Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM

Grupo de trabajo sobre los
estándares de matemáticas
del
SUMEM

16 de mayo de 2016

Prefacio

Ante las numerosas evidencias de deficiente desempeño de los estudiantes en sus estudios de matemáticas, el Rector de la UNAM, Dr. José Narro Robles, decidió enfrentar el difícil reto que plantea este problema de gran trascendencia académica. Para ello convocó a académicos especialistas en el tema, a formar grupo de trabajo amplio y representativo bajo la coordinación del Secretario de Desarrollo Institucional, Dr. Francisco Trigo Tavera. La complejidad del problema motivó la creación del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM), por acuerdo del señor Rector del 12 de septiembre de 2013. Se trata de una organización de carácter permanente que ha estado coordinada desde su inicio por el Dr. Manuel Falconi Magaña, y cuya función es trabajar de manera continua en la mejora de la educación matemática en la UNAM.

El problema tiene muchos aspectos: métodos de enseñanza, formación y situación laboral de los maestros, preparación previa de los estudiantes, planes de estudio, necesidades curriculares de las licenciaturas, etcétera. Pero una cuestión clave es:

¿qué deben aprender los estudiantes y por qué?

La búsqueda de una respuesta llevó a la formación de un grupo de trabajo para establecer los estándares de matemáticas para el Bachillerato de la UNAM, el cual produjo este documento.

El mundo ha cambiado mucho en los últimos cincuenta años y así también su relación con las matemáticas. Durante ese lapso lo importante fue dominar una tecnología matemática, para realizar los cálculos que resumían el trabajo de muchas generaciones de científicos y matemáticos. Ahora son las computadoras las encargadas de la tarea.

En el mundo moderno el ser humano debe enfrentar situaciones que requieren de la capacidad de crear y manipular abstracciones matemáticas en situaciones y contextos nuevos y diversos. Sorprende, por tanto, que casi no se hayan modificado los contenidos de los planes de estudio de las matemáticas. Urge adaptarlos a los cambios que caracterizan a esta época variando el enfoque y el énfasis en los distintos temas, e introduciendo nuevos conceptos.

Cambiar los contenidos de las matemáticas va a ser difícil. Después de varias generaciones de maestros que enseñan lo mismo que les enseñaron a ellos, se ha creado la idea de que en este campo no hay otro camino que el directo y estrecho a prepararse para las ”matemáticas superiores”. Así las cosas, sólo se pueden modificar la rapidez con que se avanza y el vehículo en el que se transita (el enfoque didáctico). No hay atajos ni nuevos parajes que transitar como tampoco otras metas que alcanzar. Sin embargo, las matemáticas son amplias y variadas: constan de muchos temas independientes pero interrelacionados, lo cual permite recorrerlas siguiendo multitud de rutas. Han cambiado asimismo las razones que hay para aprenderlas, al igual que las maneras de usarlas y apreciarlas.

El objetivo de este documento es atender a estos cambios y aportar ideas sobre qué contenidos matemáticos deberían enseñarse en el Bachillerato de la UNAM y por qué.

José Luis Abreu
Javier Bracho

Julio de 2015

Índice general

Introducción

El Grupo de trabajo sobre los estándares de matemáticas forma parte del Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática en la UNAM. En este documento se definen los contenidos y enfoques que este Grupo recomienda respecto de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato de la UNAM.

Estas recomendaciones son el resultado de más de dos años de trabajo en seminarios y discusiones con profesores de matemáticas de varias escuelas y facultades. El documento toma en cuenta tanto las ideas vertidas en el libro del SUMEM: *Consideraciones para la mejora de la educación de matemática en la UNAM*, como las extraídas de las discusiones realizadas durante los talleres sobre estándares que se llevaron a cabo durante el año 2014 con la participación de decenas de profesores de bachillerato.

El documento consta de tres partes:

1) Filosofía. Se explican aquí las ideas fundamentales, tales como la importancia de usar ejemplos significativos, de tomar en cuenta el origen histórico de los conceptos y teorías, de hacer énfasis en la comprensión y el razonamiento por encima del aprendizaje de procedimientos y, sobre todo, la de que el estudiante desarrolle aprecio por las matemáticas y adquiera un sentimiento de apropiación de sus contenidos y sus métodos. Es indispensable fomentar una actitud positiva ante las matemáticas presentando preferentemente contenidos interesantes y significativos.

2) Estándares. Se enumeran los estándares que definen los contenidos y competencias sugeridas, especificando la importancia cultural y práctica de cada tema. Los estándares se presentan en un orden que sugiere abordar los contenidos de manera integrada, situándolos en su contexto científico, cultural e histórico, y mostrando las relaciones entre las distintas áreas y aspectos de las matemáticas. Se destaca la importancia de incluir ejemplos y problemas que representen retos particularmente atractivos e interesantes, e ilustren el poder y la generalidad del pensamiento matemático, evitando caer en pesados desarrollos de carácter puramente técnico.

3) Conclusión. Aquí se discuten los estándares comparándolos con lo que se ha venido enseñando tradicionalmente y explicando las razones por las que se incluyen algunos temas nuevos y se recomiendan enfoques diferentes.

Además se abrió el sitio web

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/

en el que de manera continua se irán publicando materiales de apoyo que ilustren los contenidos propuestos y sugieran maneras convenientes de abordarlos.

Colaboradores

Este documento fue elaborado por el Grupo de trabajo sobre los estándares de matemáticas del SUMEM, integrado por las siguientes personas:

José Luis Abreu León	*Instituto de Matemáticas*
Norma Patricia Apodaca Alvarez	*IIMAS*
Javier Bracho Carpizo	*Instituto de Matemáticas*
Manuel Falconi Magaña	*Facultad de Ciencias*
Eugenio Fautsch Tapia	*Facultad de Química*
Mucuy-Kak del Carmen Guevara Aguirre	*Facultad de Ciencias*
David Hernández Pérez	*CCH Sur*
Manuel Hernández Rosales	*Secretaría de Desarrollo Institucional*
Hugo Mael Hernández Trevethan	*CCH Vallejo*
Eugenia Marmolejo Rivas	*Facultad de Ciencias*
Andrea Irma Miranda Vitela	*CCADET*
Sergio Rajsbaum	*Instituto de Matemáticas*

Agradecimientos

Deseamos agradecer la contribución de las siguientes personas que, participando en las discusiones de los grupos que dieron origen al SUMEM, o en los talleres sobre Estándares de Matemáticas en el Bachillerato realizados durante el año 2014, o tras la lectura del manuscrito, compartieron sus experiencias y aportaron las ideas, opiniones y críticas que constituyen la columna vertebral del documento. [1]

Oscar Belman Zurita	*B@UNAM*
Haydee Cruz Bailón	
Hugo Estrada Santos	
Lucio Antonio Hidalgo Ibánez	
Olga Ivonne Jacobson Pinzón	
Juana Yadira León Amaro	
Etelbina López Hernández	
Verónica Palestina Caliz	
Beatriz Rojas Flores	
Mónica Iliana Sánchez Zaragoza	
Magdalena Téllez Pérez	
Lidia Ortega González	CAB
Elizabeth de Haro González	*CCH Azcapotzalco*
Daniel González Murguía	
Alma Delia Leos Hidalgo	
Víctor Rangel Reséndiz	
Leticia Aguilar Pascual	*CCH Oriente*
Javier Francisco Hernández Velasco	
Enedina Pérez Briones	
Víctor Manuel Pérez Torres	
Miguel Ángel Rivera Espinosa	
Miguel Ángel Rodríguez Chávez	
Rafael Solís Pineda	
Juan Humberto Zendejo Sánchez	

[1] En caso de haber una omisión en esta lista, pedimos disculpas a los afectados.

Isabel Patricia Andrea Cafaggi Félix	*CCH Sur*
José Chacón Castro	
Leodegaria de la Cruz Fabián	
María del Rocío Flores Marín	
María Mónica Fuentes Romero	
Jaime Licea Durán	
Fabiola Medina Cabrera	
Bertha Medina Flores	
Carlos Federico Navarro Torres	
María Eugenia Otero Ulibarri	
Rocío Solís Ledesma	
María Teresa Velázquez Uribe	
Susana Victoria Barrera	
Rosangela Zaragoza Pérez	
María del Rosario Alvarado Franco	*CCH Vallejo*
Hilda Garrido Villasana	
Armando Hernández Solís	
Mareel Hernández Trevethan	
Nadia Huerta Sánchez	
César Luna Tejeda	
Lucía Laura Muñoz Corona	
Marco Antonio Santillán Vázquez	
Juan José Rivaud Gallardo	*CINVESTAV*
Teresa Rojano Ceballos	
Lilí Rivas Téllez	*Colegio Madrid*
Marina Kriscautzky Laxague	*DGTIC*
María Gloria García Olguín	*ENP 1*
Armando Calderón Caulliers	*ENP 2*
Raymundo Trejo de Santiago	
Nora Cecilia Chávez Pérez	*ENP 4*
José Perera García	
Edith Zepeda Cabrera	

Pedro Carrillo García Frumencio Facundo de Jesús Balderas Jahel García Silva Jorge Luis González Alanís José Luis Pérez López Marcial Sánchez Paredes Mateo Vázquez Ramírez	*ENP 5*
Yolanda Martínez Suárez	*ENP 6*
Gabriel Gutiérrez García Rosario Santillán Baltazar	*ENP 7*
Silvia Leticia Malpica Flores	*Facultad de Ciencias*
Juan Ursul Solanes	*Facultad de Ingeniería*
María de Lourdes Marín Emilio	*FES Aragón*
José Juan Contreras	*FES Cuautitlán*
Arturo Olvera Chávez	*IIMAS*
Luis Miguel García Velázquez Isabel Alicia Hubard Escalera Ernesto Rosales	*Instituto de Matemáticas*
Roberto Elier	*Jalapa, Veracruz*
Michael Barot	*Kantonal Schule, Schaffhausen, Suiza*
Juan Manuel Estrada Medina	*Posgrado Ingeniería*
Francisco Trigo Tavera	*Secretaría de Desarrollo Institucional*
Francisco Gutiérrez Santos	*UNAM (ex-profesor)*
Marcela de la Concepción Santillán Nieto	*UPN*

Capítulo 1

Filosofía

Por filosofía de este documento, entendemos los problemas que motivaron su confección, las ideas que la guiaron y la concepción de las matemáticas que se usó como marco de referencia.

1.1. ¿Por qué se elaboró este documento?

La razón de que se haya considerado necesario elaborar este documento es el problema que representa el estado actual de las matemáticas en nuestro país, el cual puede resumirse en los dos hechos que siguen:

a) El bajo aprovechamiento de los estudiantes en los cursos de matemáticas, así como los malos resultados en pruebas como las de PISA y los exámenes diagnósticos.

b) El temor, repudio y falta de interés de los estudiantes en una materia cuya importancia en el mundo moderno es innegable y omnipresente.

¿A qué se debe esta situación? y ¿cómo podría remediarse el problema? son las preguntas que enfrentó nuestro grupo de trabajo y que se intentan responder en este documento.

1.2. Creencias erróneas

Hay dos creencias acerca de las matemáticas que son en gran medida las causas de estos problemas:

Creencia 1: Las matemáticas constan de procedimientos para realizar cálculos, y hay que seguir reglas fijas para obtener los resultados correctos.

Creencia 2: Sólo algunas personas tienen capacidad para las matemáticas; la mayoría no puede con ellas.

Ambas creencias son falsas, pero no es de extrañar que se hayan popularizado si examinamos con cuidado los planes y programas de estudio que se han utilizado durante las décadas pasadas, tanto en la enseñanza básica como en el bachillerato y las licenciaturas. En muchos de ellos se presentan las matemáticas como una especie de tecnología inmutable que hay que aprender a manejar sin referencia a su origen, su utilidad o su lógica. Además, justifican los contenidos fundamentalmente en términos de un beneficio para estudios futuros. Es muy difícil interesar a una persona en algo que requiere esfuerzo si sólo se le promete un vago y lejano beneficio. Sin embargo, las matemáticas no son recetas sino ideas, conceptos y razonamientos que sólo a veces se resumen en fórmulas y procedimientos; más que basarse en la memoria se fundan en la razón y el entendimiento. No son monolíticas; al contrario, tienen innumerables puertas que ofrecen varias maneras de adentrarse en ellas. Tampoco son arbitrarias, sino resultado del cuestionamiento y la creatividad humana. Generación tras generación se recrean en la mente de quienes las practican, enriqueciendo en ellos la capacidad tanto de razonar con precisión, como de enfrentar retos y problemas de manera crítica y creativa.

Por otro lado, obtener buenas calificaciones en el manejo de esos procedimientos de cálculo que hemos dado en llamar "matemáticas", se ha terminado por identificar con la inteligencia. Esta idea es perniciosa, pues aleja a los ciudadanos del pensamiento matemático verdadero, que es la herramienta intelectual más importante para el desarrollo científico y tecnológico de la sociedad, y por tanto uno de los pilares de la civilización. Las matemáticas básicas, entendidas como herramienta del pensamiento racional, son accesibles a toda persona normal. Sus métodos y principios fundamentales son claros y simples. La idea de que sólo unos cuantos pueden con ellas es falsa y muy nociva, sobre todo para el desarrollo de un país en el que se ha hecho vox populi la idea de que ”los mexicanos no podemos con las matemáticas”(Carlos Lloret de Mola en su película *De panzazo*).

Es difícil subestimar la importancia de que los ciudadanos de un país dominen el pensamiento matemático, lo conozcan, lo valoren, estén familiarizados con su diversas formas y lo utilicen en su vida diaria. Por ejemplo, en uno de sus informes, la OCDE estima que el nivel de desarrollo económico de México podría aumentar cinco veces si todos sus estudiantes adquirieran el nivel básico de educación, que es el equivalente a 420 puntos en la prueba PISA[1]. El mismo informe señala que, a pesar de que asisten muchos años a la escuela, los estudiantes latinoamericanos han estado aprendiendo mucho menos cada año escolar, que sus pares del este de Asia. Este organismo asegura que lo fundamental para cambiar esta situación es llegar al nivel básico en matemáticas y ciencias, lo cual sentaría una base para un aprendizaje más profundo y una mejor habilidad para interactuar con otras personas.

Resulta, pues, imprescindible que los ciudadanos valoren el conocimiento como algo que tiene gran impacto en el desarrollo económico. Para valorar algo, no hay nada como hacerlo propio. En eso consiste aprender matemáticas: apropiarse de ellas y crear las que cada quien necesite. Hacerlas de uno y hacerlas uno.

1.3. Ideas que guían los estándares

Se dice que el aprendizaje de las matemáticas es una trama de cinco hilos: razón, entendimiento, cálculo, aplicación y aprecio. Juntos construyen lo que puede llamarse competencia matemática. Sabemos que mejorar la competencia matemática de nuestros estudiantes es fundamental para el desarrollo de nuestro país, y creemos que puede lograrse si la enseñanza de las matemáticas se apoya en las siguientes ideas, que son las que guiaron la confección de estos estándares y que fueron concebidas para tejer los hilos de la competencia matemática de nuestros estudiantes.

1) La importancia de usar ejemplos significativos para los alumnos. Gran parte de los temas de matemáticas contenidos en los actuales planes del bachillerato se presentan desentendiéndose por completo de la relación que

[1] *http://www.bbc.co.uk/mundo/noticias/2015/05/150513_educacion_mapas_am*

puedan tener con el mundo real. Se presentan desprovistos de interés práctico y social. Es necesario revertir esta tendencia que presenta las matemáticas como algo que hay que aprender aun sin la menor idea de su utilidad y sin referencia a los retos que las originaron. Es un asunto delicado, pues es fácil caer en la costumbre de sólo enseñar temas con utilidad inmediata, lo cual puede resultar contraproducente. Es bien sabido que la utilidad de las matemáticas casi nunca es inmediata, sino que resulta de profundizar en problemas, crear o encontrar los conceptos y las herramientas adecuadas para comprenderlos y atacarlos y, finalmente, resolverlos aplicando esos conceptos y utilizando tales herramientas. Así, enseñar únicamente ejemplos donde las aplicaciones son muy directas puede conducir a la creencia errónea 1, descrita en la sección anterior, pero considérese que sería más engañoso todavía enseñar matemáticas sin relacionarlas ni siquiera mínimamente con sus aplicaciones.

2) La importancia de tomar en cuenta tanto el origen histórico, como el valor cultural y científico de los conceptos y las teorías matemáticas. En las discusiones con los maestros ha quedado claro en general que parte del desinterés que muestran los alumnos, y a veces los propios maestros, proviene de un desconocimiento del origen, evolución e importancia cultural, científica, social y filosófica de lo que se está estudiando. Los temas de matemáticas que se seleccionan para ser enseñados siempre tienen un pasado importante. Muy rara vez se plantea enseñar a los alumnos contenidos que parecen haber surgido de la nada. Y, con todo, es muy común presentar conceptos matemáticos sin relación con aquello que los hizo importantes. Valga como ejemplo la presentación del cálculo diferencial como una serie de procedimientos para aprender a derivar funciones, sin mencionar por qué la derivada es importante, qué problemas científicos y hasta filosóficos resolvió en cierto momento de la historia, y cómo es que saber de derivadas resulta útil, a través del Teorema fundamental del cálculo, para resolver muchos problemas de aplicación, especialmente en el cálculo de áreas, volúmenes, momentos de inercia, y probabilidades de eventos.

3) La importancia de poner el acento en la comprensión por encima del manejo de procedimientos y fórmulas. El estudiante actual va a desenvolverse en un mundo en el que abunda la información sobre cualquier tema, inclusive la de cómo llevar a cabo tal o cual cálculo, de lo que se concluye que aprender procedimientos resulta poco formativo en la actualidad. Lo verdaderamente formativo es desarrollar la vocación de plantear racionalmente los problemas para entenderlos bien; de aprender tanto a analizarlos como a buscar herramientas y procedimientos para resolverlos. El aprendizaje de procedimientos en la escuela resulta poco útil porque ello significa que se tendrían que asimilar demasiados detalles que, de cualquier forma, están en manuales y cientos de documentos escritos y en multimedia que abundan en Internet. Pero toda esa información que hoy está al alcance de todo mundo sólo será útil si se sabe buscar, evaluar, entender y aplicar a la necesidad del momento. Esto se logra precisamente con una formación que privilegie el razonamiento, el pensamiento lógico, la aproximación crítica y analítica a los problemas, la perseverancia en el trabajo intelectual y la capacidad de buscar ideas y herramientas matemáticas adecuadas.

4) La importancia de tomar en cuenta y aprovechar los entornos social y tecnológico del estudiante. El mundo en el que se mueve actualmente el estudiante va desde las redes sociales hasta los videojuegos, pasando por el acceso a Internet con su gran cantidad de contenidos (muchos de ellos de excelente calidad). Un alumno debe aprender física, química y biología para entender su entorno y poder interactuar con él de manera satisfactoria, pero hoy en día su interacción más frecuente e íntima es con el entorno virtual de los datos, las comunicaciones, los videojuegos y otros sistemas de cómputo. La escuela tiene que cambiar su papel de proveedora de contenidos a formadora de ciudadanos que estén capacitados para seleccionar y aprovechar toda esa información y posibilidades de comunicación. En la actualidad es más probable que un joven músico componga e interprete su música con una computadora que con un instrumento tradicional. La omnipresencia de los sistemas de cómputo en el mundo moderno, hace indispensable que se eduque a nuestros niños y jóvenes de tal forma que sean capaces de entender y adaptarse a este entorno, el cual, pese a ser impalpable es igualmente real y, por su misma naturaleza, abstracto e impregnado de ideas y conceptos matemáticos.

