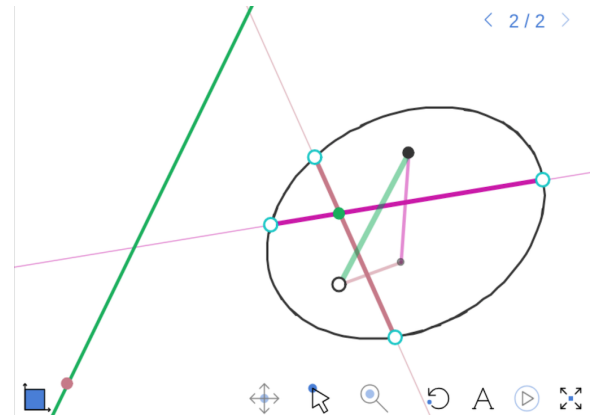
Nos queda el caso en que  $X = X \cdot \tilde{p}$ . Esto implica que  $X \in p$  pues el único otro punto fijo de  $\tilde{p}$  es su centro  $P$  que es un punto de afuera. Entonces, que

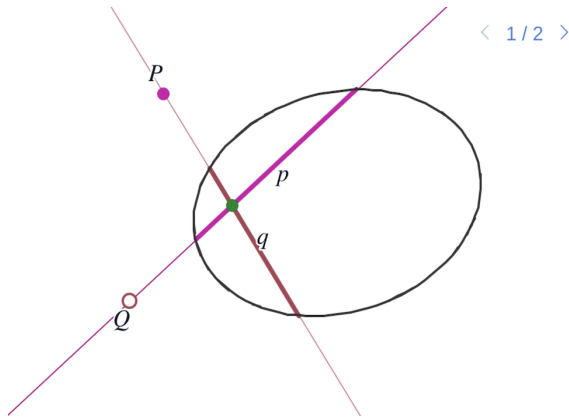
$$X = X \cdot \tilde{p} \cdot \tilde{q} = X \cdot \tilde{q}$$

implica, por la misma razón, que  $X \in q$  y por tanto que  $X = p \wedge q = O$ . Lo cual concluye la demostración.  $\square$

En realidad, acabamos de demostrar que si una rotación tuviera más puntos fijos además de su centro, estos estarían en su línea polar. Y este caso especial se da con toda esa línea de puntos fijos: lo hemos visto ya asociado a la definición de curvas de armonía, o a las cuartetos que llamamos “armónicas”, cuando pensábamos en parejas de puntos en la curva; pero pensadas ahora como los puntos límites de pares de líneas- $\mathbb{H}$ , resulta natural usar otra terminología.

Esc:6o↑bt





**Definición.** Diremos que dos líneas- $\mathbb{H}$ ,  $p$  y  $q$ , con puntos polares respectivos  $P$  y  $Q$ , son **perpendiculares** u **ortogonales**, si  $Q$  incide en la línea proyectiva  $p$  (que es equivalente a que  $P \in q$  por ser una polaridad).

61.1

**Escena 61.** Conviene parametrizar a la figura de pares de líneas ortogonales,  $p$  y  $q$ , por su punto de intersección,  $O = p \wedge q \in p$ , para transitar por todas sus posibilidades cuando una de las líneas- $\mathbb{H}$  ( $p$ ) está fija. Y observar que se tiene que por cual-

quier punto de  $p$  (e inclusive de  $\mathbb{H}^2$ ) pasa una única línea perpendicular a  $p$  (basta trazar su línea a  $P$ ). También se tiene por el Lema del Triángulo de Klein (en §2.3.3) que

- Si dos líneas- $\mathbb{H}$ ,  $p$  y  $q$ , son ortogonales entonces sus reflexiones conmutan, es decir,

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q} = \tilde{q} \cdot \tilde{p}.$$

Pues ambas rotaciones son la reflexión armónica en la pareja polar  $O = p \wedge q$ , o  $= P \vee Q$ . De hecho, ésta condición de conmutatividad es equivalente a que sean ortogonales, pero postergaremos su demostración.

61.2

Por lo pronto, debemos remarcar que estas rotaciones dadas como composición de reflexiones en pares de líneas- $\mathbb{H}$  ortogonales, vuelven a ser reflexiones en parejas polares respecto a  $\mathcal{C}$ , pero ahora con los espejos en líneas externas o, lo que es lo mismo, con el centro en  $\mathbb{H}^2$ , y son lo que deben llamarse **medias vueltas** o **medios giros** en ellos.

Esc:61↑bt

### 4.1.3. Traslaciones

Veámos ahora a la composición de dos reflexiones hiperbólicas cuyos espejos son ultraparalelos.

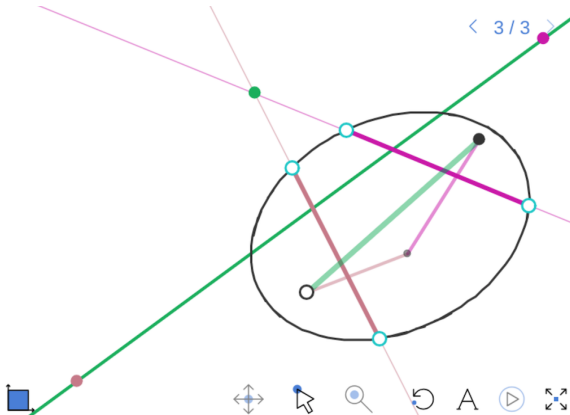
62.1

**Escena 62. (Definición)** Dadas dos líneas- $\mathbb{H}$ ,  $p$  y  $q$ , tales que su intersección,  $O = p \wedge q$ , es un punto de afuera. Entonces la composición

$$\tilde{p} \cdot \tilde{q}$$

es una **traslación** en la línea polar de  $O$ ,  $o = P \vee Q$ , que se puede considerar como una línea- $\mathbb{H}$ .

62.2



Hemos añadido a la escena a  $X$  y  $X' = X \cdot \tilde{p} \cdot \tilde{q}$  para experimentar con el efecto de la traslación. Fija a los dos puntos límites de  $o$ , y al punto  $O$  afuera; y a todos los demás puntos de  $\mathbb{H}^2$  (incluyendo a su límite  $\mathcal{C}$ ) los empuja de uno al otro.

Hay que remarcar que implícitamente hemos establecido dos hechos

- *Cualquier par de líneas- $\mathbb{H}$  ultraparalelas tiene una única perpendicular común,*
- *Una traslación en una línea- $\mathbb{H}$  se obtiene componiendo dos reflexiones en líneas- $\mathbb{H}$  perpendiculares a ella.*

Por último, debemos señalar que hay un caso “inestable” entre los dos “estables” de composición de reflexiones hiperbólicas. Cuando las dos líneas- $\mathbb{K}$  son paralelas (comparten un punto límite). Entonces, las composiciones son llamadas **traslaciones horocíclicas**. Sólo tienen un punto fijo (en  $\mathcal{C}$ ) que parece venir de uno adentro y se convierte en tres cuando las líneas se cortan afuera.

