Experiencias personales y sus implicaciones en la enseñanza de las Matemáticas

José Luis Abreu León

Instituto de Matemáticas (IMATE), U.N.A.M.
Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa (LITE)

México

Tres proyectos educativos en los que participé:

1) 1966-1967. Mecánica, 1er año Fac. Ciencias, UNAM.

2) 1971-1973. Cálculo I,II,III y IV, Fac. Ciencias, UNAM.

3) 1998-2012. Proyecto Descartes, M.deEd., España.

1) 1966-1967. Mecánica, 1er año Fac. Ciencias, UNAM.

Unos 60 alumnos,

Examen de 10 minutos tres veces por semana

Entrega de calificaciones y revisión de examen al día siguiente.

Total: unos 120 problemas de examen planteados, enfrentados bajo presión, calificados y discutidos, todo esto aparte de la clase diaria de 30 minutos.

2) 1971-1973. Cálculo I,II,III y IV, Fac. Ciencias, UNAM.

Más de 300 alumnos en clase de auditorio con 2 profrs.

8 ayudantes, 12 correctores y un coordinador (muy duro)

Tareas diarias, exámen cada 4 semanas

2 enfoques: “epsilon-delta” vs. “aplicaciones”

3) 1998-2012. Proyecto Descartes, Ministerio de Educación de España.

Unos 1000 profesores de nivel medio

Se creó un software (Descartes) para los maestros

Se impartieron cursos de Descartes

Los maestros crearon cientos de UUDD

A los 5 años se generaliza el uso de las UUDD en el aula.

¿Qué tienen en común estas experencias?

Quienes más aprendieron fueron quienes se suponía estaban enseñando:

1) El ayudante de Mecánica

2) Los ayudantes y correctores de Cálculo

3) Los maestros del grupo Descartes.

Dejemos estas experiencias en la memoria
y dediquemos unos minutos a definir:

Matemáticas

algo imprescindible si pretendemos
hablar con sensatez sobre su enseñanza

Para ello recurrimos a:
una ***etimología***,
al ***sentido común*** y
a una ***autoridad indiscutible***

"*Matemática*" viene del griego

"**mathemata**",

que significa:

lo que se puede aprender y enseñar,
porque es racional y comprensible.

Ejemplo de matemáticas para ilustrar esta definición.

Pregunta: Consideremos un tablero de ajedrez (de tamaño 8x8) mutilado, al que se la han quitado dos cuadros (de 1x1) diagonalmente opuestos. ¿Se puede cubrir ese tablero mutilado con fichas de dominó de tamaño 2x1, de manera que cada ficha cubra exactamente dos cuadros del tablero?

Respuesta: No, no se puede.

Saber que **no** se puede sería lo único que se necesitaría para una hipotética aplicación. Pero ese saber no constituye un hecho matemático. Lo que es un hecho matemático es la prueba, la *demostración* racional de tal imposibilidad.

Solución. Puede resultar muy difícil encontrar la demostración sin una clave o idea que indique un camino para aproximarse a ella. Hé aquí tal idea, en forma de pregunta:

Idea: ¿De qué color son los cuadros que se le quitaron al tablero?

En realidad no importa si son blancos o negros, lo importante es que son iguales. Inmediatamete nos damos cuenta de que una ficha cubre dos cuadros de distinto color y por tanto, sin importar cuántas fichas coloquemos, siempre nos faltarán por cubrir dos cuadros más de un color que del otro. O sea que no es posible cubrir exactamente el tablero mutilado con las fichas de dominó.

¡Hemos resuelto el problema matemáticamente!

¿Qué quiere decir que hemos resuelto el problema matemáticamente?

Ahora ya sabemos que es imposible cubrir el tablero, pero lo verdaderamente maravilloso es que nadie podrá convencernos de que puede hacerlo, **sabemos** que eso es imposible. Hemos descubierto una verdad ndudable, y hemos llegado a ella por medio de la razón, es una verdad inmutable y de la que podemos convencer a otros, usando precisamente la razón. Éste es un hecho matemático. Hemos hecho matemáticas.