5) La importancia creciente de la computación y la presencia de las matemáticas en ella. Es cada vez más evidente en el mundo contemporáneo la ubicuidad de los dispositivos y sistemas de cómputo, sin cuya asistencia nuestras actividades cotidianas son ya impensables y abarcan casi todos los ámbitos de nuestra vida. Estos sistemas forman hoy parte integral de nuestra experiencia, y son fundamentalmente objetos matemáticos. Como ejemplo podemos mencionar los que controlan los medios de transporte y de comunicación, los de predicción del tiempo, que involucran satélites y sensores, y los que controlan las transacciones financieras o el acceso a bibliotecas digitales y acervos de información. Es este el mundo que debe comprender el estudiante y cualquier ciudadano. Todos estos sistemas usan modelos y métodos matemáticos cada vez más refinados y complejos y es necesario que el estudiante sea consciente de ello. En gran medida la computación es una parte de las matemáticas, lo cual se refleja en estos estándares dado que en varios de ellos se plantean cuestiones relacionadas con la computación.

6) La importancia de dedicar esfuerzos para fomentar en el estudiante una actitud positiva hacia las matemáticas. Quizás sea éste el punto más importante de estos estándares. Los egresados del bachillerato deben salir con una actitud de aprecio y respeto hacia las matemáticas, y con la sensación de que son algo que les pertenece para toda la vida como parte de su cultura, igual que saber leer o apreciar la literatura y el arte. Una sociedad en desarrollo como la nuestra no puede permitir que sus ciudadanos se sientan negados para el razonamiento lógico y el pensamiento matemático. Tanto la educación matemática enfocada a la habilidad para aplicar fórmulas y procedimientos, como el sistema de evaluación que infunde miedo ante los exámenes han generado en nuestra población una actitud negativa hacia las matemáticas, una de las causas directas del bajo desempeño en torno a esta materia.

Es imprescindible revertir esta situación. Para ello hay que especificar en los estándares que al menos parte de la educación matemática debe dedicarse a crear en ellos aprecio, gusto y hasta cariño por las matemáticas. Todos los aspectos de la cultura deben enseñarse de la misma manera, fomentando aprecio por ellos. Una de las características de estos estándares es que sugieren temas que exhiben explícitamente este aspecto y ayudan, en la medida de lo posible, a eliminar el miedo y el rechazo generalizado a esta disciplina. Es importante no caer en propiciar un aprecio artificial, por ejemplo, mediante juegos que divierten pero sólo hacen un uso superficial de los conceptos y las herramientas matemáticas. El aprecio a las matemáticas debe fomentarse enseñando sus fortalezas, su profundidad y sus aplicaciones.

Cualquiera que vaya a ser su futura profesión o actividad, el egresado debe llevarse consigo un recuerdo agradable de las matemáticas y sentir que el pensamiento matemático es una de sus capacidades, de la cual podrá disponer en el momento en que la necesite e incluso recurrir a ella como valioso entretenimiento intelectual.

Gran parte del aprecio por las matemáticas se logra cuando el estudiante adquiere confianza al verse capaz de aprovechar el pensamiento matemático para enfrentar y resolver problemas. Esto sólo se logra dedicando tiempo y esfuerzo. Enfrentar problemas exige mantener vivo el ánimo y aprender a sortear los pequeños fracasos que se dan al ensayar ideas que no dan resultado hasta llegar a una que sí funciona. Es labor del profesor cuidar que el estudiante persevere hasta lograr el éxito y así evitar la frustración que genera inseguridad, miedo y rechazo. Por ello consideramos que se debe buscar un sistema de evaluación que propicie el aprecio por las matemáticas sin infundir temor. Sin embargo, diseñarlo no es uno de los objetivos de estos estándares, como tampoco lo es recomendar métodos específicos de enseñanza. Ambas cosas son tarea de los profesores y hay otras instancias del SUMEM dedicadas a reflexionar sobre ello.

1.4. ¿Qué son las matemáticas?

En esta sección presentamos la interpretación de las matemáticas que ha servido de guía en la elaboración de los estándares.

La palabra matemáticas viene del griego *MATHEMATA* que significa aquello que se puede entender porque es lógico y racional y, por lo tanto, se puede enseñar. Para los griegos las matemáticas eran aquel conocimiento que no era revelado por una divinidad ni provenía de alguna otra fuente de conocimiento ajena al ser humano. Es decir, las matemáticas son lo que el humano puede conocer gracias a su propia capacidad de pensar racionalmente. Aunque en la actualidad esta definición resulte quizá demasiado amplia, la adoptamos aquí como punto de partida.

Una definición puede aclarar el sentido general de lo que define, pero para lograr una descripción operativa es necesario enfocar el tema desde varios puntos de vista. Aquí lo haremos describiendo tres aspectos fundamentales de las matemáticas que en especial consideramos pertinentes para los estándares:

a) Las matemáticas son abstractas y eso las hace útiles.

b) Las fuentes de las matemáticas son tres áreas del pensamiento y dos pasiones del ser humano. Las áreas son la actividad humana, la investigación científica y el cultivo de las propias matemáticas. Las pasiones son la curiosidad y la afición a los desafíos.

c) Las matemáticas producen fundamentalmente tres cosas: modelos, algoritmos y teoremas.

1.4.1. Las matemáticas son abstractas

Todo pensamiento racional implica algún grado de abstracción. La abstracción consiste en extraer propiedades simples de algún sistema y construir mentalmente conceptos con esas propiedades. El proceso de abstracción en la evolución de la humanidad no se dio primero en las matemáticos sino en el lenguaje ordinario, y es precisamente nuestra capacidad para adquirir el lenguaje y usarlo para comunicarnos lo que ha formado en nuestro cerebro la capacidad de construir abstracciones y utilizarlas en nuestro beneficio. El concepto de *mesa* es una abstracción, al igual que lo es el de *hijo*, *vecino*, *rojo*, *color*, *perro*, *animal*, *mamífero*, *ser vivo*, etcétera. Cada uno de los conceptos que manejamos con el lenguaje es siempre una abstracción. Hay abstracciones de distinto nivel. *Perro* es menos abstracto que *cuadrúpedo*, *pino* es menos abstracto que *árbol*, y *árbol* es, a su vez, menos abstracto que *vegetal*. *Pelota* es menos abstracto que *esfera*, y *esfera* es menos abstracto que *cuerpo sin esquinas*. *Los cinco dedos de mi mano izquierda* son menos abstractos que el *número cinco*, y éste es menos abstracto que el concepto general de *número*.

Los conceptos matemáticos no son más que algunas de las abstracciones que aparecen inicialmente en el lenguaje natural, pero que luego se van refinando y generando abstracciones de mayor nivel. Los primeros conceptos matemáticos constan de abstracciones cuyas propiedades son mucho más simples que las que manejamos en el lenguaje ordinario. Por ejemplo, la *esfera* es muy sencilla, sus propiedades son pocas y muy claras. Una *pelota*, en cambio, es mucho más compleja que una *esfera* abstracta, está hecha de un material concreto, tiene muchas pequeñas irregularidades, tiene un olor, es de uno o varios colores, tiene un tamaño y probablemente un dueño. La esfera no tiene ninguna de esas complicaciones, su única propiedad es la de que todos sus puntos están a una misma distancia del centro. A cambio de esta simplicidad extrema, el concepto pierde concreción, en el sentido de que no podemos tocar, señalar, patear, ni oler una *esfera*. Al construir el concepto de *esfera* ganamos simplicidad y perdemos concreción. Y ésta es la esencia de las abstracciones matemáticas: son objetos que no tienen una realidad material, pero en cambio son muy simples y sus propiedades están definidas de manera clara y sin ambigüedades. Y es gracias a esa simplicidad que los podemos conocer y manejar con absoluta certeza y precisión.

Gracias a ello el pensamiento matemático puede ser muy riguroso y ofrecer conclusiones absolutas. Su contraparte, el pensamiento no matemático, trata de objetos o conceptos que no están bien definidos y cuentan con muchas peculiaridades que no siempre se mencionan explícitamente. Es difícil o más bien imposible conocer algo seguro en tales condiciones. Por ejemplo, si lanzo una pelota al aire y la dejo rebotar, puedo predecir más o menos dónde va a caer y dónde se va a detener, pero debido a cosas incontrolables como sus propias irregularidades, las del suelo, el viento que puede soplar y la posibilidad de que alguien pase y la patee proyectándola en otra dirección, nunca puedo saber con absoluta seguridad a dónde irá a parar. Pero si en lugar de una pelota pienso en una esfera perfecta que se lanza a un aire en reposo absoluto y conozco sus propiedades de elasticidad y la resistencia del aire, y sé que el suelo es perfectamente plano, entonces sí puedo predecir con exactitud a dónde va a ir a parar la esfera. Gano seguridad, pero pierdo cercanía con la realidad. Tales esfera, aire y suelo ideales no existen en el mundo real, pero mi conocimiento sobre ellos es total y puedo hacer predicciones perfectas sobre su comportamiento.

Pero si las matemáticas tratan de abstracciones puras, ¿cómo pueden ser útiles?

El lenguaje natural trata siempre con abstracciones y es muy útil. Igual sucede con las matemáticas, cuya utilidad radica en que puede llegar a conclusiones seguras sobre entes abstractos que se parecen, en lo esencial, a determinados objetos reales. Tales conclusiones pueden decirnos mucho sobre el mundo real. Las abstracciones matemáticas pueden ser de cualquier tipo, pero en la práctica los matemáticos y los científicos usan preferentemente aquellas que representan partes de la realidad. Por ejemplo, representan el sistema solar como puntos que giran alrededor del Sol, y gracias a ello han descubierto que sus órbitas son elipses. ¿Lo son en realidad? Pues sí y no. Los planetas no son puntos, ni siquiera esferas, sino cuerpos grandes e irregulares y por tanto resulta imposible hablar con absoluta propiedad y precisión de sus trayectorias. Sin embargo, las trayectorias de esos puntos abstractos con los que representamos a los planetas son definitivamente elipses. Se da aquí una extraordinaria y muy íntima relación entre los objetos matemáticos que hemos creado para representar el movimiento de los planetas con el comportamiento de los verdaderos planetas, esas bolas enormes que están allá en el espacio y giran alrededor del Sol. Esa relación es suficientemente cercana para ofrecernos consecuencias lógicas de utilidad práctica y es un claro ejemplo de por qué las abstracciones matemáticas son útiles e importantes.

Hemos comprobado en infinidad de situaciones que somos capaces de construir abstracciones cuya relación con el mundo real es tan cercana, que las conclusiones que obtenemos de ellas son tremendamente útiles para ayudarnos a entender y, a veces, hasta controlar el mundo material. El pensamiento matemático nos permite conocer con precisión absoluta cómo se comportan los objetos abstractos, y ese comportamiento nos da información muy pertinente sobre nuestra realidad. Es aquí donde la famosa sentencia de Galileo Galilei resulta tan reveladora. Nos referimos a aquella en la que dice (parafraseando) que *el universo es un libro abierto que podemos leer si aprendemos el idioma en que está escrito, el cual es el de las abstracciones matemáticas*.

Para dar un ejemplo más de la relación entre abstracción y realidad, consideremos las orillas de un río, que representamos por dos rectas paralelas, y algunos objetos que están en una y otra de sus orillas, los cuales representamos por puntos. Supongamos que estamos en una de las orillas. Entonces podemos medir las distancias entre los objetos que están en nuestra orilla y también podemos medir los ángulos que abarcan los objetos-puntos de la otra orilla desde los de la nuestra. Mediante razonamientos matemáticos podemos determinar la anchura del río y las distancias entre los objetos que son inaccesibles desde nuestro lado del río. Ningún río tiene anchura fija, ni sus orillas son rectas ni los objetos en sus riberas son puntos. Sin embargo, los cálculos que hacemos nos dan resultados útiles.

Por eso se usan las matemáticas y por eso se han usado desde la antigüedad remota: porque son útiles, a pesar de que se ocupan de objetos y conceptos totalmente abstractos, o más bien, precisamente por eso.

Hay muchos otros ejemplos de abstracciones y razonamientos matemáticos que nos permiten conocer con absoluta seguridad sus propiedades, lo cual nos brinda un adecuado conocimiento de la realidad y un enorme poder sobre ella.

La abstracción es esencial en la computación. Los lenguajes de programación, funcionan por capas de abstracción, desde los más sencillos que controlan los bits y las instrucciones de un microprocesador, hasta los de más alto nivel y más abstractos como los lenguajes orientados a objetos, las bases de datos y las hojas de cálculo. Las computadoras y los programas informáticos se diseñan para manipular abstracciones como números y todo tipo de información. El humano moderno vive en un mundo de información que consta de abstracciones que se almacenan, se codifican y se transmiten utilizando otras abstracciones. Cosas tan cotidianas como una clave de acceso o *password*, la nube y Google son, hoy en día, tan reales como una manzana o una ciudad, y sin embargo son completamente abstractas.

Es importante tener presente esta concepción de las matemáticas tanto al elaborar materiales didácticos como al impartir cursos, para no distorsionar los contenidos matemáticos que se enseñan a los estudiantes.

1.4.2. ¿De dónde vienen las matemáticas?

Entender y apreciar tanto el uso contemporáneo de las matemáticas como su importancia cultural no se limita, al enseñarlas, a enfrentar la pregunta de ¿para qué son útiles? sino también la de ¿por qué se crean, cómo nacen y cómo se desarrollan? Hay que poner esta disciplina en su contexto, el de algo que surge naturalmente del ser humano y a la vez erradicar la idea de que son arbitrarias, divinas o creadas por superhombres. Al mismo tiempo se debe convencer al estudiante de que las matemáticas son producto del pensamiento normal y, por tanto, perfectamente accesibles a cualquier miembro del género humano; es decir, que todo individuo las puede entender y hasta llegar a hacer su propia aportación al caudal matemático de la humanidad. Gracias a estas reflexiones podemos identificar tres áreas del pensamiento y dos pasiones humanas que fomentan el desarrollo de las matemáticas. Las áreas del pensamiento son la actividad humana (productiva y artística), el impulso por comprender la naturaleza y el impulso por entender mejor las propias matemáticas. Las pasiones son la curiosidad y la afición a los desafíos.

La actividad humana

Los principios fundamentales de la aritmética y la geometría, contar y medir, son producto principalmente de la actividad productiva de los seres humanos y se desarrollaron para cubrir necesidades elementales. Pero no olvidemos la relación entre la música y las fracciones que hallaron los pitagóricos, ni la aplicación de la geometría a la pintura por medio de la perspectiva. Estas son apenas unas cuantas muestras de cómo la actividad artística también ha motivado el desarrollo de conceptos y herramientas matemáticos. La vida moderna está llena de avances tecnológicos al grado que es difícil imaginarla sin ellos, y es un hecho que buena parte de esta tecnología se basa en desarrollos matemáticos, tanto de siglos pasados como recientes, e incluso algunos instrumentos matemáticos fueron desarrollados específicamente para ella. Muchos de estos avances fueron motivados por las necesidades y los problemas propios de la vida en sociedad. Con el paso del tiempo, se hicieron indispensables para la vida diaria, y terminaron integrándose a la cultura mínima del ciudadano civilizado. Es el caso de, por ejemplo, el uso del lenguaje estadístico y probabilístico o conceptos informáticos como byte, ancho de banda, programa y codificación.

El impulso por comprender la naturaleza

Otra fuente prolífica e inagotable para el desarrollo de las matemáticas ha sido el tratar de entender, describir y predecir los sucesos de la naturaleza. Es en este sentido que hemos hablado de su "utilidad" en párrafos anteriores al referirnos a Galileo, que las consideró indispensables para satisfacer ese afán por comprender la naturaleza, característico del ser humano, y que ha generado lo que llamamos ciencia. Es claro que el desarrollo de las ciencias impulsa continuamente al de las matemáticas y aquí no hace falta aquí insistir en ello, pero sí en que es algo que debe tomarse siempre en cuenta al enseñarlas.

El impulso por comprender las propias matemáticas

Hay además otra fuente del desarrollo matemático que no se debe soslayar y que son las propias matemáticas. Muchos de sus avances más espectaculares han surgido del trabajo de resolver problemas que ellas mismas se han planteado alrededor de abstracciones ya establecidas. Siendo por necesidad abstractas, parecería que, a la larga, este ensimismamiento las alejaría de la realidad. Muy por el contrario, la historia ha demostrado que muchas ideas matemáticas creadas en este espíritu se han convertido en herramientas útiles para entender fenómenos y resolver problemas de la ciencia o de algún aspecto de la actividad humana. El ejemplo clásico es el de las curvas cónicas que fueron estudiadas en la antigua Grecia por el mero interés en ellas mismas, por conocer y entender sus propiedades. Y he aquí que veinte siglos después resultan ser la herramienta perfecta para describir el movimiento de los cuerpos celestes.

La curiosidad y los desafíos

No obstante lo expuesto anteriormente, la fuente de creación matemática más fructífera es la curiosidad innata del humano y la irresistible atracción que siente ante los retos de todo tipo, en especial, los intelectuales. El deseo de resolver un problema, de entender una nueva idea, de que las piezas de un rompecabezas caigan en su sitio es, quizá, la motivación individual más profunda y el motor más potente que hay detrás de los grandes y de los pequeños avances matemáticos. Hay que lograr que en los estudiantes nazca la curiosidad por las cuestiones matemáticas y hay que plantearles retos matemáticos que les lleven a descubrir la emoción que se experimenta al resolverlos.

Uno de los grandes errores que pueden cometerse en la educación del individuo es el de enfrentarlo únicamente a tareas simples, sosas, que no constituyen desafíos al raciocinio, a la inventiva, al ingenio. Muchas veces, con la intención de facilitarle la vida al estudiante (y de paso al maestro) y de mejorar los resultados de las evaluaciones, se eliminan de los planes de estudio algunos temas que se les dificultan. Así han desaparecido del currículum los problemas de trigonometría en tres dimensiones, las demostraciones de teoremas de geometría, las aplicaciones del cálculo a la mecánica y muchos otros temas. Pero... “quien no aspira a general, ni a sargento llega”, pues toda concesión a la mediocridad no hace más que fomentarla.

Los estándares de matemáticas deben ser elevados y representar un reto importante para los maestros y para los estudiantes. Los estándares de bajo nivel provocan desinterés e indudablemente no ayudan a elevar el desempeño. Lo que plantean los estándares objeto de este documento es proponerse el ideal de que los egresados del Bachillerato de la UNAM sean los mejores del mundo en matemáticas. Para alcanzar tal finalidad, de nada sirve bajar el nivel ni hacer más blandos o más duros los exámenes. El único medio para conquistar tal meta es lograr que los estudiantes se apropien del pensamiento matemático y aprendan a usarlo y a disfrutarlo.

1.4.3. ¿Cómo son las matemáticas?

Sus productos

A grandes rasgos se puede decir que las matemáticas constan fundamentalmente de conceptos con los cuales construimos ***modelos***, demostramos ***teoremas*** y diseñamos ***algoritmos***.

Los **modelos** son abstracciones de algún aspecto de la realidad inmediata, de la naturaleza o de otras abstracciones.

Los **teoremas** son consecuencias o verdades acerca de los conceptos implícitos en un modelo, las cuales pueden deducirse por razonamiento lógico de los postulados (o axiomas) del modelo.

Los **algoritmos** son procedimientos que permiten calcular u obtener cierta información a partir de otra, siempre dentro de un modelo.

No profundizaremos en estas ideas, ya que el objetivo de esta sección no es definir detalladamente lo que son los distintos productos o componentes de las matemáticas, cuyas fronteras muchas veces son difusas. Sólo pretendemos señalar algo evidente: que las matemáticas no constan únicamente de procedimientos o algoritmos que el estudiante deba aprender a aplicar; que tampoco constan sólo de teoremas y sus demostraciones; ni únicamente de modelos abstractos sobre algunos aspectos de la realidad. Las matemáticas son, más bien, una combinación de los tres aspectos citados y, para conocerlas y entenderlas, es necesario practicar todas las modalidades de la actividad matemática, comprender su importancia y sus relaciones recíprocas.