Esc:62↑bt

#### 4.1.4. Los dos grupos y la homogeneidad

El **grupo hiperbólico**, que denotaremos  $\mathcal{H}$ , consiste en todas las posibles composiciones finitas de reflexiones hiperbólicas; éstas son sus **generadores**. Y a los elementos de  $\mathcal{H}$  los llamaremos **transformaciones hiperbólicas**. Si denotamos por  $\mathbb{H}_1^2$  al conjunto de líneas- $\mathbb{H}$ , tenemos que

$$\mathcal{H} = \{ \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \cdots \tilde{p}_n \mid p_i \in \mathbb{H}_1^2 \}$$

Satisface las tres condiciones de un grupo de transformaciones:

Contiene a la identidad pues ésta se obtiene componiendo a cualquier reflexión consigo misma.

Es cerrado bajo composiciones, pues sus elementos son palabras cuyas letras son reflexiones hiperbólicas y componer equivale a yuxtaponer dos palabras que vuelve a ser una palabra.

Y la inversa de un palabra es esa palabra deletreada al revés –las mismas letras leídas en la dirección contraria– pues cada una de estas “letras” es su propia inversa.

Cada una de las transformaciones del grupo hiperbólico  $\mathcal{H}$  actúa en el el Plano de Beltrami-Klein  $\mathbb{H}^2$ , pero también se le puede considerar como actuando en todo el Plano Desarguesiano  $\mathbb{D}^2$ . Sin embargo, al ver cómo actúan en el plano hiperbólico,  $\mathbb{H}^2$ , se puede distinguir a dos tipos de transformaciones: las que **invierten la orientación** y las que **preservan orientación**.

Todos los generadores de  $\mathcal{H}$  (las reflexiones hiperbólicas) invierten orientación. Si pensamos en el símil de una moneda (con  $\mathbb{H}^2$ ), ellas la cambian de lado y dejan arriba a la otra cara de la moneda. Pero al componer a dos que la invierten, se obtiene una transformación que preserva la orientación; el ejemplo canónico es la identidad, pero ya vimos también a las rotaciones y a las traslaciones.

Las transformaciones hiperbólicas que preservan orientación forman un subgrupo de  $\mathcal{H}$ , denotado  $\mathcal{H}_+$ . Es llamado el **grupo hiperbólico orientado**, o bien el **grupo de movimientos hiperbólicos** entendiendo que se puede llegar a una transformación en  $\mathcal{H}_+$ , “moviéndose” continuamente desde la identidad.

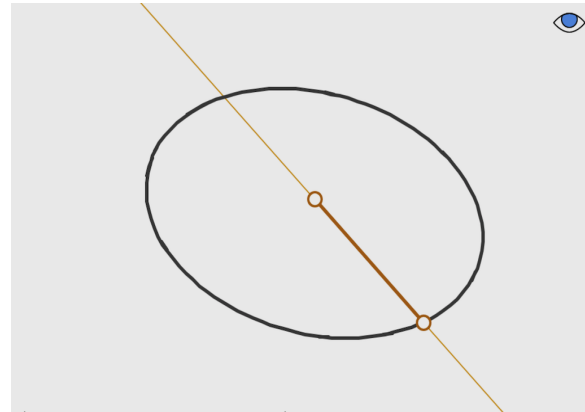
Puesto que una reflexión hiperbólica (la reflexión con espejo en una línea- $\mathbb{H}$ ) cambia la orientación de  $\mathbb{H}^2$ , *el grupo hiperbólico orientado, consiste de todas las transformaciones que se obtienen de palabras con un número par de letras* (donde las letras son generadores).

En el apartado anterior, vimos tres ejemplos de elementos de  $\mathcal{H}_+$ : las traslaciones, las rotaciones y las traslaciones horocíclicas. A la larga veremos que con eso ya vimos todo, que no hay más.

Desde Einstein, se le llama *principio cosmológico* a la suposición de que el universo es homogéneo (todos sus puntos son iguales) e *isotrópico* (todas las direcciones son equivalentes). Esta es una noción geométrica, pues cuando se tiene la acción de un grupo en un espacio, ser “iguales” o “equivalentes” es, más explícitamente, que haya una transformación en el grupo que mande a uno en el otro.

63.1

**Escena 63.** Llamemos *rayo* a “media” línea- $\mathbb{H}$ . Consiste de un punto en  $\mathbb{H}^2$ , su *origen*, y una línea *dirigida* (con una orientación distinguida) que sale de él. Se puede determinar la orientación de una



línea- $\mathbb{H}$  al fijar el punto límite hacia el que viajan los puntos en la dirección preferida. Así que un rayo de  $\mathbb{H}^2$  queda definido por un punto en  $\mathbb{H}^2$  y un punto límite en  $\mathcal{C}$ ; el rayo es la línea que determinan los dos puntos, uno es el origen y la dirección la da el punto límite.

Esc:63↑bt

- *Dados dos rayos en  $\mathbb{H}^2$ , hay un movimiento en  $\mathcal{H}_+$  que manda a uno en el otro.*

Para demostrarlo vamos a encontrar una refle-

ción que mande a un punto en el otro y componerla con una reflexión que ponga a la imagen del rayo original en la dirección adecuada. Hay que empezar con los puntos.

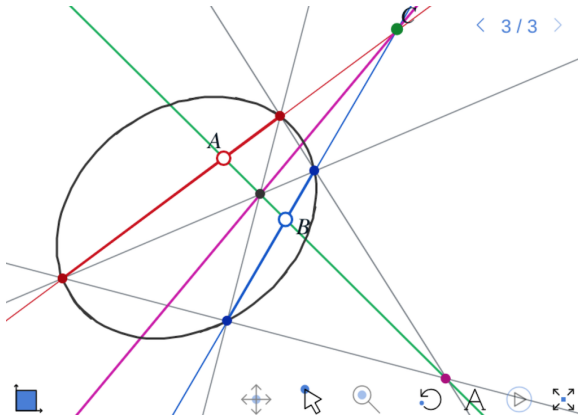
64.1

**Escena 64.** Sean  $A, B \in \mathbb{H}^2$  dos puntos distintos. El espejo que los intercambia y hace que sean “iguales” será la línea- $\mathbb{H}$  que es su *mediatriz*.

64.2

Por  $A$  y  $B$  podemos trazar una línea- $\mathbb{H}$ ,

$$c = A \vee B,$$



y ésta tiene a su polo  $C$  allá afuera. Las líneas de  $C$  a  $A$  y a  $B$  ( $C \vee A$  y  $C \vee B$ ) dan las perpendiculares a  $c$  en  $A$  y en  $B$ , cuyos puntos límite definen un cuadrángulo en  $\mathcal{C}$ .

64.3

Puesto que la reflexión armónica en la pareja polar,  $c, C$ , deja invariante a este cuadrángulo:  $c$  tiene que ser un lado de su triángulo derivado. En él, además de  $c$ , hay otro lado que define a una línea- $\mathbb{H}$ , esa es la *mediatriz* entre  $A$  y  $B$ ; y el tercer lado del triángulo derivado (que vive afuera) tiene como polo al *punto medio* (donde se cortan  $c$  y la mediatriz).

La reflexión en la mediatriz intercambia a  $A$  con  $B$  y también lo hace la *media vuelta* en su punto medio; la primera cambia orientación y la segunda la preserva. El tercer elemento no trivial del grupo de Klein asociado es la reflexión en  $c$  que deja fijos a  $A$  y a  $B$ .