Sin embargo... ¿dónde están los axiomas, las fórmulas y los números, todas aquellas cosas con las que se suelen identificar las matemáticas?

El **sentido común** y

La Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales:UNAM-SigloXXI (2010)

dice que las Matemáticas provienen de tres fuentes creadoras, que son:

1. La actividad humana
2. El estudio de la naturaleza
3. El estudio de las propias matemáticas

La **actividad humana** genera conceptos y herramientas matemáticas útiles para abordar las situaciones problemáticas de la vida cotidiana (en el comercio, la agricultura, la construcción, la navegación, la comunicación, etc.) Esto da lugar a las ***matemáticas aplicadas***.

La **naturaleza** parece, según Galileo, un libro abierto escrito en lenguaje matemático. Muchos aspectos de la naturaleza, especialmente los que estudia la Física, se comportan “matemáticamente” y esto ha llevado a la creación de conceptos y herramientas matemáticas muy poderosas específicamente desarrolladas para ***comprenderlos***.

Finalmente, **el interés** por entender los propios modelos, conceptos y herramientas **matemáticas**, lleva al planteamiento de nuevos problemas y a la creación de nuevos conceptos, herramientas y métodos matemáticos que pueden identificarse como las ***matemáticas puras***.

La autoridad.

Félix Klein, en su libro:

Matemática elemental desde un punto de vista superior

dice los siguiente:

(Parafraseando, porque son citas largas)

Muchos piensan que se podría y debería enseñar la matemática con un método exclusivamente deductivo empezando con axiomas y deduciendo todo lo demás por lógica. Este proceso no se corresponde con el desarrollo histórico de las matemáticas. En realidad éstas se han desarrollado como un árbol que al mismo tiempo que sus ramas y hojas se extienden hacia arriba, sus raíces penetran más profundamente en el suelo.

Respecto a las matemáticas puras y aplicadas, en la escuela las aplicaciones acompañan desde un principio a la aritmetica de manra que el alumno no solo comprende las reglas sino que hace algo con ellas. ¡Y así debería ser siempre en la enseñanza de las matemáticas! Las relaciones lógicas son como el esqueleto de un organismo. Pretender ognorar las aplicaciones de las matemáticas equivaldría a querer buscar la esencia de un organismo vivo únicamente en su esqueleto, sin tener en cuenta los músculos, los tejidos y los instintos, que son la parte más viva del animal.

En la investigación científica se produce ciertamente una división entre ciencia pura y aplicada, pero cuando esto ocurre debe procurarse que las relaciones entre ambas se conserven para que el desarrollo de la ciencia sea sólido. En todo caso, y hay que hacer énfasis en ello, en la escuela es imposible tal división del trabajo y la especialización de cada profesor no es posible.

Experiencias personales
y enseñanza de las matemáticas

Respecto a la teoría de conjuntos... ¿Qué parte puede enseñarse en los colegios? Hay que protestar ante la posibilidad de presentar cosas tan difíciles y abstractas a los alumnos *demasiado pronto*. La ley fundamental de la biogenética dice que el individuo en su desarrollo recorre en rápida sucesión todos los estados del desarrollo de la especie. En la enseñanza de las matemáticas, al igual que en cualquier otra disciplina, se debe seguir este modelo en su forma general. La enseñanza debe guiar a la juventud lentamente hasta llegar a los temas más difíciles y finalmente a lo abstracto, siguiendo el camino por el que la raza humana ascendió.

El inconveniente fundamental para la difusión de este método tan natural es la falta de conocimiento histórico.

Experiencias personales y enseñanza de las matemáticas

Otra autoridad, no tan indiscutible como Felix Klein, pero con cierto peso en el medio matemático mexicano, El Dr. Luis Montejano, exdirector del Instituto de Matemáticas, hace una bella descripción de lo que es hacer y enseñar matemáticas:

Tener vivencias matemáticas, vivir la experiencia de estudiar un problema, entenderlo, buscar afanosamente una solución y finalmente, después de un gran esfuerzo, encontrarla. Y luego transmitirla a otros, mostrándoles no solo la solución sino las dificultades en cada paso del proceso que llevó a encontrarla.