El estudiante debe adquirir la capacidad de especificar, con todos sus pormenores, el método para solucionar un problema, lo cual equivale a describir con precisión un algoritmo. Debe comprender con toda claridad la secuencia de pasos que, seguidos uno a uno, llevan al resultado buscado. Al mismo tiempo debe entender que, a fin de que el algoritmo funcione eficazmente, cada uno de sus pasos debe estar definido con igual precisión y libre de ambigüedades.

Simultáneamente será necesario que entienda y sepa explicar por qué el algoritmo produce el resultado buscado. También será indispensable que sepa analizarlo desde el punto de vista de su factibilidad y eficiencia. Aquí tendrá que comparar su algoritmo con otros igualmente capaces de hacer el mismo trabajo, considerando el tiempo y el esfuerzo requeridos para aplicarlos.

La capacidad de crear un modelo matemático específico para resolver un problema es como las dos caras de una moneda: por un lado puede limitarse a elaborar un esquema que permita idear una ecuación y por el otro, servir de base para formular toda una teoría científica. Es imprescindible, pues, que los estudiantes de bachillerato adquieran la capacidad de crear modelos abstractos que les permitan entender y analizar situaciones concretas. Deben aprender a darles nombre a los conceptos que creen, definir sus propiedades y decidir si es o no pertinente a lo que se desea modelar, tarea que puede y debe practicarse en distintos niveles. Se puede empezar con los problemas tradicionales (que son casi simples ejercicios), en que se dan los datos de una situación concreta y se espera que el estudiante reconozca un modelo adecuado para tratarla y que utilice los datos recibidos para obtener un resultado. A continuación se puede pasar a situaciones de mayor complejidad, que requieran, por ejemplo, la determinación de datos que no aparecen en el planteamiento del problema. Seguidamente podrá enfrentarse a problemas con datos desconocidos, lo que incrementa el grado de abstracción en el que hay que desenvolverse. Y más adelante aún afrontará situaciones en las que no hay problemas bien definidos y, por consiguiente, tendrá que investigar, analizar y proponer modelos abstractos que representen una situación dada y ayuden a entenderla.

En este tipo de actividad hay que tener clara la idea de modelo y los conceptos de hipótesis y tesis. Hay que entender lo que es una demostración racional y lógica, saber construirla y saber analizar y criticar una demostración que alguien proponga. Es importante saber que los resultados obtenidos por razonamiento lógico en un modelo sólo se aplican al modelo abstracto; la realidad puede comportarse de manera diferente y por tanto lo que se obtiene de las matemáticas, a pesar de que debe ser conocimiento indudable sobre el modelo, sólo es conocimiento tentativo con respecto a la realidad. Hay que aprender a crear algoritmos, pero también hay que aprender a aplicarlos y a aprovechar la computación cuando convenga.

Sus áreas y niveles de profundidad

Si bien las matemáticas, como cualquier cuerpo de conocimiento, se dividen naturalmente en áreas, estamos convencidos de que en su enseñanza a nivel bachillerato no debe hacer una separación tajante entre ellas, pues su interacción y apoyo mutuo son esenciales para comprenderlas. Más bien, deben presentarse con una **visión integradora** e intentando hacer al estudiante partícipe activo del pensamiento matemático en sus diversas facetas. Ante un problema dado existen varios enfoques posibles y siempre resulta enriquecedor explorarlos. Es muy común que un problema geométrico se transforme, con la notación adecuada, en un problema algebraico; ¿por qué no usarlo como motivación para el álgebra? Las grandes ideas matemáticas influyen en todas sus áreas y, en general, también se nutren de varias de ellas. Por ejemplo, las ideas fundamentales del cálculo tienen raíces claras en las matemáticas griegas que se crearon enfrentando problemas geométricos, y ahora esas ideas son más simples de plantear, comprender y transmitir con el uso de la notación algebraica moderna. Las tres áreas clásicas están presentes, interactúan y se apoyan. Hay que aprovechar la situación (un problema geométrico) para motivar y presagiar lo que viene como tema futuro (el cálculo) y a la vez, para repasar lo que ya se vio (el álgebra). Se deben ver a las matemáticas básicas como un todo que evoluciona en la mente del estudiante, donde cada parte que llega a entender contribuye al desarrollo de las otras.

Por otro lado, cuando se discute nuestro rendimiento en matemáticas es de lo más común que la deficiencias propias se atribuyan a las de ciclos escolares anteriores. Sin duda, hay que tomar en cuenta las deficiencias pretéritas y las presentes, pero siempre con la finalidad de superarlas. La naturaleza misma de las matemáticas nos indica el camino, pues se nutren de cuestionar lo que "sabemos". Ya que no se basan en dogmas sino en el razonamiento crítico, es natural dentro de ellas regresar a revisar sus fundamentos –de hecho, grandes avances históricos se pueden explicar desde esta óptica–. "Repasar" es el término que se usa para dedicar tiempo en clase para ver lo que "ya debería saberse". Es un error recurrir al repaso para remediar una deficiencia heredada de ciclos escolares anteriores. Eso provoca una sensación de estancamiento y de que no hay nada nuevo que aprender. Se pueden abordar los temas de ciclos anteriores con niveles matemáticamente más profundos, en capas más altas de abstracción, de manera que se remedie la deficiencia al mismo tiempo que se presenta algo nuevo. De esta manera se le da oportunidad al estudiante rezagado de reincorporarse a la discusión en curso y se es fiel al principio matemático de entender a base de cuestionar a fondo los fundamentos.

Es importante reconocer que cualquier tema de matemáticas se puede estudiar en varios niveles de abstracción. Los temas propios del Bachillerato se pueden volver a ver en niveles superiores, revisando críticamente sus fundamentos. Por ello es esencial definir con precisión el nivel de abstracción adecuado al Bachillerato. Este es uno de los objetivos de los estándares.

Nota. La concepción de las matemáticas en la que se basan estos estándares y que se ha expuesto en las secciones anteriores, en caso de aplicarse en la elaboración de los planes y programas de estudio del bachillerato, también debería aplicarse a los programas de formación de profesores para que haya coherencia entre unos y otros.

Capítulo 2

Estándares

2.1. Introducción

Definición de Estándares

Los estándares que presentamos en este capítulo se han organizado como una serie de temas junto con las habilidades y competencias que hay que desarrollar en torno a ellos.

La redacción de cada estándar intenta exhibir algún contenido vinculándolo a su origen histórico, a su importancia cultural o científica, al reto que presenta, a sus aplicaciones prácticas o a cualquier otro interés humano que tenga. También se intenta describirlo de manera informal sin recurrir a tecnicismos o estructuras muy elaboradas. No se pretende ser muy precisos ni exponer los contenidos a profundidad. Los estándares son esencialmente descripciones de temas o aspectos de las matemáticas que se recomiendan para que los estudiantes de bachillerato los estudien y a través de ellos aprendan a apreciar el pensamiento matemático.

Para especificar los estándares utilizamos los siguientes elementos:

a) Un nombre corto.

b) Una descripción del tema, indicando su origen histórico, la importancia que tiene en la formación del estudiante y una descripción breve del o de los enfoques recomendados para su enseñanza.

c) Una lista de indicadores, que aclaran cómo puede saberse que un estudiante cumple el estándar. Los estándares pueden servir como guía en la elaboración de pruebas de evaluación.

Para cada estándar se desarrollarán materiales educativos que ejemplificarán los contenidos y algunas formas recomendadas de estudiarlos, descubrirlos, enseñarlos, aprenderlos, adquirir familiaridad con ellos y destreza en su utilización. Estos materiales podrán encontrarse en:

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/

Cabe señalar que hay otras maneras de presentar los estándares de una materia en un ciclo escolar, por ejemplo, especificando competencias a desarrollar en lugar de los temas que hay que conocer y dominar. Hemos decidido presentar estos estándares organizados alrededor de los temas y no a las habilidades o competencias, porque sabemos que cada tema de matemáticas requiere para su comprensión de formas de pensar específicas para el tema en cuestión. Por ello, en matemáticas, resulta más natural describir los conocimientos, habilidades y competencias alrededor de un tema que al revés.

En este capítulo se presentan los primeros tres puntos de cada estándar.

Razones para aprender matemáticas

Las razones principales para aprender matemáticas en el bachillerato son:

1) La importancia de las matemáticas como parte de nuestra cultura,

2) El hecho de que las matemáticas son muy útiles y

3) El hecho de que la formación en matemáticas ayuda a desarrollar el pensamiento racional, tan necesario en cualquier actividad humana y disciplina científica o tecnológica.

Es por estas razones que se han introducido temas de vital importancia cultural, aunque en algunos casos sólo puedan tratarse en este nivel dejando de lado los detalles técnicos. También se han incluido aplicaciones de las matemáticas en varias áreas del conocimiento. Este punto se enriquecerá poco a poco a través de los materiales que se irán publicando como apoyo a los estándares.

Temas nuevos

Algo que influyó mucho en la confección de este temario es la necesidad de integrar en él algunos temas matemáticos relativamente nuevos, que hasta ahora no se han considerado en los planes de estudio. Por ejemplo, las matemáticas discretas, la computación, el tratamiento de la información y, específicamente, la estadística. Estos temas no deben verse como un apéndice ajeno al núcleo central de la materia, sino como algunas de las ramas de las matemáticas con mayor utilidad en el mundo moderno en general, y en particular, en las ciencias tanto naturales como sociales. Por ello no debean relegarse únicamente a materias optativas, antes bien deben tener una presencia clara y sólida en el currículum del bachillerato. Se incluyen también temas de cálculo combinatorio y cálculo de probabilidades, mismos que casi se habían dejado fuera de los programas de matemáticas y que encajan naturalmente en puntos clave con los de la estadística, además de tener sentido e importancia propias.

Cambios de énfasis y enfoque

Una de las modificaciones notables en relación a los programas actuales es que se da un sitio privilegiado a la geometría, la cual estaba prácticamente ausente en los programas del bachillerato. En cambio se reduce el énfasis en el estudio de las ecuaciones de las cónicas en la geometría analítica. También se enfatiza la trigonometría práctica, reduciendo el antiguo énfasis en las fórmulas trigonométricas. En el cálculo se insiste en un tratamiento integrado y conceptual, sin separar el cálculo diferencial del cálculo integral y reduciendo el énfasis en aprender a derivar y a integrar a cambio de ampliar el rango de ejemplos, aplicaciones y creación de modelos para distintos fenómenos aprovechando los conceptos del cálculo.

Por otra parte, se recomienda a los profesores tratar de presentar los temas propuestos a través de situaciones cotidianas que partan de la realidad e inquietudes que los alumnos están viviendo, siempre que esto sea posible, pero sin llegar a rechazar algún tema sólo porque no se encuentra una situación cotidiana que lo ejemplifique.

Aclaraciones acerca de estos estándares

¿Qué estatus tienen?

Los estándares que presentamos aquí son una propuesta. Corresponde a las autoridades universitarias darles (o no) un estatus normativo.

¿Cómo deben interpretarse?

Se pretende que los egresados tengan una idea general de una buena parte del material contenido en los estándares, pero lo importante es que desarrollen el pensamiento matemático. El énfasis que recomendamos al interpretar los estándares debe centrarse en la intención y no en los detalles. Es preferible que el egresado de bachillerato aprecie las matemáticas, sienta que puede usarlas y esté positivamente dispuesto a ello, a que sepa todos los productos notables y los métodos de integración si esto último se logra a costa de que odie las matemáticas, les tema y prefiera olvidarlas en cuanto no tenga que presentar exámenes. Por ejemplo, al estudiar literatura se recomienda leer ciertos libros, pero ninguno de ellos es completamente necesario, lo importante es que el estudiante conozca distintos estilos y épocas literarias y algunas de las obras relevantes en cada caso. De la misma manera, los temas recomendados en los Estándares de Matemáticas deben cubrirse "en general", no necesariamente todos. El objetivo es proporcionar una visión culturalmente significativa de las matemáticas y lograr que el estudiante se interese en ellas y se apropie del pensamiento matemático como una herramienta útil y una parte integral de su cultura como ser humano.

¿Qué cambios proponen?

El Temario que se sugiere en estos Estándares difiere de los actuales programas de matemáticas de los bachilleratos universitarios en varios aspectos. Se ha reducido el énfasis y tiempo dedicado a algunos temas, notablemente las diferentes formas de las ecuaciones de las cónicas y el cálculo de derivadas e integrales. En cambio, se han ampliado otros temas y se han introducido algunos que no aparecen en los programas actuales. Estas modificaciones están justificadas en la filosofía y propósitos de estos Estándares. En particular, se da más importancia a conocer las propiedades de las curvas cónicas y saber encontrar algunos de sus elementos a partir de otros, que a conocer todas y cada una de las distintas formas de esas ecuaciones. También se considera que hoy en día, con la tecnología computacional existente, tiene más sentido conocer con profundidad los conceptos de derivada e integral, saber aplicarlos para modelar fenómenos y saber que es posible recurrir a procesos numéricos computacionales para realizar cálculos, que tener habilidad para encontrar las antiderivadas de un montón de funciones específicas.

¿Cómo pueden describirse en pocas palabras?

Lo esencial de estos estándares es el enfoque que plantean y que consistente en privilegiar la *comprensión* sobre la *habilidad* en la aplicación de procedimientos y *justificar* todos y cada uno de los temas cubiertos en términos de su *origen histórico* y su *importancia cultural y científica*, además de proponer que, en general, al presentarlos vayan acompañados de *aplicaciones significativas*.

2.2. Primera parte

Estándar 1. Los números

Descripción. El estudiante conocerá el origen de los números y cómo la actividad humana fue requiriendo, al paso del tiempo, de un concepto más elaborado de número. Concretamente se dará cuenta de que los números aparecen primero en todas las culturas como parte del lenguaje natural, luego como una necesidad del comercio y más tarde son utilizados en la agrimensura, en la determinación de impuestos, para registrar fechas y eventos en el tiempo y en muchas otras situaciones prácticas. Sabrá que las primeras culturas desarrollaron diversas formas de representar a los números y conocerá las características de los principales sistemas de numeración de la antigüedad: babilonio, egipcio, chino, griego, romano y maya.

Aprenderá estos sistemas, comprenderá su importancia histórica y entenderá tanto las ventajas como las desventajas de cada uno. Así, podrá indicar cuáles permitían escribir cualquier número y aquéllos que estaban limitados en este sentido. Entenderá la importancia del cero en esos sistemas y cobrará conciencia de lo trascendental que fueron para el despegue de la civilización.

Sabrá también diferenciar entre el concepto particular de **los números** específicos, por ejemplo el 25, y el general (más abstracto) de **número**. Comprenderá cómo los sistemas de numeración que permiten escribir cualquier número entero contribuyen a la creación del concepto general de número.

Indicadores. El estudiante describirá los aspectos de la actividad humana que motivaron la creación, y contribuyeron a la evolución del concepto de número en la antigüedad; y también los sistemas de numeración babilonio, egipcio, chino de varillas, griego, romano y maya. Convertirá números enteros positivos simples de un sistema a otro. Indicará las ventajas y desventajas de algunos sistemas de numeración sobre otros.

Estándar 2. El sistema decimal

Descripción. El estudiante desarrollará aprecio por el sistema posicional decimal que usamos hoy día, conocerá su accidentada historia y sabrá que su adopción en Europa, a finales de la Edad Media, fue determinante para que en el Renacimiento se iniciara la Ciencia moderna.

Entenderá cómo y por qué funcionan los algoritmos tradicionales de la suma, resta, multiplicación y división, cuál es el papel del cero y por qué es tan importante. También adquirirá destreza en su utilización a través de problemas, cuya solución requiera la realización de una o varias operaciones con decimales. Tales problemas se plantearán en contextos variados como el comercial (cálculo de precios y descuentos), el bancario (cálculo de los intereses de una hipoteca), cálculo de promedios, etcétera. Se recomienda que tales contextos se sitúen tanto en épocas pasadas, para que el estudiante se de cuenta de por qué ya era conveniente utilizar el sistema decimal, como en el presente para que comprenda que aunque hoy en día las operaciones se realizan mediante dispositivos electrónicos, éstos usan esencialmente los mismos algoritmos.

Indicadores. El estudiante describirá a grandes rasgos la historia del sistema de numeración decimal, su importancia y sus características. Utilizará los algoritmos de las operaciones aritméticas en este sistema para resolver problemas. Realizará las operaciones aritméticas tanto manualmente, es decir, sin el uso de la calculadora, como utilizándola.

Nota. El sistema decimal tiene origen en los numerales que se usaban en partes de la India desde el siglo III. Fue desarrollado y diseminado por muchas regiones de ese país durante el período Gupta (siglos IV-VI). Posteriormente fue adoptado en el mundo árabe, donde se popularizó gracias al libro *Sobre el cálculo con numerales indios* escrito por el matemático persa **Al-Khwarizmi** en el año 825, y a otros como el del matemático árabe **Al-Kindi** titulado *Sobre el uso de los numerales indios*. Durante la edad media fue utilizado ampliamente por los árabes, especialmente en el comercio, actividad en la que los algoritmos, para realizar operaciones con ellos, resultaban particularmente útiles. Fue adoptado en Europa gracias a los esfuerzos de **Leonardo de Pisa (Fibonacci)**, quien habiéndolos conocido en Argelia, escribió en 1202 el libro *Liber Abaci*, en el que explicó detalladamente su utilización y sus enormes ventajas sobre los números romanos que aún se usaban en la Europa de aquella época. La invención de la imprenta, a finales del siglo XV, llevó a la diseminación de este sistema a través de muchos libros y manuales, que se escribieron explicando su utilización. Este hecho fue determinante para que en la Europa del Renacimiento se iniciara la Ciencia moderna. Los primeros numerales decimales tenían un aspecto diferente a los nuestros, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 0, pero fueron evolucionando hasta adquirir su forma actual, que puede verse ya en el libro *Arithmetica práctica* del calígrafo y matemático vasco **Juan de Yciar**, publicado en Zaragoza en 1549.

Estándar 3. Representación gráfica de la información numérica

Descripción. El estudiante cobrará conciencia de que en el mundo moderno estamos rodeados de gran cantidad de información numérica, y de la dificultad de asimilarla recurriendo únicamente a tablas de números. Por ello, la representación gráfica de la información y la habilidad para interpretarla, son necesidades vitales para entender el mundo que nos rodea. Asimismo, conocerá tanto las gráficas de barras como las de sectores circulares, sabrá construirlas a partir de los datos de una tabla e interpretarlas . Aprenderá a distinguir cuándo conviene más una que otra. Identificará los diferentes tipos de variables: *no numéricas*, por ejemplo el color del pelo o la nacionalidad de las personas; *numéricas* discretas, por ejemplo el grado escolar, el año de nacimiento, la edad a la que se contrajo matrimonio; y, esencialmente *continuas*, como la altura, el peso, la renta anual, el saldo de una cuenta bancaria, etcétera. Estudiará también las gráficas de línea y los histogramas. Conocerá, y sabrá calcular, las principales medidas de tendencia central: **Moda** (muy útil en variables no numéricas, menos útil en variables numéricas, sobre todo en las continuas), **Mediana** y **Media** (útiles en variables numéricas).

Indicadores. El estudiante decidirá, dada cierta información, con qué tipo o tipos de gráfica conviene representarla. Será capaz de construir dichas gráficas tanto manualmente como utilizando programas informáticos, por ejemplo mediante una hoja de cálculo. Describirá la Moda, la Mediana y la Media de un conjunto de datos, y las calculará manualmente, utilizando una calculadora y por medio de una hoja de cálculo.