Hay que observar que de aquí se puede obtener a la traslación en  $c$  que lleva a  $A$  en  $B$ : se compone a la reflexión en la perpendicular por  $A$  (la roja) con la mediatriz; o bien a ésta última con la perpendicular a  $B$  (la azul). Es fácil ver que ambas



mandan al punto  $A$  en el punto  $B$  y fijan a  $c$ .

**Escena 65.** Vamos a ver ahora que cualquier par de rayos con el mismo origen son equivalentes.

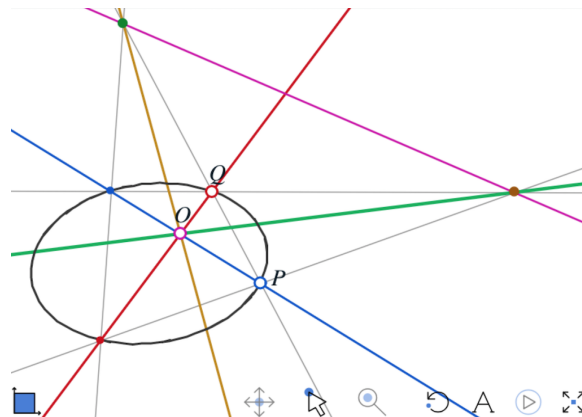
Consideremos a un punto  $O \in \mathbb{H}^2$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  en  $\mathcal{C}$ , es decir, puntos límite. Vamos a ver que tenemos bien definida una *bisectriz* entre los rayos  $OP$  y  $OQ$ .

De nuevo, al considerar a los otros dos puntos límites de las líneas- $\mathbb{H}$  ( $O \vee P$  y  $O \vee Q$ ), se obtiene un cuadrángulo en  $\mathcal{C}$ , cuyo triángulo derivado tiene como vértice al punto  $O$ .

Los lados de éste triángulo que pasan por  $O$  son líneas- $\mathbb{H}$  ortogonales: una refleja a los rayos  $OP$  y  $OQ$ , y la otra refleja a las mismas líneas pero lo hace mandándolas con la orientación opuesta.

De nuevo, como en el caso anterior, con las bisectrices se pueden obtener las dos rotaciones que mandan a una línea en la otra; hay que componer la reflexión en las propias líneas con la de la reflexión en la bisectriz apropiada.

Conviene hacer un paréntesis para subrayar, de nuevo, que de esta configuración hay un caso muy especial que es en el cual las líneas por  $O$  son or-



togonales (o el cuadrángulo en  $\mathcal{C}$  es armónico) y entonces se tienen coincidencias extras de las líneas tangentes en la línea polar de  $O$ . Y, cuando este es el caso, el grupo de simetrías de la configuración hiperbólica crece a ser de tamaño 8; es el equivalente en nuestro mundo euclidiano de pasar de un rectángulo a un cuadrado (el grupo de simetrías se duplica).

Usando a los dos resultados anteriores, obtenemos la homogeneidad en parejas punto-en-línea-

Esc:65↑bt

orientada, o rayos, que deseábamos. Pues dadas dos parejas tales

$$A \in \mathbb{H}^2, P \in \mathcal{C} \text{ y } B \in \mathbb{H}^2, Q \in \mathcal{C};$$

podemos reflejar en la mediatriz entre  $A$  y  $B$ ; esto manda a  $A$  en  $B$  y a  $P$  en un cierto  $P' \in \mathcal{C}$  para entonces reflejar en la bisectriz que manda al rayo  $BP'$  en  $BQ$ .

Esto nos da un movimiento hiperbólico que manda a la pareja  $A, P$  en la pareja  $B, Q$  como queríamos. Pero ahora sabemos que se puede obtener como la composición simple de dos reflexiones hiperbólicas. Es decir, que es una traslación, una rotación o una traslación horocíclica, dependiendo de la posición de los datos iniciales, que es la que determina la posición de los dos espejos en que se reflejó.

Resulta que este movimiento es el único que manda al rayo  $A, P$  en el correspondiente  $B, Q$ . Pero esta demostración de unicidad la dejamos para después.

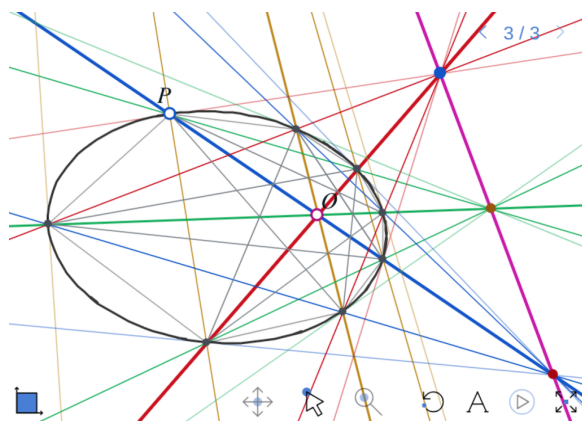
Para intuir este hecho podemos deambular por el grupo de movimientos hiperbólicos como en

§1.2.3, pero ahora usando a las curvas armónicas con su poderosa polaridad.

**Escena 66.** Empezamos con una curva armónica  $\mathcal{C}$  cualquiera; un punto  $O$  adentro (en el correspondiente Plano de Beltrami-Klein  $\mathbb{H}^2$ ), y un punto  $P$  en el límite. Determinan una pareja punto-en-línea-orientada que, al moverse acarrea a todo el Plano Desarguesiano con ella, dejando invariantes a la curva armónica  $\mathcal{C}$ , y con ella a su interior, el Plano de Beltrami-Klein  $\mathbb{H}^2$  correspondiente.

66.1

66.2



66.3

Usando polaridad, trazamos la perpendicular a  $O \vee P$  por  $O...$  y luego a las dos bisectrices, que también son ortogonales. Tenemos entonces a ocho puntos en  $\mathcal{C} \dots$  y por ellos podemos trazar segmentos, o líneas- $\mathbb{H}$ , para dar mejor la idea de cómo todo  $\mathbb{H}^2$  sigue a su guía; cómo todo se determina con su posición.

66.4

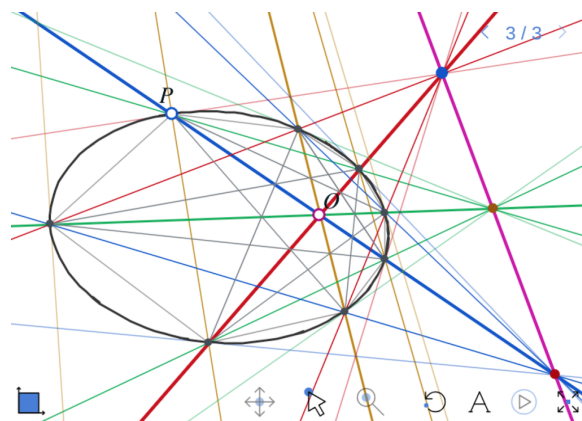
Obsérvese que en la línea polar a  $O$ , siempre hay una cuarteta armónica bien definida.

Finalmente, ya podemos tratar de precisar lo que entendíamos por “movimientos” en el Capítulo 1. Si pensamos que al arrancar la escena, los puntos  $O$  y  $P$  tienen una posición definida, llamémoslos  $O_0$  y  $P_0$  (para considerarlos como “ $O$  y  $P$  en el tiempo 0”), entonces para cualquier momento de la experimentación con ellos hay un movimiento hiperbólico definido en  $\mathcal{H}_+$  que es el que manda a los puntos iniciales ( $O_0$  y  $P_0$ ) en los dados en ese momento  $t$  ( $O_t$  y  $P_t$ ).