En vista de todo lo anteriormente “acordado”, ¿qué está mal en la enseñanza de las matemáticas en México?

Muchas cosas

Hablemos de algunas.

La formación de maestros de enseñanza básica está inclinada a lo pedagógico con muy poco contenido científico y matemático, ni siquiera a nivel histórico o cultural.

Las matemáticas son útiles en muchos aspectos del mundo moderno y tienen una larga y rica historia llena de anécdotas sorprendentes y logros extraordinarios en asociación con la Ciencia, especialmente con la Física.

Sin embargo estos hechos no se reflejan en los programas de estudio ni de matemáticas no de Física. Cada uno tiende a esquivar el otro.

Las licenciaturas de matemáticas de todo el país forman unos cuantos investigadores y cientos de profesores renuentes que entran al oficio por necesidad y no por vocación.

No hay una sola institución que forme maestros de matemáticas para el nivel medio ni para el superior. El tema se aborda con diplomados y maestrías más pedagógicas que científicas que no pueden resolver el problema de base.

¿Pero cuál es el problema de base?

En la comisión sobre el problema de las matemáticas en la UNAM, hemos llegado a una conclusión:

Ni maestros ni alumnos pueden enfrentar y resolver (mucho menos plantear) problemas “reales” en los que hace falta usar un sistema de ecuaciones lineales, una ecuación de segundo grado, la ley de las proporciones o el teorema de pitágoras; a pesar de que conocen esos teoremas y saben resolver ecuaciones cuadráticas y sistemas. Es decir:

No saben ***usar*** las matemáticas que “saben”.

Lo mismo pasa con la trigonometría que hace 50 años era materia obligatoria de una año entero que se ocupaba en plantear y resolver cientos de problemas “aplicados”, aprendiendo que las matemáticas son útiles y poderosas al mismo tiempo que el alumno practicaba lo que había aprendido el año anterior sobre manipulación de ecuaciones, y si no lo había aprendido, lo aprendía en el momento porque era necesario para seguir adelante.

Propuestas (estudiándose en la comisión de la UNAM):

1) Crear una carrera de profesor de matemáticas para nivel medio y superior, de cuatro o cinco años.

2) Definir estándares de salida del bachillerato (y programas de estudio consecuentes) que incluyan de manera importante el uso de las matemáticas básicas, incluyendo trigonometria. (Esto está en proceso)

3) Otorgar el diploma de bachiller al estudiante solo si ha superado una prueba de acuerdo a los estándares del punto 2).

A modo de Apéndice...

Diferencia entre las matemáticas y otras ciencias

Las matemáticas difieren de las otras ramas del saber en su objeto de estudio: “**lo que se puede aprender y enseñar porque es racional y comprensible**” es algo bien definido y diferente del objeto de estudio de cualquier otra ciencia o rama del saber. Por ejemplo **Física** viene de physis, **naturaleza** e -ica,ciencia, es decir la ciencia de la naturaleza. **Biología** viene de bios **vida** y logos tratado, el estudio de lo vivo. La palabra **Química** tiene un origen más controvertido, pero a la larga significa algo así como ciencia de las transformaciones íntimas de la **materia**.

El objeto de estudio de la **Psicología** es cómo funciona la **mente** humana. El de la **Pedagogía**, es la educación del **niño**. La **Didáctica** se ocupa de lo relativo a la **enseñanza** y es algo muy cercano a las matemáticas, pero no se ocupa de *lo que se puede enseñar* solo de **cómo enseñarlo**. La **Lógica** es el estudio de la **razón** y también es muy cercana a las matemáticas, pero sólo estudia el razonamiento y no aquello sobre lo cual se razona. El buen uso de la razón es necesario para conocer lo que se puede entender, pero en las matemáticas la razón se aplica a algo, no se estudia a sí misma como en la lógica.

"***Lo que se puede aprender y enseñar porque es racional y comprensible***" señala abstracciones, si, pero no al vacío como afirman quienes niegan que las matemáticas son ciencia.