Nota. Las gráficas de sectores y de barras, aparecen gracias a William Playfair a finales del siglo XVIII, quien las usó para presentar información comercial y política de una manera más eficiente que la que se lograba con las tablas. Desde entonces, poco a poco, la representación gráfica de la información numérica se ha venido utilizando cada vez más. En la actualidad aparece todos los días en periódicos y revistas como complemento indispensable del lenguaje escrito.

Estándar 4. Algoritmos

Descripción. El estudiante identificará que los algoritmos fueron una de las primeras manifestaciones del pensamiento matemático en la historia de la humanidad. Los primeros algoritmos eran fórmulas para realizar algún cálculo, como el área de un triángulo y el volumen de una pirámide. Una figura triangulable, motiva de manera natural un algoritmo que usa una fórmula repetidamente, pero que no es en sí mismo una simple fórmula. El método para obtener la o las soluciones de una ecuación de segundo grado es un algoritmo algo más complejo que la fórmula cuadrática que se usa al aplicarlo, ya que debe tomar en cuenta la posibilidad de que haya una o dos soluciones, o ninguna. Las construcciones geométricas con regla y compás, son algoritmos que pueden aplicarse a ciertas figuras geométricas en posiciones bastante arbitrarias. Hay problemas muy sencillos que requieren de algoritmos no triviales para su solución, como por ejemplo ordenar una lista alfabéticamente.

Sabrá que un algoritmo se construye a partir de operaciones simples, que resuelven tareas muy sencillas, junto con instrucciones de control del flujo, que pueden ser condicionales, de repetición, de ramificación y de recursión.

Aprenderá a distinguir y especificar algoritmos que requieren disyunciones como el que se usa para resolver ecuaciones de segundo grado; algoritmos que requieran múltiple repetición, como el del cálculo de un factorial; y algoritmos que requieran recursión, como el de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números.

Indicadores. El estudiante reconocerá a las fórmulas como algoritmos simples y conocerá algoritmos más complejos que requieren disyunción, repetición y recursión.

Nota. El estudiante tendrá ocasión, en el estudio de varios temas, de aplicar algunos algoritmos que no se limitan al uso de una fórmula, como las construcciones con regla y compás. También deberá ser capaz de programar algunos de los algoritmos mencionados, utilizando un lenguaje de programación de uso general como JavaScript.

Estándar 5. Construcciones geométricas doblando papel

Descripción. El estudiante conocerá las construcciones geométricas básicas con doblado de papel, en el que las líneas rectas se definen con dobleces:
a) Dados dos puntos se puede construir una única línea recta que pase por ellos.
b) Dados dos puntos se puede hacer un doblez que los haga coincidir.
c) Dadas dos rectas se puede hacer un doblez que las haga coincidir.
d) Dados una recta y un punto se puede hacer un doblez que pase por el punto y haga coincidir un lado de la recta con el otro.
e) Dados una recta, un punto sobre ella y otro punto cualquier, se puede hacer un doblez que pase por el primero de los puntos y ponga al segundo sobre la recta.

Realizará otras construcciones a partir de las anteriores, como: una recta paralela a otra por un punto dado, un cuadrado dado su lado, un triángulo equilátero, un hexágono regular, un octágono regular, un dodecágono regular y un pentágono regular. También hará desarrollos planos de los poliedros regulares, así como de prismas y pirámides con base poligonal.

Descubrirá la fórmula de Euler para estos poliedros: que la suma del número de vértices y el número de caras menos el número de aristas es 2. Reconocerá lo que es un problema y una conjetura a través de la pregunta ¿Pasa lo mismo en todos los poliedros? Discutirá racionalmente con sus compañeros y con el profesor la plausibilidad de esta conjetura así como posibles demostraciones y contra-ejemplos.

Indicadores. El estudiante reconocerá intuitivamente una diagonal, un vértice, una cara, una arista, una mediatriz, una bisectriz, las rectas paralelas y las perpendiculares, pero también será capaz de:
a) Definir tales propiedades.
b) Dibujar el desarrollo plano de varios poliedros como el cubo, el tetraedro, el dodecaedro, un prisma con base poligonal o una pirámide, también con base poligonal.
c) Ejemplificar lo que es una conjetura, un teorema y un contra-ejemplo, utilizando el caso de los poliedros y la fórmula de Euler.

Nota. El origami o doblado de papel se origina hace mil años en Japón. Se publicarán notas que puedan usarse como guía en este estándar.

Estándar 6. Áreas de figuras poligonales planas

Descripción. El estudiante aprenderá que la palabra *geometría* significa medición de la Tierra, y que el inicio de la geometría ocurrió en la antigüedad en varias culturas, entre ellas en el antiguo Egipto. Dado el curso cambiante del río Nilo, en cuya ribera se desarrollaba casi toda la agricultura de Egipto, era necesario medir y calcular el área de cada parcela una vez al año, con objeto de calcular proporcionalmente el tributo que debía pagarse al Faraón. Esto implicó la necesidad de obtener una medida del terreno, es decir, su área, a partir de su forma y de algunas medidas lineales. Así los egipcios aprendieron a calcular el área de terrenos cuadrados, rectangulares, en forma de paralelogramo, de triángulo, de trapecio y otras formas más complejas cuya área se obtenía partiéndolas en figuras más simples y sumando sus áreas.

Entenderá:
a) Por qué el área de un paralelogramo es igual al área del rectángulo con la misma base y la misma altura.
b) Por qué el área de un triángulo es la mitad de la de un paralelogramo con la misma base y la misma altura.
c) Que la base de un triángulo puede ser cualquiera de sus lados, y que hay una altura correspondiente a cada base.
d) Que cualquier figura poligonal plana puede descomponerse en triángulos, e intentará dar argumentos que lo demuestren.

Descubrirá:
a) Que si una figura plana en forma de polígono, no necesariamente regular, con sus vértices en puntos del plano con coordenadas enteras, tiene como área un valor entero o un entero más un medio, y podrá dar un argumento racional para demostrarlo.
b) Que la medida, es decir el área, de un terreno o de una figura, depende de la unidad de medida lineal que se escoja para medir los lados de la figura.
c) Que el área se define como una propiedad aditiva de las figuras planas, es decir, que si una figura se parte en dos figuras ajenas, el área de la original es igual a la suma de las áreas de las dos partes. Y reconocerá que esta propiedad permite comparar figuras planas por área sin necesidad de calcular los valores numéricos de las mismas. Sabrá que uno de los grandes logros de la geometría griega, fue desarrollar toda una estructura lógica para comparar áreas de

figuras planas, sin calcular sus valores numéricos, como puede observarse en el Libro I de Los elementos de Euclides.
d) La dificultad de calcular el área de figuras planas cuyas superficies son curvas. Enfrentará diversos problemas de aplicación en los que deberá calcular áreas y relacionarlas con otras cantidades.

Indicadores. El estudiante podrá:
a) Explicar por qué el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura con argumentos que la comparen con la de un paralelogramo o un rectángulo.
b) Calcular el área de un polígono plano dadas algunas medidas que permitan hacer una disección en figuras más simples.
c) Resolver problemas planteados verbalmente que requieran el cálculo de áreas y su relación con otras cantidades, como por ejemplo el impuesto que debe pagarse por un terreno, la cantidad de toneladas de maíz que podrían extraerse en una cosecha, el volumen de pintura o impermeabilizante necesarios para pintar una casa o impermeabilizar un techo.

Estándar 7. Volumen de poliedros

Descripción. El estudiante conocerá que en el antiguo Egipto se calculaba el volumen de pirámides y otros cuerpos geométricos, tanto para estimar la cantidad de grano que podían guardar en sus trojes, como la cantidad de material y tiempo de construcción que iba a requerir una construcción. Aprenderá:
a) El concepto de volumen como una generalización del de área, y entenderá por qué el volumen de un prisma es el producto de la superficie de la base por la altura.
b) Que esto no se limita a prismas rectos sino que aplica a los oblicuos y entenderá este hecho como una generalización, en tres dimensiones, de la relación que ya conoce entre en un paralelogramo y el rectángulo con la misma base y la misma altura.
c) Que los egipcios supieron calcular el volumen de las pirámides, tomando la tercera parte del área de la base por la altura. Aunque se desconoce si tenían argumentos racionales para deducir esta fórmula, la usaron correctamente incluso para calcular el volumen de pirámides truncadas, cosa que el estudiante podrá reproducir.

Observará la analogía entre

$$\acute{A}rea = \frac{base \times altura}{2}$$

para el cálculo del área de un triángulo y

$$Volumen = \frac{base \times altura}{3}$$

(donde *base* significa área de la base) en el cálculo del volumen de una pirámide.

Asimismo, aprenderá que el volumen de un cuerpo cuyas dimensiones lineales son el doble de las de otro, tiene un volumen igual a ocho veces el del segundo, y aprenderá cómo utilizar este hecho para plantear una ecuación que demuestre la fórmula del volumen de un tetraedro rectángulo de lados a, b, c

$$V = \frac{a \times b \times c}{6}$$

Entenderá, mediante argumentos racionales, por qué este caso basta para demostrar la fórmula

$$Volumen = \frac{base \times altura}{3}$$

para el volumen de cualquier pirámide con base poligonal.

Enfrentará retos como el de calcular los volúmenes de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro regulares, todo ello utilizando la fórmula para calcular el volumen de una pirámide, pero teniendo que calcular en cada caso áreas de polígonos y alturas de pirámides.

Comprenderá que, a diferencia del caso plano, no siempre es posible descomponer un poliedro en partes que puedan recomponerse en un cubo, y que este resultado apenas se demostró en el siglo XX. Este fue el tercer problema de Hilbert.

Indicadores. El estudiante podrá explicar dónde y cuándo surgió el concepto de volumen, así como la fórmula para calcular el de una pirámide. Calculará el volumen de algunos poliedros descomponiéndolos en paralelepípedos, prismas y pirámides. Resolverá problemas que requieran el cálculo del volumen de una figura, que pueda descomponerse en paralelepípedos, prismas y pirámides, y que requiera relacionar el volumen con otras cantidades, como las toneladas de grano que puede guardar una troje con forma piramidal o el volumen de agua que cabe en un canal de sección trapezoidal.

Estándar 8. El Teorema de Pitágoras

Descripción. El estudiante sabrá que en varias culturas de la antigüedad, se conocieron algunas ternas pitagóricas, es decir números enteros a, b, c que tienen la propiedad de que la suma de los cuadrados de los dos primeros es igual al cuadrado del segundo. Por ejemplo:

3 ,4, 5
5, 12, 13
8, 15, 17
20, 21, 29

son ternas pitagóricas. No ha quedado claro si las ternas pitagóricas conocidas de los antiguos eran identificadas con el Teorema de Pitágoras, pero lo más probable es que sí, y que se usaran de hecho para calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos lados, pues esto era muy útil en la construcción.

No se sabe si Pitágoras mismo demostró el famoso Teorema pero está claro que la primera demostración publicada en el mundo occidental es la Proposición 47 del Libro I de Los elementos de Euclides. Hay muchas demostraciones del Teorema de Pitágoras, y el estudiante conocerá algunas de ellas, incluyendo la de Euclides, que está en el estilo de comparar las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos con la del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Captará varias cosas fundamentales en relación con este Teorema. En primer lugar, notará que establece a la vez una relación aritmética entre los lados de un triángulo rectángulo, y también una relación geométrica entre los cuadrados (entendidos como figuras geométricas y no como números) construidos sobre los lados. Su inverso establece un criterio aritmético para conocer la perpendicularidad de dos lados de un triángulo.

Apreciará que sin duda el Teorema de Pitágoras es el más importante de las matemáticas, no sólo por ser el más conocido y mentado, sino porque de verdad es el resultado más útil de todas ellas. Esto lo conocerá mientras aprende a aplicarlo para resolver problemas prácticos que involucran triángulos rectángulos, y también aprenderá a resolver problemas relativos a los triángulos no rectángulos mediante el recurso de interponer artificialmente triángulos rectángulos auxiliares que permiten usar el Teorema y resolver el problema. Cobrará conciencia de que casi cualquier problema que involucre triángulos puede resolverse casi exclusivamente aplicando este Teorema. Para aprender todo esto, el estudiante enfrentará y resolverá multitud de problemas utilizándolo.

Indicadores. El estudiante podrá:
a) Explicar la importancia del Teorema de Pitágoras.
b) Producir al menos una demostración del Teorema si se le solicita.
c) Resolver problemas que puedan plantearse concibiendo uno o varios triángulos rectángulos, y calculando alguna cantidad desconocida en términos de otras conocidas, mediante el establecimiento de ecuaciones o relaciones numéricas, que resulten de aplicar el Teorema de Pitágoras.

Nota. En este punto no se espera que los problemas planteados requieran la solución de ecuaciones de segundo grado, sólo de primer grado, o de sistemas sencillos de dos ecuaciones lineales. Sin embargo, a medida que el estudiante avance, y estudie las ecuaciones de segundo grado, también podrá atacar este otro tipo de problemas.

Estándar 9. Cantidades inconmensurables

Descripción. Los pitagóricos creían que todo podía representarse con números. Por ejemplo, descubrieron que las notas y melodías producidas eran armónicas, y sonaban bien (en su concepción) cuando había relaciones numéricas enteras simples entre las distancias de los huecos de las flautas o las longitudes de las cuerdas. Una cuerda reducida a la mitad de tamaño, produce un sonido que es una octava más alta que el tono original, y las combinaciones sonoras agradables para el gusto occidental guardan relaciones numéricas simples como $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. Hoy en día decimos que se representan con fracciones sencillas. Así, también creían que todos los segmentos que se pudieran construir en la geometría, guardaban relaciones fraccionarias entre ellos.

Sin embargo, un día descubrieron una contradicción en esa creencia. La diagonal de un cuadrado no podía guardar una relación fraccionaria con el lado del cuadrado. Fue un descubrimiento que sacudió las creencias de los antiguos matemáticos griegos, y les llevó a construir una concepción más precisa y compleja para la medición de longitudes.

El estudiante conocerá este hecho. Será capaz de entender y reproducir alguna demostración del mismo, por ejemplo de que raíz cuadrada de dos no es racional, o que la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables. También comprenderá por qué este descubrimiento produjo una crisis en la matemática griega, y que quien resolvió el conflicto fue el gran matemático Eudoxio, creando una aritmética de segmentos que permitía operar con ellos, con absoluta claridad y precisión, sin asignarles valores numéricos como longitudes.

Llevar esa construcción al terreno de los números sólo se consiguió muchos siglos después, a finales del siglo XIX, por lo que el trabajo de Eudoxio, que aparece en el libro V de Los elementos de Euclides, y se llama la Teoría de las proporciones, constituye una piedra angular de las matemáticas. Con la aritmética construida por Eudoxio, se desarrolló gran parte de las matemáticas griegas en esos términos, y en general se encuentran bastante alejadas de lo numérico.

Indicadores. El estudiante podrá:
a) Explicar qué significa que dos segmentos sean inconmensurables.
b) Exhibir pares de segmentos inconmensurables.

c) Demostrar que el lado y la diagonal de un cuadrado son inconmensurables, y explicar qué tiene que ver esto con la irracionalidad de $\sqrt{2}$.
d) Construir, representar y saber trazar geométricamente en la recta otras cantidades irracionales.

Estándar 10. El círculo, el número π y el concepto de ángulo

Descripción. El estudiante aprenderá que las culturas primitivas conocieron el círculo, y se enfrentaron con el hecho de que tanto su perímetro como su área, eran difíciles de expresar numéricamente en términos del diámetro o el radio. Así los egipcios utilizaron una estimación del área del círculo, que era la de un cuadrado de lado igual a $\frac{8}{9}$ del diámetro. Esto se llama una *cuadratura* (aproximada) del círculo. Los babilonios utilizaban a veces simplemente $3d$ como el perímetro de la circunferencia de diámetro d, aunque otras veces usaban una mejor aproximación. Fueron los griegos quienes, gracias a la teoría de las proporciones de Eudoxio, llegaron a concebir a π como una relación o proporción bien definida: la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia, a la que llamaron π. Que esa razón existe, es decir que hay una misma relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo pequeño que en uno grande, es uno de los conceptos más importantes de las matemáticas.

Los griegos descubrieron que también, la razón entre el área de un círculo y su radio es constante, y que además es igual a π. El estudiante conocerá alguna demostración de este hecho y reconocerá la importancia del mismo. También conocerá el método que usó Arquímedes para obtener una buena aproximación del número π, mediante el uso de polígonos (de 96 lados) inscritos y circunscritos a la circunferencia. Aprenderá:
a) El concepto de ángulo como la razón entre el arco y el radio.
b) Que esta definición de ángulos produce medidas llamadas radianes.
c) La relación que hay entre grados y radianes.

Con estas herramientas, el estudiante podrá resolver problemas que involucren el cálculo de áreas de sectores de círculos, por ejemplo: calcular el volumen de agua que hay en un tubo horizontal de sector circular que se encuentra lleno hasta cierta altura. Los cilindros y los conos, se conciben como prismas y pirámides de base circular, a ellos también se aplica la fórmula:

$$Volumen = \frac{base \times altura}{3}$$

para calcular su volumen.

Indicadores. El estudiante podrá:
a) Explicar qué es el número π.

b) Cómo es que el mismo número, interviene tanto en el área de un círculo como en el perímetro.
c) Aplicar el método de Arquímedes para obtener aproximaciones a π.
d) Resolver problemas que involucren el cálculo de áreas de sectores de circulares, y volúmenes tanto de cilindros como de conos, o partes de ellos.

Estándar 11. Triángulos semejantes, razones y proporciones

Descripción. El estudiante conocerá la teoría de las proporciones, el concepto de razón y la relación entre proporcionalidad y área. Entenderá la Ley de las Proporciones, es decir, que los lados correspondientes de triángulos (y otras figuras rectilíneas) semejantes son proporcionales (Euclides Libros V y VI), la utilidad de la misma y aprenderá a aprovecharla en combinación con el Teorema de Pitágoras, para resolver una amplia variedad de problemas prácticos.

Asimismo, se dará cuenta de que casi todos los problemas de geometría se pueden resolver utilizando sólo estos dos teoremas. Aprenderá la importancia de este hecho, que facilita el abordaje de los problemas de geometría. El uso de estos teoremas permite traducir muchos problemas geométricos al lenguaje algebraico, generando ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales o cuadráticas. Este tema abre la oportunidad de recordar y practicar el álgebra elemental que el estudiante debió haber aprendido en la secundaria.

Además aprenderá que, en gran medida, el Teorema de Pitágoras y la Ley de las proporciones son equivalentes, es decir, que el primero puede demostrarse usando la segunda y viceversa.

Indicadores. El alumno resolverá problemas donde pueda obtener áreas, longitudes y otras magnitudes, mediante el planteamiento y solución de ecuaciones, y sistemas de ecuaciones, a los que llegue aplicando la Ley de las Proporciones y el Teorema de Pitágoras.

Estándar 12. Trigonometría

Descripción. El estudiante aprenderá las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Comprenderá la importancia práctica de poder tener a mano sus valores para cualquier triángulo y la dificultad que esto implica. Calculará algunas de estas razones para ciertos ángulos utilizando el Teorema de Pitágoras y, aprovechando este mismo teorema, descubrirá las relaciones entre ellas, que dan lugar a fórmulas como:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

y

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Utilizará las tablas trigonométricas y la calculadora científica, para obtener los valores de las razones trigonométricas que necesite. Enfrentará múltiples problemas de aplicación, en los que deberá encontrar una distancia inaccesible en términos de otras que sí son accesibles, y de las medidas de algunos ángulos, descubriendo así el poder de la trigonometría. Encontrará los ángulos de un triángulo rectángulo dados sus lados. Aprenderá a dar nombres a las cantidades desconocidas, y a plantear ecuaciones con ellas como incógnitas. Lo mismo hará dando nombres a cantidades supuestamente conocidas, aún cuando éstas (no sólo las incógnitas) estén representadas por letras. Todo esto le permitirá obtener resultados generales para problemas generales.