Pensado así, se arranca en la identidad (en el tiempo 0) y al mover  $O$  y/o  $P$  se deambula dentro de  $\mathcal{H}_+$ , y lo que se está viendo en la pantalla es la imagen del entramado inicial bajo el movimien-

to en el tiempo  $t$ . Aunque, en cualquier momento se puede decretar que los puntos iniciales son los que están en la pantalla y que se empieza uno a mover usando caminos que salen de la identidad en  $\mathcal{H}_+$ . Esta manera de pensar es importante para “ver” ciertos subgrupos como los de rotaciones alrededor de un punto que pronto serán importantes.

Esc:66↑bt



#### 4.1.5. Círculos, equidistantes y horocíclo

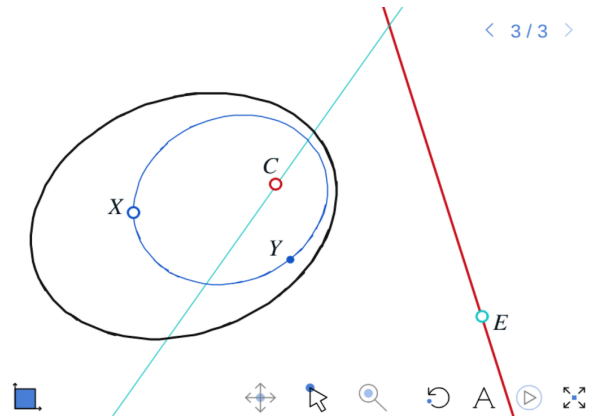
Por último, vamos a ver cómo usando a los grupos y sin necesidad de tener definida una distancia, se pueden trazar *círculos*: esos otros objetos de la geometría euclidiana (además de los “ángulos rectos”) que aparecen como personajes importantes en los postulados o axiomas clásicos de Euclides.

Sin embargo, en el caso de la geometría hiperbólica, de la misma construcción surgirán otros dos tipos de curvas relacionadas con los círculos.

**67.1 Escena 67.** Consideremos un punto  $C$  en el Plano de Beltrami-Klein,  $\mathbb{H}^2$ , asociado a la curva armónica  $\mathcal{C}$ . Queremos trazar el círculo hiperbólico con centro en  $C$  y que pase por otro punto  $X \in \mathbb{H}^2$ .

**67.2** Sea  $c$  la línea polar a  $C$ . Dado un punto  $E \in c$ , que servirá como parámetro, sea  $e$  su línea polar (que pasa por  $C$ ) y sea  $Y$  la imagen de  $X$  bajo  $\tilde{e}$  (recuérdese,  $\tilde{e}$  es la reflexión armónica con espejo  $e$  y centro  $E$ ); es decir, tenemos que

$$Y = X \cdot \tilde{e}.$$



Puesto que  $C$  está en el espejo de  $\tilde{e}$ , la distancia hiperbólica de  $X$  a  $C$  debe ser la misma que la de  $Y$  a  $C$  (sin necesidad de asociar un número preciso a esa “distancia”); y por tanto,  $Y$  debe de ser un punto en el círculo deseado.

Al pintar la curva que traza  $Y$  cuando varía  $E \in c$  se obtiene el **círculo hiperbólico** con centro en  $C$  y que pasa por  $X$ :

$$\text{Circ}_{\mathcal{C}}(C, X) = \{X \cdot \tilde{e} \mid E \in c\}.$$

67.3

67.4

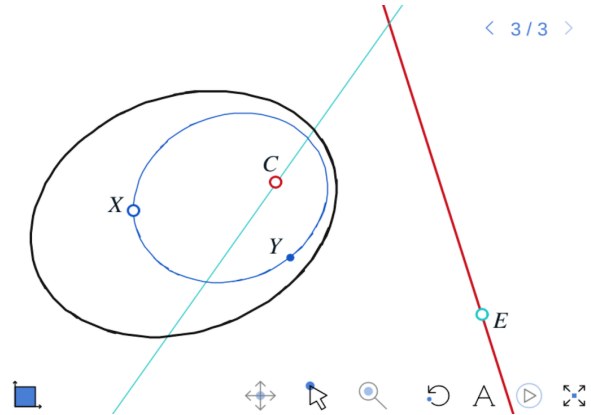
Conviene describir a estas curvas en términos de grupos (y no sólo de subconjuntos de reflexiones)... y para esto, sea  $e_0 = C \vee X$  la línea- $\mathbb{H}$  por  $C$  y  $X$ ; y sea  $E_0 \in c$  su punto polar. Puesto que  $X$  se queda fijo bajo la reflexión  $\tilde{e}_0$ , ( $X = X \cdot \tilde{e}_0$ ), tenemos que el círculo también es:

$$\text{Circ}_{\mathcal{G}}(C, X) = \{X \cdot (\tilde{e}_0 \cdot \tilde{e}) \mid E \in c\}.$$

Pero ahora, el conjunto de movimientos que se aplican al punto  $X$ ,

$$\{\tilde{e}_0 \cdot \tilde{e} \mid E \in c\},$$

es un grupo (un *subgrupo* de  $\mathcal{H}_+$ ). Como son rotaciones con centro en  $C$ , todos sus elementos fijan a  $C$ . Resulta (aunque no lo probaremos aún) que ésta propiedad lo define como grupo: es el llamado *estabilizador* del punto  $C \in \mathbb{H}^2$ , es decir, los movimientos que fijan al punto  $C$ . Es el *grupo de rotaciones* alrededor de  $C$  y sus elementos corresponden a los puntos del círculo (al identificar a la identidad con el punto  $X$ ). Su composición equivale a la clásica *suma de ángulos*; dentro de este



grupo con su regla de composición, se esconde la noción numérica de *ángulo*.

Así que el círculo hiperbólico con centro en  $C$  y que pasa por  $X$  es lo que se llama la *órbita* de un grupo (el conjunto de imágenes de un punto bajo los elementos de ese grupo).

Vamos ahora a explorar las posibilidades y variantes de esta construcción.

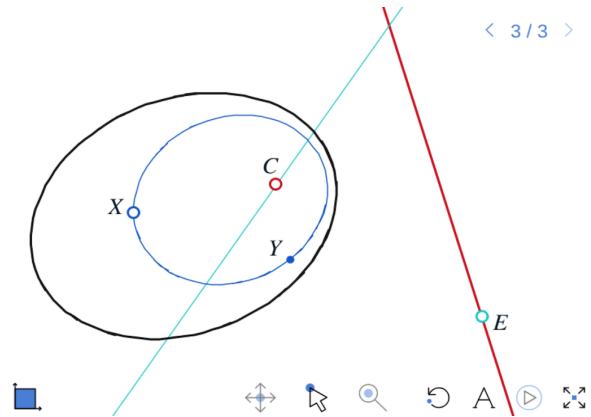
Primero, hay que notar que  $X$  no tiene por qué estar confinado a vivir adentro de  $\mathcal{C}$ . La construc-

ción tiene sentido para cualquier  $X \in \mathbb{D}^2$ ; y al moverlo, se deambula por una familia de curvas armónicas que parecen surgir del punto  $C$ , crecen para pasar por  $\mathcal{C}$  y concluyen colapsándose en la línea polar  $c$  con un *cubrimiento* de 2 puntos a 1, o 2-1. Al mover  $X$  hacia  $c$ , la curva le llega, o se aproxima, a la línea  $c$  por ambos lados.

Segundo, la construcción tampoco depende de que  $C$  sea un punto de  $\mathbb{H}^2$ : lo podemos sacar.

En este caso, cuando  $C$  está afuera de  $\mathcal{C}$ , lo que nos da la construcción para  $X \in \mathbb{H}^2$  es la llamada **curva equidistante** de  $c$ , que ahora es una línea- $\mathbb{H}$ : la polar de  $C$ . El grupo correspondiente de movimientos son todos aquellos (en  $\mathcal{H}_+$ ) que dejan a la línea  $c$  invariante (o, equivalentemente, es el estabilizador de su punto polar  $C$ ). Y lo que se está dibujando es la órbita del punto  $X$  bajo este grupo: lo que le pasa a  $X$  (representado por  $Y$ ) cuando  $c$  se mueve en sí misma. El nombre viene de que estos puntos deben tener la misma distancia a  $c$  que  $X$  (sin que sepamos cuál es).

Tanto la curva equidistante como el grupo del cual es órbita, tiene dos componentes. En la figura,



la curva está separada por los dos puntos límite de  $c$ . En el subgrupo de los movimientos que fijan a  $c$  como línea- $\mathbb{H}$ , se pueden diferenciar en los que, internamente en  $c$ , preservan su orientación y en los que la invierten. Como todos preservan la orientación del plano de Poincaré-Klein,  $\mathbb{H}^2$ , los primeros preservan a los dos lados de  $c$  y los segundos los intercambian. Los primeros son traslaciones de  $c$  y los segundos medios giros en sus puntos.

De un lado de la curva, en el que  $X$  representa a

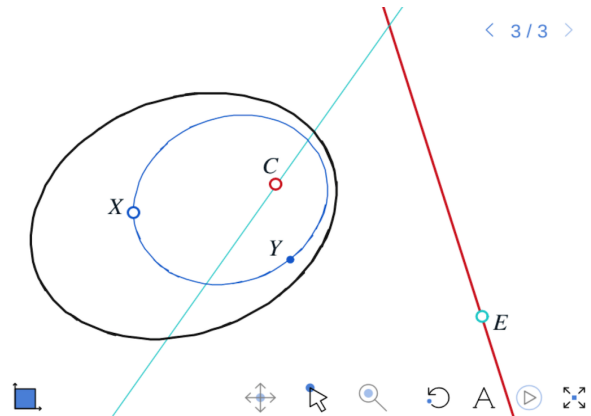
la identidad del grupo, están las traslaciones obtenidas como la reflexión en  $e_0 = C \vee X$  seguida de la reflexión en  $e$  (ambas, líneas ortogonales a  $c$ ); y del otro lado (de  $c$ ), están las medias vueltas en puntos de  $c$  parametrizadas por su mismísimo centro,  $E$ .

Nótese que al mover a  $X$ , se obtienen todas las curvas armónicas que genera la construcción-A, cuando se mueve al punto libre que antes llamábamos  $C$ . Es decir, las curvas armónicas que comparten dos puntos con sus dos tangentes

Falta mencionar el caso inestable entre los dos que hemos visto, que es cuando el punto  $C$  está en la curva  $\mathcal{C}$ . Entonces, se obtienen los **horocí-clos** como las órbitas del subgrupo de movimientos hiperbólicos que tienen como único punto fijo a  $C \in \mathcal{C}$  y que habíamos llamado traslaciones horocíclicas. En este caso, tanto las órbitas, como el grupo están en correspondencia con la línea proyectiva menos un punto, que estamos suponiendo que es la línea real  $\mathbb{R}$ .

67.5

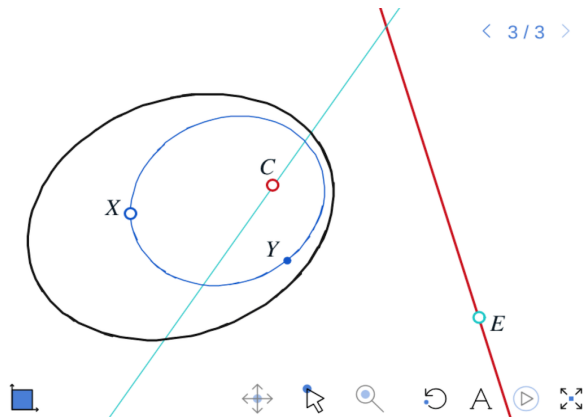
Por último, será muy importante hacer notar que si consideramos a  $E' = c \wedge e$  como un pun-



to en la línea  $c$  que depende del parámetro libre  $E \in c$ . Entonces, se cumple que la transformación de  $c$  en  $c$ :

$$E \mapsto E',$$

es una involución (su propia inversa), pues la asignación  $E \mapsto e$  es una polaridad (y  $E' = c \wedge e$ ). Por lo que la llamaremos una **polaridad en la línea**  $c$ . Pero el comportamiento de esta polaridad en  $c$  cambia radicalmente cuando  $C$  está afuera o adentro. En el primer caso, y por la simetría de la



## 4.2. La geometría proyectiva

Hemos descrito a *la Klein*, o en términos *Kleinianos* (especificar un conjunto o espacio de puntos junto con un grupo de transformaciones de él), al plano hiperbólico que desafió en su tiempo a las nociones clásicas o tradicionales de lo que es “geometría” pues viola al axioma de las paralelas, aunque sí tiene todas las nociones asociadas con la rigidez o la métrica. Logramos esto estudiando al Espacio Desarguesiano que, no hay que olvidarlo, se construye a partir del Espacio Euclidiano pero tomando en cuenta solo sus axiomas de *incidencia*. Éstos son el de “trazo de líneas” (*por dos puntos se puede trazar una única línea*) y el de “paralelismo” (*en un plano, por un punto fuera de una línea pasa una única paralela, es decir, que no la toca*); pues con base en este último se incorporaron los nuevos puntos “ideales”. En este nuevo espacio se desarrolla la *Geometría Proyectiva*, que aunque pierde en ciertas nociones de medición, gana en la certeza y generalidad de cuándo dos líneas se cortan (cuando son coplanares).

armonía, es la reflexión armónica en los límites de  $c$  como línea- $\mathbb{H}$ , e invierte la orientación de  $c$ ; en el segundo (en el que  $c$  no toca a  $\mathcal{C}$ ), preserva la orientación y no tiene puntos fijos.

Al primer caso, se le llamará una **polaridad hiperbólica** de la línea (que es otro nombre para una reflexión armónica). Y al segundo, se le llamará una **polaridad euclidiana** de la línea pues será fundamental para dar la estructura rígida en términos Kleinianos al plano euclidiano.



Felix Klein, como hemos cacareado ya bastante, fue el que observó que dentro de esta geometría se encuentran modelos de las otras. Y para que esto tenga sentido, debemos describir a la Klein a la propia geometría proyectiva.