Descubrirá y demostrará tanto la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\phi$$

donde a, b, c son los lados de un triángulo cualquiera y ϕ es el ángulo entre los lados a y b; como la ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

donde a, b, c son los lados de un triángulo cualquiera y A, B, C los ángulos opuestos a los lados a, b, c, respectivamente.

Utilizará ambas leyes para facilitar la solución de nuevos problemas. Enfrentará, y resolverá, problemas de cálculos de áreas y volúmenes que requieran el uso de razones trigonométricas, por ejemplo calcular el volumen de un cono dado el ángulo que forma con su eje y alguna de sus dimensiones, como podría ser el radio. Conocerá, entenderá y demostrará la fórmula de Herón para el área del triángulo dados sus tres lados, y podrá aplicarla en cualquier caso que se le presente.

Indicadores. El estudiante:
a) Planteará algebraicamente, y resolverá, problemas en los que se requiere encontrar una distancia inaccesible en términos de ángulos y distancias accesibles.
b) Resolverá problemas que requieran combinar las razones trigonométricas y el cálculo de áreas y volúmenes.

Estándar 13. Cálculos astronómicos y geográficos

Descripción. El estudiante aprenderá cómo:
a) Se llegó al conocimiento actual de la Tierra, y los principios de la Astronomía con apoyo de la trigonometría.
b) A partir de las ideas del mundo griego acerca de la Tierra, Eratóstenes en Egipto calculó el perímetro de la Tierra.
c) Aristarco calculó las distancias a la Luna y al Sol.
d) Hiparco de Nicea mejoró esos cálculos inventando en el proceso las razones trigonométricas.

Comprenderá por qué los resultados obtenidos por estos científicos para el radio de la Tierra y la distancia a la Luna son bastante cercanos a los conocidos actualmente; no así el de la distancia al Sol que era muy lejano al valor conocido ahora, y que esto se debe a la dificultad de estimar con precisión el ángulo entre el Sol y la Luna en el momento en que el ángulo Sol-Luna-Tierra es recto.

Entenderá cómo la astronomía se vuelve cuantitativa ligada al desarrollo de la trigonometría (gracias a las medidas de los triángulos), y aprenderá el paralaje y la determinación primaria de distancias astronómicas. Además, apreciará cómo los antecedentes de la Ciencia Griega contribuyeron a que, casi dos milenios después, pudiera desarrollarse el modelo heliocéntrico o Sistema Solar por Copérnico, y sabrá que esto sentó las bases para el descubrimiento de las leyes de Kepler usando las medidas de Tycho Brahe, y posteriormente para la mecánica de Newton.

Sabrá cómo Galileo Galilei estimó la altura de las montañas de la Luna, utilizando una imagen y algunos argumentos básicos de trigonometría.

Conocerá el significado de las coordenadas terrestres, latitud y longitud. Calculará la distancia entre dos ciudades sobre el mismo paralelo o sobre el mismo meridiano, dadas sus coordenadas terrestres. Reconocerá la dificultad de calcular distancias entre cualesquiera dos puntos de la Tierra, problema que requiere de otras herramientas. Podrá calcular la hora del día en un punto de la Tierra, sabiendo la de otro punto y las coordenadas terrestres de ambos.

Aprenderá sobre los trabajos de Picard, Cassini y Dunkirk en el siglo XVII, que probaron que la Tierra no era una esfera perfecta, y de Maupertuis quien demostró definitivamente la forma oblata de la Tierra.

Indicadores. El estudiante reproducirá los cálculos del perímetro de la Tierra, así como los de las distancias a la Luna y al Sol. También calculará la distancia entre dos ciudades sobre el mismo meridiano o sobre el mismo paralelo, dadas sus coordenadas terrestres, y la hora del día de cualquier punto de la Tierra dada la hora en cualquier otro punto.

Estándar 14. Construcciones geométricas con regla y compás

Descripción. El estudiante aprenderá que los antiguos griegos hicieron un gran esfuerzo para intentar resolver los problemas de geometría, utilizando sólo regla y compás. Entenderá que esto se debió tanto a la dificultad que tenían para manejar los números, como a la facilidad y claridad que ofrecían en cambio las construcciones con regla y compás. Por ejemplo, les resultaba incómodo expresar numéricamente el tamaño de la diagonal de un cuadrado, pero en cambio era facilísimo construirla usando regla y compás. Así, estas construcciones eran más poderosas para ellos que los números, tanto por la falta de un concepto de número suficientemente general, como por la carencia de un álgebra simbólica. Por ello intentaron hacer matemáticas con las mejores herramientas a su disposición, y éstas eran las construcciones con regla y compás. Sin embargo, descubrieron también que dichas construcciones no eran todopoderosas, y aparecieron problemas que no se pudieron resolver con esas herramientas.

Realizará y describirá algunas construcciones básicas con regla y compás:
a) El punto medio de un segmento.
b) El baricentro de un triángulo.
c) La mediatriz de un segmento.
d) La bisectriz de un ángulo.
e) El circuncentro, el ortocentro y el incentro de un triángulo.
f) Circunferencias circunscritas e inscritas a un triángulo.

Descubrirá la recta de Euler y la circunferencia de los 9 puntos. Podrá inscribir y circunscribir polígonos regulares. Sabrá la inscripción de un pentágono regular en una circunferencia (Euclides Libro IV) como ejemplo de una construcción difícil. Aprenderá el planteamiento de los famosos problemas que no se pueden resolver con regla y compás:
a) La cuadratura del círculo.
b) La trisección de un ángulo.
c) La duplicación del cubo. Conocerá alguna de estas construcciones, utilizando herramientas adicionales a la regla y el compás.

Observará que las construcciones con regla y compás, producen esencialmente las mismas que las que se pueden hacer con doblado de papel, reconociendo las ventajas y desventajas de cada herramienta.

Indicadores. El estudiante realizará, y describirá, cualquiera de las construcciones básicas con regla y compás. Explicará que las del pentágono regular y otros polígonos son difíciles, incluso que algunas son imposibles. Describirá las tres más conocidas.

Estándar 15. Propiedades geométricas del círculo

Descripción. El estudiante sabrá y entenderá que, en general, una recta interseca a un círculo en dos puntos, en uno sólo o en ninguno; que la recta que toca al círculo en ese punto y en ningún otro es la tangente en ese punto; y que la tangente a un círculo en un punto es perpendicular al radio trazado desde ese punto.

Conocerá que el ángulo bajo el cual se ve un diámetro del círculo, desde cualquiera de sus puntos, es recto; que el ángulo que abarca una cuerda desde un punto del círculo, es siempre el mismo o el suplementario, y que su valor es la mitad del que la cuerda abarca desde el centro. Será capaz de dar demostraciones de todas estas propiedades y, sobre todo, aplicarlas en situaciones problemáticas. Por ejemplo, calcular el radio de una circunferencia, sabiendo la longitud de una cuerda y el ángulo que abarca desde algún un punto de la circunferencia.

Enfrentará y resolverá, cualitativamente, el problema de fútbol que consiste en encontrar el punto con mejor ángulo de tiro a una portería, suponiendo que el jugador que va a disparar va por una trayectoria recta que no pasa por dentro de la portería.

Indicadores. El estudiante explicará y demostrará, las propiedades de los ángulos que abarcan las cuerdas de un círculo desde los puntos del mismo círculo, y resolverá problemas que requieran el uso de estas propiedades.

Estándar 16. Las secciones cónicas y sus propiedades

Descripción. El estudiante sabrá que las curvas cónicas pueden generarse cortando un cono circular con un plano, y cuándo el corte produce un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola. Entenderá por qué se considera a la hipérbola como una curva con dos ramas. Aprenderá que estas curvas fueron estudiadas en la antigua Grecia, especialmente por uno de sus grandes matemáticos: Apolonio de Perga, tanto por sus interesantes propiedades de reflexión como por su procedencia, que las vincula íntimamente con el círculo, considerado por ellos como la figura perfecta. Conocerá también que casi dos mil años más tarde, resultaron de gran utilidad para comprender y describir el movimiento planetario (Leyes de Kepler).

A través de las esferas de Dandelín, entenderá que la elipse tiene la propiedad de que la suma de las distancias de sus puntos a dos puntos llamados focos es constante y que la diferencia de las distancias de los puntos de una hipérbola a sus focos también es constante. Asimismo conocerá la propiedad de la parábola de que las distancias de sus puntos a un punto fijo llamado foco, y a una recta fija llamada directriz, es constante.

En la medida de lo posible debe familiarizarse con estas construcciones usando programas de geometría dinámica.

Utilizando las definiciones de las cónicas deducirá sus propiedades de reflexión. Comprenderá el papel que juegan en la elipse y la hipérbola las constantes usadas en sus definiciones. Deducirá las medidas de los semiejes de una elipse y las inclinaciones de las asíntotas de una hipérbola a partir de la distancia entre los focos. Deducirá las propiedades básicas de la parábola y sus aplicaciones tecnológicas. Aprenderá a utilizar la definición, las propiedades de reflexión y las maneras de calcular los semiejes y las asíntotas para enfrentar y resolver problemas en los que intervengan este tipo de curvas. Aprenderá la definición de las cónicas en términos del foco, la directriz y la excentricidad y podrá relacionar estas definiciones con las primeras.

Indicadores. El estudiante podrá responder preguntas que demuestren que conoce el origen, las definiciones y las propiedades de las cónicas. Podrá resolver problemas en los que intervengan alguna de estas curvas. Por ejemplo, calcular la posición de los focos y la constante definitoria de la elipse inscrita en cierto rectángulo o construir (con regla y compás) la tangente a una parábola en uno de sus puntos, suponiendo dados el foco y la directriz.

Estándar 17. Método de exhausión y cuadratura de la parábola

Descripción. El estudiante aprenderá en qué consiste el método de exhausión de Eudoxio, para calcular el área de figuras planas acotadas por curvas. Verá cómo puede usarse para estimar el área de una circunferencia con cualquier grado de precisión, y conocerá el trabajo de Arquímedes para calcular π.

Conocerá cómo Eudoxio utilizó el método de exhausión, para demostrar que el volumen de un tetraedro puede obtenerse como la tercera parte del producto del área de su base por la altura correspondiente.

Sabrá cómo Arquímedes utilizó dicho método para calcular, de manera exacta, el área de una sección de parábola, resultando ser $\frac{2}{3}$ de la del mínimo rectángulo o paralelogramo que la contiene.

Estudiará este método en ambos casos y descubrirá que los dos llevan a la serie infinita:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...$$

cuya suma puede obtenerse con un truco algebraico.

Si definimos

$$s=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+...$$

entonces, factorizando,

$$s=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...)$$

lo cual no es más que

$$s=\frac{1}{4}(1+s)$$

y por lo tanto

$$4s=1+s$$

$$3s=1$$

$$s=\frac{1}{3}$$

Éste es uno de los resultados precursores del Cálculo.

También conocerá el problema de la cuadratura de la parábola usando rectángulos, para estimar el área sobrante, desarrollando así un método precursor del cálculo integral. El objetivo principal de este estándar es que el estudiante aprenda que es posible manejar una infinidad de números y obtener resultados claros, lo cual es la esencia del Cálculo al que se enfrentará más adelante.

Indicadores. El estudiante:
a) Aproximará regiones acotadas por curvas con un número finito de polígonos, para calcular de manera aproximada sus áreas.
b) Describirá y aplicará el método de exhausión en algunos casos sencillos.
c) Explicará en qué consiste el problema de la cuadratura de la parábola, y que su solución por el método de exhausión constituye uno de los triunfos de las matemáticas griegas.

Nota. El método de exhausión, en particular sus aplicaciones al cálculo del volumen del tetraedro y a la cuadratura de la parábola, constituyen uno de los mayores triunfos de las matemáticas griegas. Estos logros se deben a Eudoxio y a Arquímedes de Siracusa, respectivamente.

Estándar 18. Volumen y superficie de cilindros, conos y esferas

Descripción. El estudiante descubrirá las propiedades básicas de estos cuerpos tridimensionales. Aprenderá cómo Arquímedes obtuvo el volumen de la esfera a partir del de un cono y un cilindro, utilizando un ingenioso argumento basado en el Teorema de Pitágoras.

Aprenderá a calcular la superficie del cilindro, del cono y de un cono truncado. Descubrirá que esta última sólo depende del radio medio y del lado. Finalmente, verá cómo Arquímedes demostró que la superficie de una esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde r es el radio. Este resultado quizás puede considerarse como el mayor logro de las matemáticas griegas. Así, el alumno entenderá por qué Arquímedes pidió que en su tumba se pusiera el dibujo de una cilindro circunscrito a una esfera, pues él mismo consideraba que su teorema más importante era haber descubierto que la razón de la superficie de la esfera a la del cilindro, era la misma que la del volumen de la esfera al volumen del cilindro, y de hecho ambas eran iguales a $\frac{2}{3}$.

Indicadores. El estudiante explicará por qué los cálculos de los volúmenes y superficies de la esfera, el cilindro y el cono fueron problemas difíciles que resolvió perfectamente Arquímedes. Conocerá los métodos usados por él para calcular estos volúmenes y superficies, y sabrá usarlos para enfrentar y resolver problemas que involucren este tipo de cuerpos y superficies. Por ejemplo, calculará el volumen de agua contenido en un tanque esférico, dado el radio de la esfera y la altura del nivel del agua; y también podrá calcular la superficie de un casquete esférico. Por ejemplo, podrá estimar la superficie de la Tierra contenida dentro del círculo polar ártico.

Nota. Es interesante observar que también en la cuadratura de la parábola aparece la fracción $\frac{2}{3}$.

Estándar 19. Los números naturales

Descripción. El estudiante aprenderá las distintas denominaciones de números naturales: pares, impares, primos y compuestos, el concepto de múltiplo y de divisor. La factorización de cualquier número natural en primos. El mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de un par de números naturales. (Euclides Libro VII). Los números triangulares, cuadrados, pentagonales, etcétera. La demostración de que hay una infinidad de números primos.

Reconocerá el concepto de módulo y residuo, aprenderá a identificar los números que tiene un residuo dado (por ejemplo los pares tiene residuo cero al dividirlos entre dos, los impares en cambio tienen residuo 1, etcétera).

Aprenderá por inspección, y recurriendo a argumentos geométricos, que la suma de los primeros números impares es igual a un cuadrado perfecto:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

y que

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Conocerá las propiedades fundamentales de los números naturales, así como sus operaciones de suma y multiplicación:

a) La suma es asociativa:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

b) La suma es conmutativa:

$$a + b = b + a$$

c) El cero es neutro ante la suma:

$$a + 0 = a$$

d) La multiplicación es asociativa:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

e) La multiplicación es conmutativa:

$$a \times b = b \times a$$

f) El uno es neutro ante la multiplicación:

$$a \times 1 = a$$

g) la multiplicación es distributiva respecto a la suma:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

(para cualesquiera números naturales a, b, c).

Sabrá que estas propiedades se conservan en otros esquemas numéricos, y forman la base del álgebra.

Aprenderá también la llamada propiedad arquimediana de los números naturales que dice que dado cualquier par de números naturales m y n, hay un múltiplo mk del primero que es mayor que el segundo.

Indicadores. El estudiante:
a) Encontrará todos los factores primos de un número natural dado, así como el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números naturales.
b) Deducirá las fórmulas para la suma de enteros consecutivos e impares consecutivos mediante argumentos aritméticos o geométricos.
c) Realizará operaciones aritméticas usando la factorización en primos.
d) Enunciará las propiedades de los números enteros respecto a la suma y a la multiplicación, así como su propiedad arquimediana.

Estándar 20. Inducción matemática

Descripción. El estudiante conocerá esta herramienta que permite demostrar enunciados generales a partir de su validez en casos particulares; que permite abarcar algo infinito con un número finito de pasos, uno de los cuales tiene que ser de carácter general.

Por ejemplo, demostrará que un mapa formado por curvas cerradas se puede colorear con sólo dos colores. Esto es evidente cuando el mapa está formado por una sola curva cerrada (semilla de la inducción). También es fácil ver que si un mapa ya está coloreado con sólo dos colores, al agregar una curva cerrada y cambiar el color de todas las partes que queden dentro de ella, se obtiene otra vez un mapa coloreado con sólo dos colores (si es cierto para n también lo es para $n+1$). Esto demuestra el enunciado, gracias al principio de inducción.

Este principio funciona como una larga fila de fichas de dominó que caen todas una tras de otra con sólo tirar la primera, ya que se colocaron de manera que cada una al caer, tira a la siguiente. También está relacionado con la estrategia intuitiva de ver un problema en sus casos más sencillos y como estos ayudan al caso general.

Utilizará la inducción para demostrar teoremas sencillos en distintos ámbitos, como el clásico de que hay un número infinito de números primos.

En particular aprenderá el poder de esta técnica demostrando por inducción algunas fórmulas como éstas:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

que por otros medios serían más difíciles.

Cobrará conciencia de la importancia que tiene el poder argumentar la validez de un enunciado general, que abarca una infinidad de casos.

Indicadores. Describirá algunas situaciones problemáticas que pueden aprovechar la inducción matemática. Demostrará la validez general de igualdades que dependen de un número entero y son válidas para todos ellos.

Estándar 21. Los números enteros

Descripción. El estudiante aprenderá que los números negativos, se inventan para completar y generalizar las operaciones de los números naturales ante la resta, dado que la diferencia de un natural pequeño menos uno grande no es un natural. Sabrá que este proceso de inventar nuevos números para completar el álgebra de otros, se ha utilizado para construir o justificar no sólo los números enteros, sino también los números racionales (que completan los enteros ante la división), los números complejos (que completan a los racionales, y los reales ante la raíz cuadrada y en general la potenciación).

Los enteros tienen la propiedad de poseer siempre un *inverso aditivo*, es decir, un número que sumado a él da cero.

Reconocerá que para que las propiedades de los enteros conserven las propiedades de los naturales, es necesario adoptar las llamadas reglas de los signos en la multiplicación ("más por menos da menos" y "menos por menos da más"). Por ejemplo:

$$a \times -1 = a \times (1 - 2) = (a \times 1) - (a \times 2) = a - 2a = -a$$

para todo entero a, en particular si $a = -b$ tenemos:

$$-b \times -1 = -(-b) = b$$

pues el inverso aditivo de $-b$ es b.

El sistema de los números enteros resulta ser un esquema algebraico *cerrado* ante la suma, la resta y la multiplicación, pero no ante la división, esto último requiere de números fraccionarios o racionales.

Realizará operaciones con enteros, respetando las propiedades heredadas de los naturales y las reglas de multiplicación de los signos.

También manejará desigualdades entre números enteros. Sabrá que al sumar o restar cualquier entero a ambos lados de una desigualdad, ésta no se altera. Igualmente aprenderá que al multiplicar ambos lados de una desigualdad por un entero positivo, ésta no se altera, pero al hacerlo por un entero negativo, ésta cambia de dirección.

Indicadores. El alumno:
a) Identificará en problemas monetarios, físicos y de ciencias, magnitudes que pueden representarse con números negativos.
b) Identificará que la resta consiste en sumar el inverso aditivo.

c) Proporcionará razones para justificar las leyes de los signos en la multiplicación.
d) Sumará y multiplicará adecuadamente cantidades positivas y negativas.
e) Manejará operaciones con desigualdades.

Estándar 22. Los números racionales

Descripción. El estudiante aprenderá que las fracciones, incluyendo las negativas, forman una estructura algebraica que es cerrada ante las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. Repasará los algoritmos de las operaciones con fracciones, llegando a comprender a fondo cómo y por qué se llega a ellos. Interpretará tanto la suma y resta, como la multiplicación y la división de fracciones, en aplicaciones concretas. Por ejemplo, sabrá que distribuir tres y medio litros en botellas de $\frac{3}{4}$ de litros, es un ejemplo de división de fracciones: siete medios entre tres cuartos, efectivamente el resultado es de

$$\frac{7 \times 4}{2 \times 3} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

y se interpreta como dos botellas llenas más un tercio de otra.

Reconocerá que todo número racional tiene una infinidad de representaciones como fracción, y que se acostumbra intentar representarlos usando la fracción más simple posible. Adquirirá práctica y familiaridad en las operaciones con fracciones, simplificándolas manualmente sin recurrir al uso de la calculadora. Aprenderá que en el ámbito de los racionales, el cero sigue siendo el neutro aditivo, y el uno, el neutro multiplicativo, y que la resta y la división son las operaciones inversas de la suma y la multiplicación, respectivamente, ya que la resta es la suma de un número con el inverso aditivo del otro, y la división es el producto del dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Sabrá localizar números racionales en la recta real, a partir de su expresión como una fracción. Estudiará la relación entre los racionales y la manera de representarlos en el sistema decimal, y que todo racional tiene una representación decimal finita o periódica, y entenderá por qué es así, recurriendo al algoritmo de la división. Se dará cuenta de que los decimales representan a todos los números racionales, pero hay otros decimales, los que no provienen de los racionales. Aprenderá que estos números se llaman irracionales. En particular $\sqrt{2}$ se puede escribir como una expresión decimal no periódica con una infinidad de términos, los cuales pueden calcularse, por ejemplo, usando el algoritmo tradicional para obtener raíz cuadrada, el cual en este caso nunca termina ni entra en repetición.

Indicadores. El estudiante:
a) Identificará el uso en la vida cotidiana y en las ciencias de los números racionales.
b) Sabrá sumar, restar, multiplicar y dividir números racionales.
c) Manejará desigualdades con números racionales, positivos y negativos.
d) Localizará números racionales en la recta real.
e) Simplificará fracciones a su mínima expresión.
f) Representará fracciones en el sistema decimal.
g) Explicará por qué algunas fracciones tienen representación decimal infinita, y por qué ésta es periódica.

2.3. Segunda parte

Estándar 23. Los números reales

Descripción. El estudiante aprenderá que los números reales, aunque pueden definirse de otra manera, pueden considerarse como el conjunto de todas las expresiones decimales finitas e infinitas, incluyendo las periódicas, pero también las que no lo son. Así como la representación de los racionales como fracción no es única, tampoco lo son las expansiones decimales, aunque en este caso los únicos casos en que hay dos representaciones son los decimales finitos, pues también pueden representarse con un decimal infinito que tiene sólo nueves a partir de cierto lugar. Por ejemplo, $4.27 = 4.269999...$ Sin embargo, descubrirá que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las expresiones decimales y los puntos de una recta. Por ello se habla de la *recta real*, entendiendo que se trata de una representación geométrica del sistema de los números reales.

Así, el sistema de los números reales resulta cerrado respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, al igual que el de los racionales, pero además tienen la propiedad *completitud*, que los racionales no tienen. Esta propiedad se puede expresar de varias maneras. De manera que si un conjunto de números reales está acotado superiormente, entonces tiene una mínima cota superior. Por ejemplo, las aproximaciones decimales a $\sqrt{2}$: $1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, ...$ son todos números racionales menores, digamos que 1.5. Por lo tanto la propiedad de completitud nos dice que tienen una mínima cota superior, y esa es precisamente el número real que corresponde a $\sqrt{2}$. En cambio, en el ámbito de los racionales, la misma sucesión está acotada también por 1.5, pero en cambio no hay ningún número racional que sea la mínima cota superior.

La propiedad de completitud es esencial para el desarrollo del Cálculo, es la que nos permite asignar valores numéricos al continuo, no sólo de la recta o de las curvas, sino también a puntos del plano y del espacio. Mediante ella, se pueden obtener valores numéricos concretos (reales) como resultado de algunos procesos infinitos. Por ejemplo, las sumas infinitas de números positivos que están acotadas, de acuerdo con el principio de completitud, deben converger a un número real. Esto permite operar con dichas sumas infinitas y obtener a veces su valor, como es el caso de $a + a^2 + a^3 + ...$ para cualquier número real a tal que $0 < a < 1$. De hecho, si definimos

$$s = a + a^2 + a^3 + ...$$

entonces, factorizando,

$$s = a \times (1 + a + a^2 + a^3 + ...) = a \times (1 + s)$$

por tanto

$$s - a \times s = a$$

$$s \times (1 - a) = a$$

$$s = \frac{a}{(1 - a)}$$

es decir,

$$a + a^2 + a^3 + ... = \frac{a}{(1 - a)}$$

Observará que todos los números reales, aún los irracionales, son siempre límite de una sucesión de números racionales (por ejemplo, los decimales finitos de una expansión decimal infinita).

Indicadores. El estudiante:
a) Clasificará los números reales en distintos conjuntos: naturales, enteros positivos, negativos, racionales e irracionales.
b) Sabrá relacionar el concepto de inconmensurabilidad con el de número irracional.
c) Dará razones para representar algunos números irracionales conocidos como π y $\sqrt{2}$ mediante símbolos especiales.
d) Construirá aproximaciones por fracciones de algunos números irracionales, como π y $\sqrt{2}$.
e) Describirá la relación entre expresiones decimales infinitas, puntos de la recta y números reales.
f) Aplicará la propiedad de completitud para justificar la existencia de algunas series infinitas acotadas de números positivos, como $\sum a^n$ para $a = \frac{1}{2}$, o para cualquier número real a tal que $0 < a < 1$ y podrá apoyarse en dicha existencia para obtener el valor de la suma infinita.

Estándar 24. El plano y el espacio cartesianos y los vectores

Descripción. El estudiante sabrá que así como los números reales pueden usarse para identificar todos los puntos de una recta, para identificar los puntos de un plano o del espacio, se pueden usar pares o ternas de números reales. Los pares de números reales se llaman vectores del plano, y las ternas se llaman vectores del espacio. La diferencia entre puntos del plano, o del espacio, y los vectores que les corresponden, es que los puntos son sólo eso, puntos, mientras que con los vectores se pueden realizar operaciones. De manera que, la suma de vectores, que se define sumando las componentes y formando un vector con esas sumas, tiene una interpretación geométrica que resulta muy útil, permitiendo usar los vectores para representar desplazamientos, velocidades, fuerzas, etcétera, tal es el caso de un avión que se mueve respecto al aire y que lleva una velocidad respecto a la tierra. Por supuesto, la composición de fuerzas, puede representarse perfectamente por medio de la suma de los vectores que las definen.

Aprenderá cómo se calculan distancias, puntos medios y baricentros, tanto en el plano como en el espacio; y concebirá los vectores como elementos de una estructura algebraica que resulta muy útil. Empleará vectores para resolver diversos problemas.

Conocerá también que hay ciertas operaciones de multiplicación entre vectores, que tiene gran utilidad práctica como son el producto escalar y el producto vectorial. Entenderá la interpretación geométrica de ambos productos, y la usará en diversos problemas como, por ejemplo, el cálculo de la distancia entre dos puntos de la Tierra a partir de sus coordenadas terrestres.

Indicadores. El estudiante interpretará situaciones físicas y geométricas sencillas mediante vectores, y realizará operaciones con ellos. Calculará distancias tanto en el plano como en el espacio, entre puntos definidos con coordenadas cartesianas, y también sobre la superficie de la Tierra, entre puntos definidos con coordenadas terrestres.

Estándar 25. Los números complejos

Descripción. El estudiante conocerá que, a pesar de que los reales son cerrados ante las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, no lo son ante la operación de obtener raíz cuadrada, ya que los números negativos no tienen raíz cuadrada. Este problema, y el hecho de que en las aplicaciones (por ejemplo al resolver una ecuación de segundo grado) aparecen situaciones donde hay que sacar raíz cuadrada a un número negativo, generó la idea de inventar otros números que pudieran ser las raíces cuadradas de los números negativos. El detalle que lanzó al mundo los números complejos, fue el hecho de que aceptando como existentes las raíces cuadradas de los números negativos, era posible obtener los valores reales de las soluciones de algunas ecuaciones de tercer grado (usando las fórmulas de Cardano Tartaglia), lo cual hacía sospechar que esos números imaginarios podían ser muy útiles. Después de muchos años de manejar estos números de manera informal, se logró establecer con toda claridad y formalidad el sistema de los números complejos.

La manera más fácil de acercarse a él, es presentarlo como el conjunto de los puntos del plano cartesiano, con las operaciones de suma y resta igual que para los vectores, pero definiendo el producto como el punto cuya magnitud es el producto de las magnitudes, y cuyo argumento es la suma de los argumentos. Para entender esto, el estudiante aprenderá el concepto de magnitud y argumento de un número complejo (o un vector en el plano), lo que se suele llamar coordenadas polares. De tal manera que la multiplicación de los vectores por un número (que corresponde a amplificar o contraer), se extiende de manera natural a multiplicar por un número complejo, como amplificar o contraer multiplicando por la magnitud y simultáneamente girar un ángulo igual al argumento (en particular, multiplicar por $i = \sqrt{-1}$ es girar 90 grados, y multiplicar por -1 es girar 180 grados).

Aprenderá que este producto también se puede expresar utilizando únicamente las coordenadas cartesianas, las propiedades elementales del producto, y el hecho de que $i^2 = -1$. Verá que con tales operaciones los números complejos heredan las propiedades de campo de los números reales, con cerradura ante las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias enteras y fraccionarias, aunque estas últimas dan lugar a funciones multivaluadas, como en el caso de la raíz cuadrada.

Sabrá asociar las raíces de la unidad con los polígonos regulares, y que esta extensión del concepto de número ha resultado de gran utilidad en las matemáticas y en la física. En el nivel de bachillerato se verán sólo algunas de sus aplicaciones, como la representación de las transformaciones de semejanza, que son las que se utilizan en la geometría clásica; como operaciones con complejos y para completar la teoría de las ecuaciones, en particular para entender del Teorema Fundamental del Álgebra.

Indicadores. El estudiante realizará operaciones elementales con números complejos. Resolverá tanto ecuaciones lineales con coeficientes complejos, como ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales. Deducirá las fórmulas del seno y coseno de la suma de dos ángulos, aprovechando la multiplicación de dos complejos en el círculo unitario.

Estándar 26. Las transformaciones en el plano

Descripción. El estudiante conocerá los diferentes tipos de transformaciones del plano, así como sus propiedades básicas, tales como homotecias, traslaciones, rotaciones y reflexiones. Entenderá que las transformaciones tienen inversas y cómo son; que se componen y por tanto que hay otras transformaciones, como las semejanzas y las reflexiones con desliz. Sabrá que forman naturalmente diversos grupos (no conmutativos) como el de las transformaciones rígidas, las rígidas orientadas y las semejanzas. Aprenderá que la composición de dos reflexiones es una rotación o una traslación, y que en tres dimensiones esto explica el efecto que producen dos espejos.

Para dar expresiones algebraicas de ciertas transformaciones, usará los números complejos y sus operaciones. Así, las traslaciones se representan como sumar un complejo fijo, una rotación en el origen se representa con la multiplicación por un complejo de magnitud 1, y en general, una semejanza centrada en el origen es la multiplicación por un complejo no nulo. Sabrá deducir de esto, que el grupo de semejanzas orientadas del plano, es equivalente al de las formas lineales con coeficientes complejos ($az + b$) bajo composición. Además, que para incorporar a las reflexiones, hay que introducir la conjugación de los números complejos que es la reflexión en el eje real.

Hay otras transformaciones del plano que no se expresan por operaciones de los números complejos, como lo son las ampliaciones o contracciones en un sólo eje. Sabrá cómo expresar a estas últimas en coordenadas cartesianas, también de la utilidad de las matrices de 2×2, para expresar explícitamente transformaciones del plano (a las lineales), y que lo anterior se puede ver también en esta óptica más general. Conocerá las matrices asociadas a los números complejos, a las rotaciones y a las reflexiones.

Indicadores. El estudiante dará una fórmula algebraica para una transformación sencilla, descrita con palabras o dibujos, como por ejemplo "la rotación de 90 grados alrededor del punto $3 + 2i$ ($(3, 2)$, según la notación usada por el maestro)".

Estándar 27. Simetría

Descripción. El estudiante sabrá que la simetría es un fenómeno frecuente e importante en la naturaleza, y muy común en los objetos de la civilización, en especial en el arte. Entenderá sus principios básicos, podrá detectarla y diferenciar sus distintos tipos.

Sabrá que en todas las culturas se ha expresado el aprecio por la simetría en la arquitectura, en el arte decorativo y en los objetos comunes; que la cultura árabe destacó por su excelencia en los mosaicos, y las culturas mesoamericanas por los frisos, todos ellos ricos en simetrías. También en la naturaleza aparecen muchas simetrías, en particular las moléculas suelen presentar simetrías interesantes como la hemoglobina con su simetría rotatoria 2 a 2.

De la simetría geométrica plana, reconocerá la simetría bilateral, la rotacional de un cierto orden (180, 90 y 60 grados por ejemplo), y la diédrica correspondiente. Sabrá que las simetrías de los mosaicos se llaman *cristalográficas* porque aparecen en el crecimiento de los cristales, y que hay diversos tipos incluyendo a los tres más simples que cubren el plano con polígonos regulares.

Aprenderá algo sobre las simetrías de cuerpos en tres dimensiones, en particular los sólidos platónicos, que fueron muy apreciados por los griegos, aunque aparecieron en culturas más antiguas, y entenderá cuáles se aparean por sus simetrías. Comprenderá el concepto de cuerpo con simetría rotacional, y por qué la esfera se distingue de cualquier otro cuerpo en términos de simetrías.

Reconocerá simetrías distintas a las que se expresa por transformaciones o movimientos rígidos, como la de las espirales, e inclusive que puede expresarse en ámbitos no geométricos como el simbólico y en situaciones aún más abstractas. Reconocerá cuándo y por qué hay simetría, por ejemplo, en una fórmula y en otras situaciones.

Indicadores. El estudiante sabrá diferenciar o asociar objetos de acuerdo a sus simetrías. Reconocerá y distinguirá los tipos de simetrías más básicos como la de reflexión, las de rotación y la central.

Nota. Hay 17 grupos cristalográficos o simetrías en los mosaicos. Fueron clasificados por los químicos a finales del siglo XIX, pero todos ellos aparecen en los mosaicos de la Alhambra que terminó de construirse en el siglo XV. No se sabe si los árabes las estudiaron sistemáticamente.

Estándar 28. Representación plana del espacio

Descripción. El estudiante conocerá que la forma de representar escenas 3D en un plano, es un problema al que se ha enfrentado la humanidad desde épocas muy tempranas, como se manifiesta en la pintura rupestre. En la actualidad se hace cotidianamente en diversos medios (fotos, tv, cine, animaciones 3D), apoyados en el principio de la proyección, que es el de la perspectiva en la pintura clásica renacentista: desde un punto, llamado foco (donde se sitúa el ojo del pintor), se proyecta el espacio a un plano (el lienzo o la pantalla) por líneas rectas. Tanto el ojo, como las cámaras fotográficas simulan esta operación matemática de proyección. El estudiante entenderá su definición y sabrá de su extenso uso; que las líneas rectas del espacio 3D se proyectan en líneas rectas del plano y que al proyectar un plano del espacio 3D, aparece naturalmente una línea llamada su horizonte. El estudiante aprenderá dónde aparece el horizonte, y cómo y por qué los puntos en esa línea ayudan a reconstruir la representación de todo el plano. Comprenderá también cómo los horizontes de varios planos ayudan a reconstruir toda una escena en perspectiva.

Sabrá, por qué el tamaño aparente de los cuerpos es inversamente proporcional a su distancia al foco. En casos sencillos y usando vectores, el estudiante descubrirá la expresión algebraica en coordenadas cartesianas de una proyección y así entenderá los principios de cómo se despliega una realidad virtual. También verá que estas consideraciones dan lugar a la axiomática, muy simple, de la geometría proyectiva que incluye:
a) Por dos puntos pasa una línea.
b) Dos líneas se intersectan en un punto.
c) Hay al menos 4 puntos no colineales.

Entenderá así cómo se relaciona la geometría proyectiva con la euclidiana. Conocerá también de manera informal la existencia de otras geometrías como la hiperbólica, y de qué manera éstas se relacionan con la proyectiva.

Indicadores. El estudiante sabrá trazar una cuadrícula en perspectiva, dados elementos mínimos que la definan, por ejemplo un cuadrado. Podrá explicar qué son los puntos de fuga en una perspectiva.

Estándar 29. Teoría de gráficas

Descripción.

Indicadores. El estudiante aprenderá que durante el siglo XX se desarrollaron varias nuevas áreas de las matemáticas. Una de ellas, que destaca tanto por su sencillez conceptual como por sus múltiples aplicaciones, es la Teoría de Gráficas (o de Grafos). Se atribuye su origen a Leonhard Euler, por su elegante solución al problema de los puentes de Königsberg a finales del Siglo XVIII. Influyó mucho en su popularización, y desarrolló la famosa conjetura de los 4 colores que, planteada a finales del Siglo XIX, no logró resolverse sino hasta 1976, y de manera bastante polémica. Ambos problemas son muy simples de plantear, y se modelan naturalmente con gráficas. Hay muchas otras situaciones que pueden modelarse con gráficas, por ejemplo, los árboles genealógicos, las redes sociales, las redes neuronales, las redes de comunicación, los circuitos eléctricos, los diagramas de flujo, etcétera.

En general, cualquier situación donde haya elementos independientes, que pueden representarse por nodos o vértices, y algo que haga de especial interés a ciertas parejas de esos elementos, que se representan como aristas entre los vértices, da lugar a una gráfica. He aquí otros ejemplos:
a) Quiénes se conocen en un grupo de personas.
b) Las líneas férreas entre las ciudades de un país.
c) Los vínculos o ligas entre las páginas de Internet.

En este último ejemplo es importante la dirección de la arista, que se puede representar con una flecha. Esto da lugar a las que se conocen como *gráficas dirigidas*. También hay gráficas en las que cada arista tiene asociado un número (el peso), por ejemplo, la distancia entre dos ciudades conectadas por una carretera. Éstas se llaman *gráficas pesadas*. En este tipo de gráficas hay muchos problemas famosos fáciles de plantear y de interés evidente, pero que son difíciles de resolver, por ejemplo, el del agente viajero, que consiste en encontrar el recorrido más corto que visita a cada ciudad una sola vez, y que comienza y termina en una misma ciudad.

Verá a las gráficas como herramienta útil para modelar una gran variedad de situaciones. Conocerá los conceptos básicos asociados a ellas como el grado de

un vértice, los caminos, la conexidad y la planaridad. Será capaz de demostrar algunos teoremas sencillos sobre ellas como:
a) En cualquier gráfica el número de vértices de grado impar es par.
b) Un árbol tiene al menos dos vértices terminales.
c) Eliminar una arista que está en un ciclo no desconecta a la gráfica.

Reconocerá problemas más complicados que tienen soluciones elegantes, aunque más difíciles de demostrar, como el Teorema de Kuratowsky, que caracteriza las gráficas planas como aquéllas que no contienen ciertas subgráficas.

Apreciará que el pensamiento matemático se extiende más allá de las áreas tradicionales. Se ejercitará en el uso de diversos métodos de demostración, y se enfrentará a problemas en los que es factible conjeturar, y luego demostrar, como sucede con el que dio lugar a esta teoría: ¿cuándo una gráfica es euleriana?, es decir ¿cuándo se pueden recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma?