#### 4.2.1. Los grupos proyectivos

Para definir, o intentar definir, en términos Kleinianos a la geometría plana en la que estamos trabajando, no hay duda de que el *espacio de puntos* debe ser el Plano Desarguesiano. Lo que falta determinar es un grupo de transformaciones que actúa en él y hay varias opciones razonables de caminos o rutas para hacerlo.

La primera, que es la de más abolengo pues de aquí se deriva el nombre de esta geometría, viene de trabajar con las **proyecciones**. Tiene el problema técnico de que una proyección es una función que va de un plano en otro; no una *transformación*, *biyección* o correspondencia 1-1 de un conjunto en sí mismo; y además, necesita de un ambiente (del espacio tridimensional) para tener sentido. De tal

manera que para construir a un grupo de transformaciones del plano, hay que considerar cadenas de proyecciones para regresar al mismo plano (a la composición de éstas proyecciones encadenadas, se les llama **proyectividades**). Transitar este camino lleva su tiempo; es importante pues viene de la motivación original de ésta geometría que es la perspectiva y convierte a las proyecciones –y a lo que dan lugar en el mundo de las funciones– en un objeto de estudio en sí mismo. Lo transitaremos con cuidado en la Parte II del libro.

La segunda ruta no necesita que el plano viva en otro espacio, sino que es intrínseca pero formal, quizá demasiado formal. Consiste en considerar, en abstracto, a las transformaciones del plano (insistimos, biyecciones del plano en sí mismo) que preservan a las líneas como subconjuntos; a las que *mandan líneas en líneas* y que es usual llamarlas **colineaciones**. Se tiene fácil la certeza teórica de trabajar con un grupo –el de todas las colineaciones– pero da lugar a la pregunta profunda y difícil de si no es éste un grupo demasiado grande; de si será cierto que cualquier colineación

tiene una definición constructiva más geométrica. También enfrentaremos esta ruta en la Parte II.

Y la tercera vía, que históricamente es más discreta pero es la más apropiada para nuestra situación actual, es la de considerar al grupo generado por todas las reflexiones armónicas; llamémoslo el **grupo proyectivo del plano** y denotémoslo  $\mathcal{P}_2$  (donde el subíndice se refiere a la dimensión, pues también tenemos al análogo  $\mathcal{P}_3$  para el espacio tridimensional y a  $\mathcal{P}_1$  que actúa en la línea proyectiva, ya que en esos dos “espacios de puntos” están bien definidas las reflexiones armónicas).

Por definición,  $\mathcal{P}_2$  consiste de todas las transformaciones del Plano Desarguesiano en sí mismo que se obtienen como composición finita de reflexiones armónicas, las llamaremos **transformaciones proyectivas**. Claramente es un grupo de transformaciones pues todos sus *generadores* (las reflexiones armónicas) son involuciones –es decir, son su propia transformación inversa. De tal manera que la identidad está en  $\mathcal{P}_2$ ; éste es cerrado bajo composición y cada transformación convive ahí con su inversa.

Además, es un subgrupo de las colineaciones, pues ya probamos (en §2.3.2) que los generadores (las reflexiones armónicas) mandan líneas en líneas y por tanto, cualquier composición finita de ellas también lo hará. También es cierto (y no es difícil probar) que es un subgrupo de las proyectividades. Aunque a la larga, y bajo ciertas hipótesis que aún no podemos formular, estos tres grupos resultan ser uno mismo.

Debemos subrayar que el grupo de transformaciones hiperbólicas, que habíamos denotado  $\mathcal{H}$ , es un subgrupo de  $\mathcal{P}_2$  pues se generó a  $\mathcal{H}$  con un subconjunto de los generadores de  $\mathcal{P}_2$  (sólo las reflexiones armónicas correspondientes a las parejas polares que determina una curva armónica). Y además, el “espacio de puntos” es un subconjunto del Plano Desarguesiano, a saber, los puntos de adentro de la curva armónica. De tal manera que la *Geometría Hiperbólica* puede ser llamada sin tuteos como una *subgeometría* de la proyectiva o, como se dice más comunmente, tiene un modelo dentro de la Geometría Proyectiva: justo el que hemos descrito.

## 4.2.2. El grupo proyectivo de la línea

Vamos a demostrar ahora una relación sorprendente y bella entre los grupos de transformaciones que se han definido: *el grupo hiperbólico es igual al grupo proyectivo de la línea*. Esto se puede escribir

$$\mathcal{H} \cong \mathcal{P}_1, \quad (4.1)$$

donde el símbolo  $\cong$  se lee “es *isomorfo* a”, y significa que hay una biyección (o correspondencia 1-1) entre los grupos que manda a la identidad en la identidad y preserva el producto, que en este caso es la composición de transformaciones.

El adjetivo que usamos de “sorprendente” se transforma en “natural”, al recordar que las curvas armónicas están parametrizadas por una línea y que el grupo hiperbólico no sólo actúa en los puntos de adentro sino en la curva misma. Estos dos hechos son los que conducen a la demostración.

La primera definición de curva armónica que dimos, usaba un punto libre dentro de una “cuerda” como parámetro. La segunda y más formal fue como la intersección de una superficie reglada con

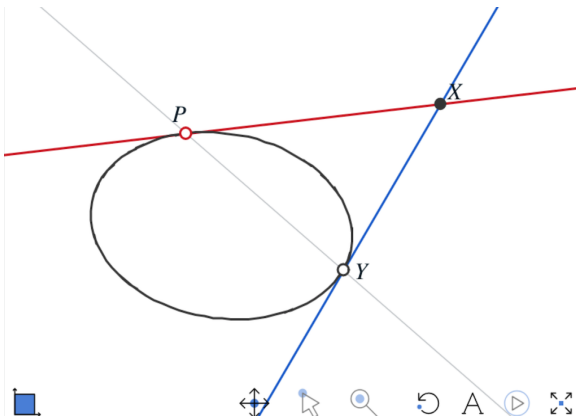
un plano  $\pi$ . Las reglas (azules digamos) que barren a la superficie están parametrizadas por los puntos en una regla del otro reglado (una regla roja), y cada regla azul corta a  $\pi$  en un punto de la curva; de tal manera que la curva vuelve a estar parametrizada por los puntos de una línea. Si pensamos en el haz envolvente como la proyección de la superficie reglada desde el punto polar del plano  $\pi$ , está es justo la *correspondencia tangencial*:

**Escena 68.** Sea  $\mathcal{C}$  una curva armónica y  $P$  un punto en ella. Sea  $\ell$  la línea tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$ . Se tiene entonces una biyección entre los puntos de  $\ell$  y los de  $\mathcal{C}$ , que llamaremos la *correspondencia tangencial*: los puntos  $X \in \ell$  y  $Y \in \mathcal{C}$  se corresponden si  $X \vee Y$  es tangente a  $\mathcal{C}$ ; esto es, si  $X$  es el polo de  $P \vee Y$ . Y por supuesto, también hay que añadir que  $P \in \ell$  corresponde a  $P \in \mathcal{C}$ .

Ya tenemos identificados, o en correspondencia, a los “espacios de puntos” en los que actúan nuestros dos grupos ( $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{P}_1$ ). Si demostramos que las transformaciones que los generan se corresponden, ya acabamos. Y para esto, veremos que

68.1

Esc:68↑bt



- la correspondencia tangencial manda cuartetos armónicos en cuartetos armónicos.