Nota. El estudiante podrá:
1. Modelar problemas y situaciones simples con gráficas o gráficas dirigidas.
2. Demostrar algunos resultados básicos y distinguir entre diferentes métodos de demostración.
3. Diseñar algoritmos en gráficas, como el de encontrar un árbol generador.

Estándar 30. Computación y programación

Descripción. El estudiante aprenderá los principios básicos de la computación distinguiendo con claridad los conceptos de hardware y software, lo que es un procesador, la memoria RAM y la que se usa para almacenar archivos. Adquirirá las nociones básicas de un sistema operativo, así como la destreza para aprovecharlo, en particular para el almacenamiento y la recuperación de archivos.

Aprenderá las nociones básicas de programación: tipos y estructuras de datos, y los elementos de control de flujo como las condicionales, repetición y recursión, usando algún lenguaje de programación popular y de uso general, por ejemplo, JavaScript. (No se recomienda recurrir a lenguajes especiales, pues el objetivo es que adquiera una herramienta de programación que pueda serle útil en el futuro.) Tanto la idea de estructuras de datos, como los elementos básicos de control de flujo pueden aprenderse programando tres o cuatro ejemplos sencillos como: calcular el factorial de un número, calcular el máximo común divisor de dos números, ordenar un conjunto de datos, y programar dibujos a partir de elementos simples como segmentos y arcos. El estudiante creará algunos de estos programas.

Indicadores. El estudiante describirá los elementos básicos de una computadora, creará algunas estructuras de datos, y programará algoritmos utilizando los elementos de control de flujo.

Nota. El estudiante sabrá que en la actualidad la mayor parte de las personas programa máquinas, que de hecho son computadoras. Poner la alarma en un teléfono celular, elegir un ciclo de una lavadora o preparar una hoja de cálculo son labores de programación. Aprender un lenguaje de programación le abrirá una forma de relacionarse con las computadoras más profunda y útil, que hará surgir en él una sensación de poder inigualable.

La programación nos permite aprovechar la capacidad de cálculo y almacenamiento de una computadora, o dispositivo digital, para que haga un trabajo por nosotros. Preparar un programa requiere esfuerzo, dedicación y conocimiento de algunos principios básicos de la programación. Pero puede ser divertido, y ayuda a desarrollar habilidades importantes como: pensamiento analítico, síntesis creativa, capacidad de abstracción, capacidad para la comunicación precisa, y atención al detalle.

Estándar 31. Codificación

Descripción. El estudiante sabrá que tanto el almacenamiento como la transmisión de la información, requieren que ésta se codifique de manera adecuada. Así ha sido desde el inicio de la civilización. El lenguaje hablado es un método de codificar información, y el escrito también. El invento de la imprenta hizo que la información, codificada en lenguaje escrito, pudiera reproducirse masivamente y de manera bastante económica, lo cual tuvo una gran influencia en el desarrollo y distribución del conocimiento a partir del siglo XV. Posteriormente, el hombre ha aprendido a codificar información de tal manera, que ésta pueda ser recuperada y procesada por máquinas. Al principio se trataba de patrones para los telares, luego datos de nóminas y, en la actualidad, prácticamente toda la información se puede codificar. No sólo la información numérica o textual, sino que también las imágenes y el sonido se codifican para guardarse en sistemas de almacenamiento digital, de forma que pueda ser recuperada por máquinas como los reproductores de mp3, discos DVD y Blu-ray, y ser transmitida a través de las redes de comunicación digital.

Conocerá estos hechos, y las maneras en que se codifica la información actualmente. Aprenderá que en la era digital toda la información se codifica, en última instancia, en el sistema binario. Ya que ésta se almacena en memorias de silicio que tienen la propiedad de poder orientar magnéticamente algunas de sus moléculas en una de dos posibles direcciones, lo cual permite almacenar la información equivalente a un bit, es decir uno de dos estados.

Por una convención de orden práctico se suelen utilizar grupos de bits como los bytes, consistentes en 8 bits, o pares de bytes que permiten almacenar hasta $256 = 2^8$ o $65356 = 2^{16}$ posibilidades, respectivamente. Esto permite codificar texto de manera que cada letra, dígito o símbolo de puntuación quede representado por un byte o un par de bytes. La codificación de números reales se hace de manera aproximada utilizando casi siempre 8 bytes (64 bits) para cada número real. En este último caso, como en muchos otros, la codificación no es perfecta, puede haber pérdida, que en este caso es de precisión. Cuando la información se codifica de esta manera se dice que se *codifica en formato digital*.

El formato digital permite codificar todo tipo de información, por ejemplo la música de un CD se concibe como un desplazamiento (de la membrana auditiva por ejemplo) que varía en el tiempo. Esto se *digitaliza*, primero usando las $65536 = 2^{16}$ posibilidades de un par de bytes para representar el desplazamiento, y luego se toman 44,000 muestras del desplazamiento cada segundo. Lo mismo se hace con las imágenes, las cuales se conciben como funciones definidas en una red de pixeles con tres o cuatro valores que son las cantidades de rojo, verde, azul y tal vez opacidad, de cada pixel. Cada uno de estos cuatro valores se representa con un byte. Por ello, la imagen en una pantalla de 1920×1080 pixeles (que se conoce como full HD) puede tener más de 8 millones de bytes o 64 millones de bits.

Debido a que el almacenamiento y la transmisión de la información tienen un costo asociado, es importante también poder comprimir la información, para lo cual se han desarrollado métodos generales de compresión de archivos como el famoso formato *.zip*.

Tanto el sonido como las imágenes requieren cantidades exhorbitantes de información para codificarse, y por eso se han desarrollado métodos especiales de compresión que utilizan ideas matemáticas de aproximación de funciones (concretamente el análisis de Fourier). Así es posible codificar este tipo de información, con cierta pérdida, pero reduciendo considerablemente la cantidad de almacenamiento requerido. Este ahorro también es importante para la transmisión. Sin estos métodos no existiría hoy en día ni la telefonía móvil, ni la música en mp3, ni las películas en DVD y Blu-ray, o serían unas 10 veces más costosas. Además, sería casi imposible transmitir este tipo de información a través de las redes de comunicación, excepto entre puntos con conexiones de mucho mayor ancho de banda, como las que tenemos hoy en día.

Hay otro tipo de codificación que sirve para esconder la información. El proceso de codificar la información con el propósito de esconderla se llama encriptación. La idea es natural y se ha usado mucho. Hace más de 2000 años Julio César ya usaba mensajes encriptados para comunicarse con sus oficiales. Durante la Segunda Guerra Mundial, gran parte de la información secreta se transmitía por radio o telégrafo, y era fácil de interceptar si no se enviaba encriptada. Por tal motivo se desarrollaron sofisticados sistemas de encriptación, que tuvieron gran protagonismo y dieron trabajo a muchos investigadores matemáticos como Alan Turing, que se dedicaron a romper los códigos de encriptación del enemigo.

El estudiante conocerá estos hechos y hará ejercicios simples de encriptación como juego para transmitir secretos, para comprender así el tipo de pensamiento matemático que requiere la encriptación.

Asimismo, adquirirá conciencia de que la codificación es un proceso matemático del cual puede, y debe, conocer sus fundamentos para poder entender el mundo de información digital que habita.

Indicadores. El estudiante describirá cómo se codifica la información en formato digital. Calculará, o estimará, las cantidades de información en bits, bytes, kilobytes, megabytes o terabytes que se requieran para codificar algo. Podrá diseñar algún método simple de encriptación.

Estándar 32. Sistemas de ecuaciones, matrices y determinantes

Descripción. El estudiante aprenderá a plantear problemas prácticos en términos de sistemas de ecuaciones. Uno de los grandes logros del álgebra, es poder asignar nombres a las cantidades desconocidas y plantear ecuaciones que las relacionan, y muchas veces las determinan. Este proceso, tanto desde el punto de vista del planteamiento de problemas, como de las características de los sistemas de ecuaciones y las posibilidades de que tengan solución, puede entenderse mejor si se analiza a fondo el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, que además son muy útiles y comunes. Para esto conviene desarrollar simultáneamente el concepto de lugar geométrico de una ecuación lineal, que en el caso de dos incógnitas representa una recta en el plano, y en el caso de tres, un plano en el espacio; y ayudarse de éstas representaciones para analizar cuándo los sistemas lineales tienen solución única, cuándo no tienen solución, y cuándo tienen muchas soluciones.

Conocerá las matrices, como una notación útil para lidiar con los sistemas lineales de ecuaciones, y relacionarlas con los diferentes métodos de solución.

Entenderá el concepto de determinante, así como el método de solución por determinantes en sistemas lineales de dos y tres incógnitas.

Indicadores. El estudiante planteará sistemas de ecuaciones lineales para representar problemas de aplicación que se presten a ello, y analizará si tienen solución única, múltiple o no tienen solución. Además podrá encontrar las soluciones cuando éstas existan.

Estándar 33. Ecuaciones polinomiales

Descripción. El estudiante conocerá:
a) El planteamiento del problema general de encontrar soluciones de ecuaciones polinomiales.
b) El análisis completo del caso de las ecuaciones de primer grado.
c) El análisis completo de la solución de las ecuaciones de segundo grado, recordando el método geométrico de los árabes, consistente en completar cuadrados, realizando el mismo proceso de manera puramente algebraica, llegando a la llamada fórmula cuadrática o, como se le llama en México: *del chicharronero*.

Sabrá que las ecuaciones de primer y segundo grado fueron resueltas desde la antigüedad, notoriamente por los babilonios. Tendrá conocimiento de múltiples problemas de áreas y proporciones, como la áurea, que dan lugar a ecuaciones cuadráticas. Observará que hay ecuaciones de segundo grado que tienen dos soluciones (analizará el significado de este hecho cuando la ecuación viene de un problema real), y sabrá que en algunos casos tienen una sola solución y en otros no tienen solución. Sin embargo, entenderá también que si se aceptan soluciones complejas, entonces las ecuaciones de segundo grado siempre tienen dos soluciones, y que cuando hay sólo una, ésta se considera una raíz doble.

El problema de resolver las ecuaciones de tercer grado, que surgen naturalmente de problemas que involucran volúmenes, no encontró solución hasta que en el Renacimiento se inventara el álgebra simbólica. Esto permitió realizar manipulaciones algebraicas, suficientemente complicadas, para llegar a inventar un algoritmo (análogo a la fórmula cuadrática), que resolviera la ecuación de tercer grado. El estudiante conocerá la historia de intrigas y traiciones, que culminó en el descubrimiento del método general para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grados. Asimismo, sabrá resolver ecuaciones de tercer grado, si tiene a mano una referencia a las fórmulas de Cardano-Tartaglia.

Aprenderá que resolver ecuaciones polinomiales en general equivale a encontrar las raíces de un polinomio, y que esto, a su vez, equivale a factorizarlo en polinomios lineales. Sabrá que dar fórmulas para las raíces de polinomios de quinto grado, y grados superiores, resultó no sólo más difícil, sino que eventualmente se demostró que en general era imposible resolverlos con manipulaciones algebraicas. Conocerá la historia de este descubrimiento con todos sus tintes románticos (Abel y Galois). Sabrá que a cambio, Gauss demostró que todas los polinomios tienen raíces en el plano complejo, aunque no siempre puedan hallarse con manipulaciones algebraicas, y que este hecho, llamado el Teorema Fundamental del Álgebra, completa la teoría de las ecuaciones polinomiales.

Indicadores. El estudiante resolverá ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Planteará la ecuación que representa problemas de áreas y volúmenes, y la resolverá si tiene a la mano una referencia a las fórmulas de Cardano-Tartaglia. Podrá operar algebraicamente con polinomios y con ecuaciones polinomiales.

Nota. Los detalles de cómo se demuestran tanto el Teorema Fundamental del Álgebra, como la imposibilidad de encontrar un algoritmo para resolver la ecuación de quinto grado, no pertenecen a estos estándares, por lo que este tema debe tratarse de manera informal, como se hace en los escritos de divulgación.

Estándar 34. Álgebra moderna

Descripción. El estudiante tendrá conciencia de la importancia tanto histórica como cultural, que significó la simbología algebraica utilizada en la actualidad, y que ha tenido oportunidad de usar él mismo en muchos de los temas que ha estudiado.

La importancia de las propiedades, o axiomas básicos, de los diversos sistemas numéricos se reconoció hasta hace relativamente poco tiempo. En ello influyó mucho que en algunas abstracciones superiores como los polinomios, los vectores, las matrices y las transformaciones, se definen de manera natural operaciones que cumplen propiedades similares a las de los números. Estudiar las estructuras que forman los objetos abstractos con sus operaciones, es el objeto del Álgebra superior.

El estudiante aprenderá el concepto de grupo a través de varios ejemplos. Verá que en las matrices hay una estructura similar en la que, en el caso de matrices de tres o más dimensiones, el producto (o la composición) no es conmutativo.

Sabrá que las estructuras algebraicas se usan en las matemáticas más avanzadas con mucho provecho, y que en particular la Teoría de las ecuaciones polinomiales pudo completarse gracias a la aplicación de estas estructuras. También la demostración de que ciertas construcciones como la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo, no pueden realizarse con regla y compás, se hizo utilizando estructuras algebraicas especiales.

Indicadores. El estudiante podrá señalar ejemplos de estructuras algebraicas de objetos diferentes a los números. Conocerá el concepto de grupo, y podrá dar ejemplos sencillos como los de simetría en el plano y el de permutaciones en un conjunto finito. Sabrá que las estructuras algebraicas abstractas son útiles para enfrentar y resolver problemas complejos de las matemáticas avanzadas, y dará ejemplos de algunos de estos problemas.

Nota. Este estándar es de carácter cultural y debe presentarse en un estilo de divulgación.

Estándar 35. Potencias y raíces

Descripción. El estudiante conocerá que las potencias se utilizan para expresar números grandes en términos de multiplicaciones de cantidades más pequeñas; y que su uso introduce un método rápido para realizar las operaciones de suma y multiplicación de números muy grandes.

Las raíces de números, por su parte, se identificaron a muy temprana edad en la civilización griega, como expresión de las magnitudes de aristas y diagonales de figuras geométricas regulares. Puesto que los cuadrados y los cubos se asocian con la medida de áreas y volúmenes, las raíces llegan a estar ligadas con dichas magnitudes en figuras geométricas, haciendo que la operación de sacar raíz cuadrada, por ejemplo, sea la operación inversa de potenciar al cuadrado (por ejemplo, $\sqrt{a^2} = a$ para $a > 0$) y lo mismo con la potencia y la raíz cubica. Formalmente para números racionales la exponenciación se puede definir de manera que

$$a^{\frac{p}{q}}$$

sea la raíz q-ésima de a^p.

Indicadores. El estudiante:

a) Operará con polinomios y con números, aplicando correctamente las reglas de manejo de los exponentes incluyendo el hecho de que

$$a^b a^c = a^{b+c}$$

y

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

b) Podrá probar formalmente estas propiedades a partir de la definición de exponenciación.

c) Conocerá algún método para calcular raíces cuadradas y cúbicas.

d) Operará con raíces usando la forma de exponenciación en fracciones.

e) Asociará potencias cuadradas y cúbicas, con volúmenes de sólidos y figuras geométricas.

f) Asociará raíces cuadradas y cúbicas, con diagonales y aristas de figuras geométricas.

Estándar 36. Logaritmos

Descripción. El estudiante sabrá que los logaritmos en un inicio fueron una herramienta para simplificar algunos cálculos, y que fueron desarrollados por John Napier a principios del siglo XVII. Éstos son importantes, porque ayudan mucho con los cálculos de multiplicaciones, puesto que el logaritmo del producto de dos números, es la suma de sus logaritmos.

Los logaritmos se usan con distintas bases a, siendo su propiedad fundamental que

$$a^{\log n} = n$$

En los cálculos se pueden usar "tablas de logaritmos" para hacer multiplicaciones aproximadas de forma rápida. Las bases más usadas en los logaritmos son: 10, por su familiaridad, y el número e, por ser éste la base más natural de los logaritmos (la razón quedará clara al estudiar la derivada). Los logaritmos con base e se denominan logaritmos naturales.

Indicadores. El estudiante:
a) Conocerá las propiedades del logaritmo.
b) Aplicará las propiedades del logaritmo, para resolver problemas que involucren multiplicaciones con números con muchos dígitos.
c) Calculará los logaritmos cuando se aplican a números expresados como potencias.
d) Dibujará en una gráfica los valores de logaritmos en base natural.
e) Modelará algunos fenómenos naturales con la ayuda del logaritmo, entre los cuales se cuentan fenómenos azarosos o crecimientos exponenciales.
f) Sabrá que la inversa de la función exponencial es la función logaritmo natural y aplica este hecho para modelar fenómenos de crecimiento exponencial mediante una gráfica lineal.

Estándar 37. El interés compuesto y la función exponencial

Descripción. El estudiante conocerá el cálculo de ganancias en situaciones de interés compuesto, así como del interés continuo, la exponenciación.

Conocerá el cálculo del límite del interés compuesto, cuando éste se aplica de manera continua:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

Este cálculo sirve para definir el número e (cuando $x = 1$) y la función exponencial natural. En efecto, desarrollando el producto y tomando el límite se obtiene la definición de Euler de la función exponencial:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Estas fórmulas deben tomarse como un preludio de otros procesos límite que se estudian con el Cálculo.

El estudiante descubrirá que la función exponencial es la inversa del logaritmo ya que

$$a^{log_a(x)} = x$$

y

$$a^{log_a(a^x)} = a^x$$

por lo tanto para todo $y = a^x$ (o sea para todo número positivo y)

$$a^{log_a(y)} = y$$

Desarrollará intuición de la magnitud de la diferencia de un proceso que crece de forma polinomial, con respecto al crecimiento exponencial. Entenderá los procesos dinámicos con crecimiento exponencial que aparecen en su entorno como el crecimiento de una población, el uso de los recursos naturales y el interés bancario.

En el campo de la computación este tema presenta una buena oportunidad para entender la noción de escalabilidad, y de por qué un algoritmo cuyo tiempo de ejecución crece exponencialmente es de poca utilidad. Esto abrirá una ventana a la idea de que el ser humano está limitado, en cuanto a lo que puede conocer y calcular, ya que hay problemas que requieren demasiado tiempo para ser resueltos.

La contraparte son los logaritmos (tema de otro estándar), con los que el estudiante puede comprender el comportamiento de procesos que crecen muy lentamente. Estos conocimientos complementan, fortalecen y dan mayor profundidad a las nociones básicas de la aritmética, el álgebra, la combinatoria, la probabilidad y las ecuaciones.

El estudiante aprenderá a analizar noticias del periódico que involucran crecimiento exponencial. Podrá dibujar gráficas que ilustren crecimientos de orden de magnitud logarítmico, lineal y exponencial. Entenderá el uso de las escalas logarítmicas para representar el crecimiento exponencial con rectas.

Indicadores. El estudiante calculará el interés de una hipoteca y de una inversión a plazos. Entenderá las diferencias entre el comportamiento lineal, polinomial y exponencial. Explicará que la función exponencial representa el caso límite del interés compuesto cuando éste se acumula continuamente.

Estándar 38. Cálculo combinatorio

Descripción. En general por çontar" entendemos .$^{\text{en}}$umerar". Contar en contextos más amplios significa investigar cuántos objetos hay de cierto tipo, y para estos casos hay otras maneras de contar más allá de la simple enumeración. Saber cuántas "situaciones posibles" hay en ciertos contextos es muy útil, por ejemplo cuántas combinaciones de ceros y unos puede haber en 8 bytes, no se obtiene por enumeración sino utilizando pensamiento matemático más profundo. El estudiante deberá saber esto, y aprenderá tanto a deducir las fórmulas combinatorias básicas, como a aplicarlas en problemas concretos. Sabrá por qué el número de permutaciones de un conjunto con n elementos es igual a $n!$, el factorial de n ; asimismo, sabrá deducir las fórmulas para calcular todas las ordenaciones de n elementos, las ordenaciones con repetición y las combinaciones. Entenderá por qué se da el nombre de "coeficientes binomiales" a las fórmulas

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

que dan el número de combinaciones de k elementos tomados de un conjunto de n. Conocerá el triángulo de Pascal y sus propiedades.