Con esto basta para demostrar (4.1), pues las reflexiones armónicas (los generadores de los grupos) se definen en base a las cuartetos armónicos: al fijar dos puntos (línea- $\mathbb{K}$  en la curva armónica o espejo y centro en la línea tangente) el cuarto armónico de un tercer punto es su imagen bajo la reflexión armónica correspondiente.

**Escena 69.** Consideremos una cuarteta armónica en la curva armónica  $\mathcal{C}$ ; denotemos  $A, D, B, C$  a los puntos en su orden cíclico sobreentendido.

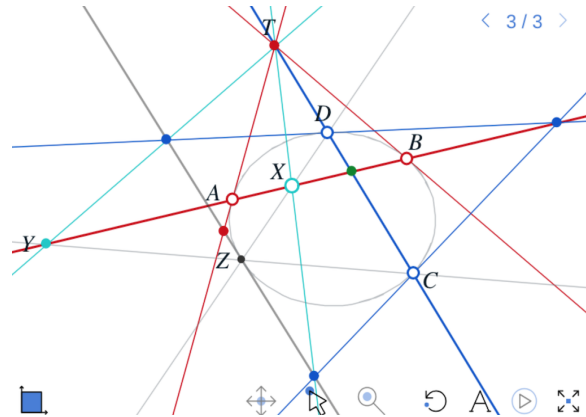
69.1

Las cuatro tangentes a  $\mathcal{C}$  por ellos, llamémoslas  $a, d, b, c$ , se construyen trazando una línea del punto de contacto al conjugado armónico del “centro”,  $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ , respecto a la pareja diagonal opuesta.

69.2

Llamemos  $T$  al polo de la línea  $A \vee B$ , ... para concluir que  $\mathcal{C}$  se obtiene por la construcción-A

69.3



de los cuatro puntos  $A, B, C, T$  y con la notación original de aquella construcción (§3.1.1).

Sea  $Z$  cualquier punto en  $\mathcal{C}$  (estamos pensando en el punto  $P$  de la construcción anterior pero manteniendo la notación de la construcción-A), y queremos demostrar que la intersección de su línea tangente, llamémosla  $z$ , con  $a, d, b, c$  es una cuarteta armónica.

Por la construcción-A,  $Z$  se obtiene como el reflejado armónico de  $C$  con espejo  $T \vee X$  y centro  $Y$  para alguna pareja  $X, Y$ , armónica respecto a  $A, B$ .  $Y$  su línea tangente  $z$  corta a  $c$  (la tangente a  $C$ ) en el espejo  $T \vee X$ .

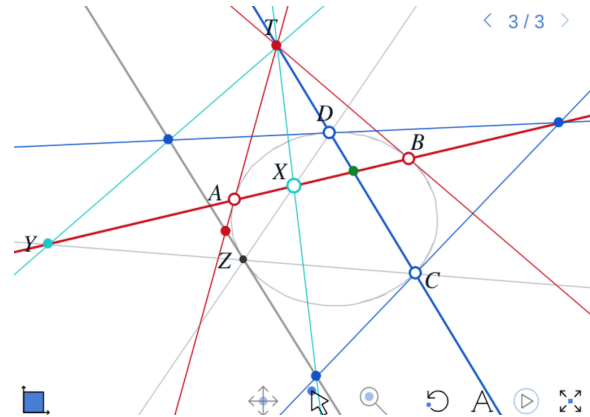
69.4

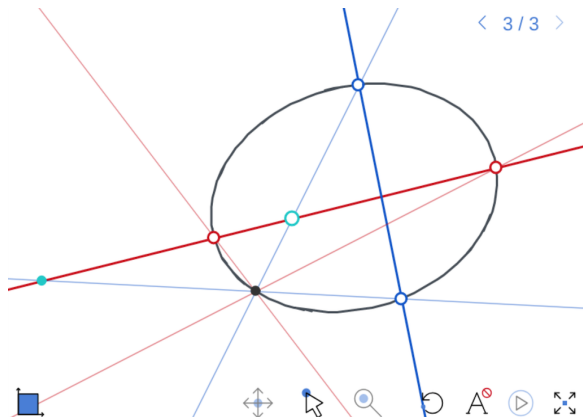
Pero  $Z$  también se puede obtener de la construcción-A usando al punto  $D$  en vez del punto  $C$  y la pareja armónica respecto a  $A, B$ , que la produce es  $Y, X$  (se invierten los papeles). Así que la línea  $X \vee D$  pasa por  $Z$ , y la línea  $T \vee Y$  pasa por  $z \wedge d$ . Esto también se puede demostrar usando al Lema del Triángulo de Klein (§2.3.3) en el triángulo  $X, Y, T$ .

Por último, hay que observar que la cuarteta armónica  $A, Y, B, X$  se proyecta desde  $T$  en la

cuarteta en que las cuatro tangentes  $a, d, b, c$  cortan a  $z$ .

Hemos demostrado que las tangentes a una cuarteta armónica en  $\mathcal{C}$  cortan a cualquier otra línea tangente en una cuarteta armónica. Pero la construcción dice más: *cualquier línea que corte a esas cuatro tangentes en una cuarteta armónica es, a su vez, una línea tangente*. Pues dada una línea con esta propiedad, al trazar líneas de su cuarteta a  $T$  nos da una cuarteta armónica de lí-





neas ahí, que a su vez corta a la línea  $A \vee B$  en la instancia del parámetro  $X$  y su armónico  $Y$  que da lugar a una línea tangente que coincide con la dada.

**Escena 70.** La dualización de este hecho tiene una implicación interesante que se antoja mencionar como paréntesis antes de regresar a los grupos.

Dada una cuarteta de puntos (en posición general y apareados en dos líneas “diagonales”), la construcción de la curva armónica que los hace ar-

mónicos se simplifica bastante.

Simplemente se toma un par armónico variable en una de las líneas diagonales, de ellos se trazan líneas al otro par, y éstas se intersectan. La curva que se genera es la deseada. Y además nos permite definirla como lugar geométrico:

*La curva armónica que hace armónicos a una cuarteta de puntos en posición general, es el lugar geométrico de los puntos que los ven como cuarteta armónica.*

Donde hay que añadir a los cuatro puntos, reemplazando en ellos a su respectiva línea de visión por la línea tangente; cosa que la construcción hace correctamente.

### 4.2.3. Teorema de 3 en 3

Un corolario de nuestros primeros pininos en la geometría hiperbólica, aplicado a (o visto desde la óptica de) el grupo proyectivo de la línea,  $\mathcal{P}_1$ , dará que este grupo es *triplemente transitivo*; es decir, que dadas dos ternas de puntos en una línea (en

70.2

70.3

Esc:70↑bt

Esc:69↑bt

70.1

la que actúa  $\mathcal{P}_1$ ), existe una transformación proyectiva (en  $\mathcal{P}_1$ ) que manda una en la otra.

Este es un resultado central de la teoría. Tan es así, que es la mitad de lo que Coxeter llama el Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva. Aunque tampoco es para sorprenderse, pues ya en la construcción de sucesiones armónicas (§2.2.4) vimos que se pueden poner 3 puntos a jugar el papel de 0, 1 y 2, o mejor aún de 0, 1 e  $\infty$ , arbitrariamente en cualquier lugar de una línea y entonces todos los enteros (y los racionales tras ellos) saben exactamente dónde les toca acomodarse por cuestiones de armonía; y luego vienen los reales para rellenar los huecos cobijados por la continuidad.

Para la demostración de la triple transitividad, se vale trabajar con la acción del grupo hiperbólico  $\mathcal{H}$  en su curva armónica  $\mathcal{C}$ , pues está es equivalente a la de  $\mathcal{P}_1$  en la línea.

71.1  
71.2

**Escena 71.** Consideremos tres puntos gordos en  $\mathcal{C}$ , el rojo, el azul y el verde.

Se antoja de inmediato trazar las líneas entre ellos para obtener lo que se conoce como un *triángulo ideal* en la geometría hiperbólica: tres líneas y

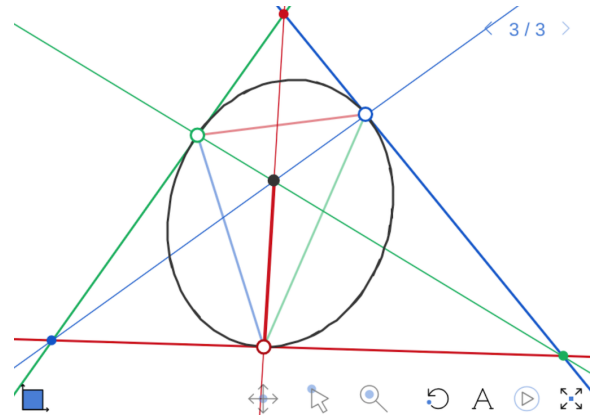
dos a dos paralelas; comparten puntos límites que no están en el triángulo, los *vértices* que sólo lo indican.

71.3

Además, tenemos a las tres líneas tangentes y, como vimos en §3.1.2, ... forman una configuración de Ceva.

71.4

Lo que esto implica, en términos de geometría hiperbólica, es que hay un punto (el de Ceva) asociado al triángulo ideal que bien podemos llamar su *baricentro* pues en él concurren sus tres *alturas*



—cada línea de un vértice al baricentro es ortogonal al lado opuesto del triángulo. Y cada altura es bisectriz de las otras dos.

Entonces, las reflexiones hiperbólicas en las tres alturas, transponen al par de vértices del lado que cruzan perpendicularmente, mientras que dejan fijo al vértice por el que pasan.

Así que el grupo que generan estas tres reflexiones es equivalente al de las permutaciones de sus tres vértices. Y de éstas hay 6: tres rotaciones (incluyendo a la identidad) y esas tres reflexiones. Al grupito de rotaciones se le conoce como el *grupo cíclico* de orden 3 (consta de la identidad y, coloquialmente, las rotaciones de 120 y -120 grados). En términos hiperbólicos, el triángulo ideal es perfectamente simétrico y su grupo de simetrías tiene un centro o punto fijo, el baricentro. Lo que hemos demostrado es que para cada triángulo ideal, hay un punto único que ve a sus vértices en ángulos iguales.

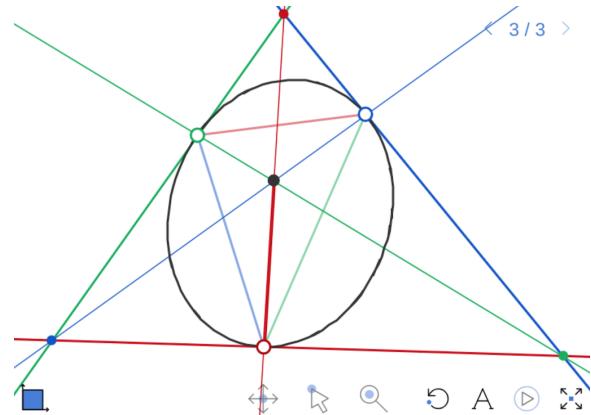
71.5

De tal manera que el triángulo ideal queda perfectamente determinado por su baricentro y uno de sus vértices, el rojo digamos, pues los otros dos

se obtienen actuando en él con el grupo cíclico de orden tres en el baricentro.

71.6

Entonces, si tenemos otros tres puntos en  $\mathcal{C}$  (los flacos digamos), sabemos (por la homogeneidad del Plano Kleiniano, §4.1.3) que hay un movimiento que manda al par baricentro-vértice-rojo gordo en el flaco. Si manda a los otros dos vértices gordos en los flacos de su color, ya acabamos. Si no, van permutados, pero reflejando en la altura roja (gorda antes o flaca después) quedan justo en su lugar





(este es el caso en que se invierte la orientación).

Esc:71↑bt

En particular, por las demostraciones podemos añadir que cuando las ternas de puntos tienen la misma orientación en la línea (o en la curva armónica), se puede mandar una en la otra con la composición de dos reflexiones armónicas; y cuando tienen orientación contraria con una o con tres se logra.

### 4.3. La Geometría Euclidiana

La Geometría Euclidiana es la clásica o tradicional que se ha desarrollado por milenios y se nos enseña desde chiquitos. Se fundamentó de manera axiomática con el trabajo de Euclides de Alejandría (~ 300 ac) a quien se atribuye el libro *Los Elementos*, donde se compila y expone de manera sistemática y racional el conocimiento geométrico hasta ese momento. La contundencia y exactitud de esta geometría para explicar nuestro entorno inmediato en términos métricos o rígidos, condujo hasta hace muy poco tiempo a confundirla con la realidad misma. Y es un modelo teórico tan exitoso, que el desarrollo de las llamadas Ciencias Exactas la tienen como uno de sus pilares fundamentales; un ejemplo de esto es lo que hemos hecho en este libro:

Para entender los principios de la perspectiva y de cómo vemos al mundo, ciertos axiomas de la Geometría Euclidiana resultan ser más relevantes: los de *incidencia*. Éstos son el de “trazo de líneas” (*por dos puntos se puede trazar una única línea*) y

el de “paralelismo” (*en un plano, por un punto fuera de una línea pasa una única paralela, es decir, que no la toca*). Con ellos, y sin necesidad de incluir nociones métricas, es decir, sin tomar en cuenta a los otros axiomas, se puede **extender** el Espacio Euclidiano añadiéndole puntos para definir al Espacio Desarguesiano y, a partir de esta construcción teórica que debemos a Desargues, nos arrancamos: pasamos por la armonía, las curvas-A y las superficies regladas para llegar hasta la descripción a la *Klein*, o *Kleiniana*, de la geometría hiperbólica, como algo que surge al escoger cualquier curva armónica, gracias a la poderosa propiedad de polaridad que éstas cumplen.

Lo que queremos hacer ahora es ver que dentro de esta extensión o desarrollo teórico de la Geometría Euclidiana que es la Geometría Proyectiva, podemos volver a describir a la primera en términos muy generales pero con el mismo espíritu Kleiniano con que describimos a la Geometría Hiperbólica. Además, convendrá hacerlo con sumo cuidado, pues redundará en la definición de la tercera geometría rígida plana.

4.3.1. El plano euclidiano

4.4. El Plano Proyectivo Rígido

4.5. *¿Y la unicidad, Apá?*

# Capítulo 5

## Teoremas clásicos

- 5.0.1. El Teorema de Pappus
- 5.0.2. El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal
- 5.0.3. El Teorema de Pascal