Aprenderá a calcular probabilidades en situaciones de juegos de azar, mediante el conteo de posibilidades igualmente probables y apoyándose en las fórmulas combinatorias aprendidas. Algunas de las probabilidades interesantes a calcular con estos métodos son las de *rachas*, en juegos como el de los volados o el lanzamiento de dados. Entender el comportamiento de las rachas es importante para desmitificar el concepto de suerte en los juegos de azar.

Indicadores. El estudiante será capaz de explicar verbalmente las fórmulas combinatorias básicas, de demostrar formalmente sus propiedades y de aplicarlas en situaciones concretas. Usando métodos combinatorios de conteo, calculará probabilidades simples para juegos de azar y, en general, de eventos en universos finitos.

Nota. Varios estándares, especialmente los de Inducción matemática, Álgebra y Probabilidad tienen fuertes relaciones con éste. Es conveniente hacerlas explícitas, aprovechándolas tanto para dar profundidad como para enriquecer unas y otras.

Estándar 39. Probabilidad

Descripción. El estudiante aprenderá:
a) Aplicaciones del cálculo combinatorio al cálculo de probabilidades en juegos de azar.
b) La interpretación de las probabilidades en términos de tendencias de las frecuencias.
c) La visualización intuitiva y apoyada en simulaciones de la ley de los grandes números.

Asimismo, conocerá nociones básicas de conteo, especialmente las relacionadas a otros estándares, y a las que dan lugar al entendimiento de nociones básicas de probabilidad. Será consciente de la frecuencia con que en la cotidianidad razonamos de forma probabilística. Si en el periférico hay tres carriles, ¿conviene cambiarse de carril para ir más rápido? ¿Qué tan probable es ganarse la lotería, tener un accidente en un avión o cruzando la calle, tener una enfermedad, adivinar una clave secreta (password)? Otros ejemplos los tenemos en el lanzamiento de monedas, tiradas con dos dados, caminata aleatoria. Para esto, comprenderá la definición básica de la probabilidad de un evento, y podrá diseñar experimentos sencillos y divertidos para analizarla.

Indicadores. El estudiante analizará procesos probabilísticos sencillos de su entorno, comprenderá el significado de riesgo, y lo aplicará en diversas situaciones reales.

Estándar 40. Población y muestra

Descripción. El estudiante profundizará en su capacidad para interpretar datos estadísticos, aprendiendo el concepto de población y muestra. Reconocerá distintas poblaciones que aparecen de manera natural en la sociedad, como los estudiantes de bachillerato, los ciudadanos de la tercera edad, los homosexuales, etcétera. Entenderá que para describir las características de una población hace falta estudiarla, obtener datos y organizarlos; y que esto en general, no puede hacerse estudiando toda la población sino que hace falta tomar una muestra, analizar las características de la misma y aprender a descifrar qué puede decirse de la población, a partir de la información obtenida de la muestra.

Asimismo sabrá sobre:
a) La estimación del valor de una variable estadística (típicamente la media) a partir de una muestra de la población.
b) La variabilidad de la estimación en función del tamaño de la muestra, y de la desviación estándar de la variable en toda la población.
c) Muestras sesgadas y no sesgadas.
d) Muestras representativas.

En particular, entenderá el concepto de desviación estándar, cómo calcularla y qué significa. Conocerá los diagramas caja-brazo, y cómo representan gráficamente la variabilidad de una población o una muestra.

En el estudio de este tema, conviene utilizar la hoja de cálculo y otros programas para poder tratar casos de interés real, y crear gráficos que ayuden a estudiar las muestras de esas poblaciones. Aprenderá: a) El concepto de variabilidad en las distribuciones de frecuencias. b) La distribución de resultados de una variable aleatoria al realizar un cierto número de repeticiones, por ejemplo la puntuación obtenida al tirar dos dados. c) La variabilidad de la distribución, cuando el número de tiradas es pequeño. d) La disminución de la variabilidad cuando el número de tiradas aumenta.

Indicadores. El estudiante reconocerá poblaciones y sus muestras. Determinará intuitivamente cuándo una muestra es sesgada y cuándo es significativa. Calculará las medidas de tendencia central y la desviación estándar de una muestra, y sabrá apreciar cuándo estos valores son buenas estimaciones de los valores correspondientes de la población a la que pertenece la muestra.

Sabrá que para estimar la media de una población con desviación estándar pequeña, basta una muestra pequeña mientras que si la desviación estándar es grande hace falta una muestra grande.

2.4. Tercera parte

Estándar 41. Curvas paramétricas

Descripción. El estudiante sabrá que las curvas en el plano y en el espacio pueden ser definidas paramétricamente, es decir, como funciones de un intervalo, o toda la recta, en el plano o en el espacio dadas por coordenadas, y que la conciencia de este hecho representó una liga profunda entre la física y las matemáticas, que dio gran impulso a su desarrollo (la mecánica newtoniana y el Cálculo). Sabrá de la idea (que se desarrollará con más profundidad en el estándar 46) de velocidad como vector tangente a una curva parametrizada por el tiempo. De acuerdo a esta idea, deducirá las expresiones paramétricas del movimiento rectilíneo uniforme, del uniformemente acelerado y del tiro parabólico.

También, por sus propiedades geométricas, deducirá las parametrizaciones de la circunferencia y otras curvas cónicas; de las espirales, y de los diversos tipos de cicloides asociados tanto a la recta como al círculo (espirógrafos). En la medida de lo posible, verá dinámica e interactivamente a éstos y otros ejemplos como las figuras de Lissajous, cardioides, etc. Sabrá que se puede hacer uso de las operaciones vectoriales, de las coordenadas polares, de las transformaciones del plano y de los números complejos, según convenga, para dar representaciones paramétricas.

Indicadores. El estudiante reconocerá rectas, círculos, elipses y parábolas dadas paramétricamente. Sabrá dar parametrizaciones para el movimiento de un punto a otro, con restricciones sobre la velocidad o el tiempo en contextos como el de animación de películas.

Estándar 42. Lugares geométricos y ecuaciones que los definen

Descripción. El estudiante sabrá que las ecuaciones (y en particular las polinomiales) en dos variables, tienen asociados los lugares geométricos de sus soluciones en el plano cartesiano, que las rectas corresponden a las ecuaciones lineales y que las curvas cónicas corresponden a polinomios cuadráticos en dos variables igualados a cero. Conocerá las ecuaciones canónicas de las cónicas. Deducirá:
a) Las ecuaciones correspondientes a los círculos, a partir de su definición sintética, como lugar geométrico en términos de distancias, y de las elipses a partir de su definición como dilación de los círculos y de su definición sintética.
b) Deducirá la ecuación de las rectas, la parábola y algunas hipérbolas a partir de su definición como gráficas de funciones.

También sabrá:
a) Que no todos los polinomios de segundo grado en dos variables dan lugar a cónicas, e integrará a las parejas de rectas en tal familia.
b) Que los lugares geométricos definidos por desigualdades dan lugar a regiones como semiplanos, pares de ángulos opuestos, discos, y en general, las regiones del plano en las que parte la curva definida por la igualdad.
c) De la transformación de los lugares geométricos y los polinomios que los definen, ante transformaciones como traslaciones, rotaciones, homotecias, dilaciones, etcétera.

Conocerá la ecuación general de segundo grado en dos variables, aprenderá de su análisis apoyado en el signo del discriminante, y que el término mixto está asociado con los ejes principales de una cónica.

Indicadores. El estudiante reconocerá cuándo una ecuación de segundo grado en x, y sin término mixto representa un círculo, una parábola, una elipse, una hipérbola; y obtendrá las características de dichas curvas a partir de los coeficientes de la ecuación que la representa.

Estándar 43. Funciones y sus gráficas

Descripción. El estudiante aprenderá que la gráfica de una función es un subconjunto de un producto cartesiano que, en el caso de funciones reales de variable real, es el plano y la gráfica es el conjunto de puntos del plano dado por las parejas ordenadas $(x, f(x))$. Distinguirá entre el nombre de la función f y el valor de la función $f(x)$. Sabrá que fue Leonhard Euler quien introdujo la notación $f(x)$ para funciones, que seguimos usando en la actualidad.

Conocerá las gráficas de funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas. Aprenderá a obtener nuevas funciones a partir de las anteriores reflejando, trasladando o escalando las gráficas. Manejará el álgebra de funciones. Se familiarizará con funciones no definidas en algunos puntos; con funciones definidas sólo en una región; y con funciones que no están definidas con una sola fórmula, como las funciones definidas por partes, en las que se usan diferentes fórmulas para diferentes pedazos del dominio. Reconocerá que las funciones inyectivas son importantes, porque sus inversas son funciones. Entenderá la diferencia entre una función continua en un punto y una discontinua.

Conocerá el concepto de límite de manera intuitiva, y sabrá calcular algunos límites. Usará la computadora para dibujar las gráficas algunas funciones, lo que permitirá visualizarlas, familiarizarse con ellas, y relacionar sus comportamientos con las formas de las gráficas.

Indicadores. El estudiante dibujará gráficas de funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales, trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciales y logarítmicas, y otras que se obtienen a partir de éstas mediante sumas, reflexiones, traslaciones horizontales, verticales o escalamientos. Dibujará gráficas de funciones definidas por partes y funciones escalonadas. Determinará el dominio de las funciones anteriores. Usará las gráficas para analizar y explicar propiedades de las funciones. Sabrá sumar, multiplicar y dividir funciones reales con el mismo dominio, y tomará en cuenta que el dominio del cociente puede cambiar. Compondrá funciones y encontrará la inversa de una función, bajo ciertas condiciones. Determinará los puntos donde las funciones no están definidas o son discontinuas. Sabrá que las funciones racionales no son continuas en los puntos donde el denominador es cero. Calculará límites laterales, límites infinitos y límites al infinito. Usará la computadora para dibujar las gráficas de todas estas funciones.

Estándar 44. Modelación por medio de funciones

Descripción. El estudiante aprenderá a identificar el comportamiento de las variables en algunos fenómenos del mundo real, tanto en las ciencias naturales y la ingeniería, como en la economía y las ciencias sociales, con el comportamiento de algunas funciones. Por ejemplo: la elongación de un resorte en función de la fuerza aplicada para estirarlo; la resistencia del aire respecto a la velocidad de un móvil; la oferta y la demanda como funciones del precio; el crecimiento de poblaciones con y sin restricciones alimentarias; o el comportamiento de poblaciones de presas y depredadores en competencia.

Estudiará modelos discretos y continuos. Utilizará la hoja de cálculo tanto en modelos simples como en modelos recursivos. Utilizará las gráficas por computadora para estudiar el comportamiento de los modelos.

Planteará problemas en términos de funciones y los resolverá por métodos gráficos. Esto incluye la solución de sistemas de dos ecuaciones por medio de la intersección de las gráficas de dos funciones. Sabrá abordar los casos no lineales, incluso los que den lugar a ecuaciones trascendentes que requieran el uso de métodos numéricos. Describirá geométricamente el método de Newton Raphson para obtener soluciones aproximadas en tales casos, y aprenderá a utilizarlo realizando los cálculos tanto manualmente, como programando el algoritmo en una computadora.

Indicadores. El estudiante podrá usar las funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas para modelar fenómenos del mundo real. Sabrá resolver problemas encontrando soluciones por métodos gráficos y numéricos.

Nota. Se recomienda fomentar el uso de la computadora en este tema, incluyendo el desarrollo y programación de algoritmos en la computadora.

Estándar 45. Recta tangente a una curva

Descripción. La palabra tangente proviene del Latín y significa "tocar". Por ello, la recta tangente a una curva en un punto debería ser aquella que la *toca* en ese punto, pero esta definición no es satisfactoria. Los griegos definieron las tangentes a las curvas cónicas como las rectas que las tocaban en un sólo punto. Pero el concepto de tangente a otras curvas, como por ejemplo la gráfica de $f(x) = x^3$ no se ajusta a esa definición ya que hay rectas tangentes a ella que la tocan en dos puntos. Además la tangente en el origen, que coincide con el eje horizontal, la cruza, por lo que definir la tangente como la recta que toca a la curva en un punto y la deja de un mismo lado, tampoco es satisfactorio.

Todo esto debe llevar al estudiante a reconocer que la única forma satisfactoria de definir la recta tangente a una curva en un punto es como el *límite* de las rectas *secantes* que pasan por el punto en el que se quiere definir la tangente, y otro cercano en la misma curva que se acerca indefinidamente al primero.

El alumno descubrirá la definición formal de la derivada de una función $f(x)$ en un punto $(x, f(x))$ como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto, y entenderá por qué es aquélla que pasa por el punto y tiene pendiente

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aprenderá a relacionar el concepto de derivada no sólo con el de pendiente de la recta tangente, sino con el de razón instantánea de cambio y con el de velocidad. En particular, descubrirá que cuando una curva es la trayectoria en el plano o en el espacio de una partícula en movimiento, y su posición al tiempo t está dada por $\vec{r}(t)$, entonces su velocidad

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

es un vector tangente a la trayectoria, cuya magnitud es la rapidez con la que se mueve la partícula en el tiempo t.

Indicadores. El estudiante explicará por qué las rectas tangentes se definen como límites de secantes. Conocerá la definición formal de la derivada de una función, y la interpretará como pendiente, razón de cambio y velocidad, según el contexto en que se aplique.

Estándar 46. Movimiento de partículas y velocidad instantánea

Descripción. El estudiante comprenderá la importancia de los trabajos de Galileo y de Newton para aclarar el concepto de velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento. Describirá el movimiento de una partícula mediante una función que da su posición con respecto del tiempo. Conocerá el caso de movimiento en una dimensión, el caso de movimiento en el plano y en el espacio. Entenderá que la velocidad instantánea de una partícula se puede aproximar mediante el valor del cociente:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

y que cuando Δt es un número "infinitamente pequeño" o infinitesimal, el cociente recibe el nombre de derivada (así lo consideraba Leibniz).

Reconocerá que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y que cuando se mide en la práctica lo que en realidad se mide es la velocidad media en intervalos de tiempo pequeños. La velocidad instantánea describe qué tan rápidamente se mueve la partícula en un instante dado.

Conocerá el caso del movimiento uniformemente acelerado. Analizará el movimiento de proyectiles en caída libre o el tiro parabólico. Galileo puso en duda la teoría de Aristóteles: los cuerpos más pesados caen más rápidamente que los más ligeros. En gran medida, se deben a Galileo Galilei la ideas respecto al movimiento de cuerpos en caída libre. Dicen que Galileo realizó experimentos dejando caer objetos de la Torre de Pisa. El astronauta David Scott realizó en la Luna un experimento parecido: dejó caer simultáneamente un martillo y una pluma desde la misma altura: el martillo y la pluma cayeron a la misma velocidad.

Sabrá que la velocidad es un vector que expresa el desplazamiento de la partícula por unidad de tiempo; y que el movimiento circular uniforme es en el que la partícula se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular, es un movimiento en dos dimensiones que se puede describir usando vectores.

Aprenderá a resolver el problema inverso de calcular el desplazamiento dada la velocidad en casos sencillos como el de velocidad uniforme y el de aceleración constante. Lo hará tanto en situaciones de movimiento rectilíneo, como en el tiro parabólico.

Indicadores. El estudiante utilizará la notación

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

para la velocidad media y

$$\frac{dx}{dt}$$

para la velocidad instantánea. Reconocerá que en el caso de movimiento uniforme la velocidad media y la velocidad instantánea son iguales. Calculará la velocidad instantánea, encontrando la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función desplazamiento en un tiempo dado. Determinará la distancia recorrida a partir de la velocidad instantánea como función del tiempo. Determinará la distancia recorrida dada la velocidad como función del tiempo. Analizará el movimiento en dos y tres dimensiones, usando componentes vectoriales; y también el movimiento de proyectiles para determinar la posición, el tiempo de vuelo y el alcance, usando componentes vectoriales. Resolverá problemas en los que se usan los conceptos anteriores.

Estándar 47. Derivadas de funciones

Descripción. El estudiante descubrirá las derivadas de las funciones polinomiales, trigonométricas, de la exponencial y el logaritmo, utilizando sus propiedades y un cálculo informal de los límites que las definen. Aprenderá las reglas que permiten obtener las derivadas de sumas, combinaciones lineales, productos y cocientes de funciones.

El estudiante argumentará acerca de problemas que involucran la razón de cambio de una cantidad respecto a otra, y reconocerá que éste se puede plantear en términos generales con el uso del concepto de función. Podrá incorporar argumentos heurísticos para deducir propiedades de las derivadas. Por ejemplo, que la razón de cambio promedio de un producto de funciones $f(x)$, $g(x)$ se puede interpretar como la razón de cambio del área de un rectángulo cuyos lados miden $f(x)$ y $g(x)$ y de este modo, deducir la regla de Leibniz.

Dado el polinomio $f(x) = x^2$ el estudiante calculará la pendiente del punto $(x, f(x))$ a $(x + h, f(x + h)$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h.$$

Deducirá que para h pequeña, la pendiente se estabiliza en $2x$. Usará un programa de geometría dinámica para visualizar la recta pendiente y el valor de la pendiente. Usará la misma técnica para la función $f(x) = x^3$, y para $f(x) = x^n$, además del teorema del binomio. Conocerá la notación:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

y sabrá que, cuando el límite existe, diremos que f es derivable y que la derivada se denota por: f'.

A partir de las gráficas de las funciones *seno* y *coseno* le será plausible determinar que la función derivada de la función *seno* es *coseno* y la de la función *coseno* es $-$*seno*. Investigará, con un programa de geometría dinámica, las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$, observará que la gráfica de la derivada de $f(x) = 2^x$ está por abajo de la gráfica de f, mientras que la gráfica de la derivada de $g(x) = 3^x$ está arriba de la gráfica de g. Dibujará la función k^x, haciendo variar el parámetro k de 2 a 3. Conjeturará que deberá haber un número $2 < e < 3$ para el que la gráfica de e^x y la gráfica de su derivada coincidan, es decir, que existe un número e para el que la derivada es e^x.

Usando las propiedades de las funciones exponenciales obtendrá que:

$$\frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = 2^x \frac{2^h - 1}{h}.$$

y

$$\frac{3^{x+h} - 3^x}{h} = 3^x \frac{3^h - 1}{h}.$$

El estudiante obtendrá la desigualdad

$$\frac{2^h - 1}{h} < \frac{3^h - 1}{h}$$

y con el apoyo de una hoja de cálculo, calculará $\frac{2^h-1}{h}$ y $\frac{3^h-1}{h}$ para valores de h que se acerquen a cero, y observará que el primer límite es menor que 1 y el segundo mayor que 1. Haría algo similar, para $\frac{k^h-1}{h}$ con k en el intervalo $(2, 3)$ y podrá conjeturar que existe un valor $2 < e < 3$ tal que $\frac{e^h-1}{h}$ se acerca a 1.

Indicadores. Entenderá cómo se calculan las derivadas de las funciones polinomiales, trigonométricas, exponenciales y logaritmos, y sabrá cómo se demuestran las reglas de derivación de sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones. Derivará las funciones polinomiales, trigonométricas, exponencial y el logaritmo así como sumas, productos, cocientes y composiciones de dichas funciones usando las correspondientes reglas de derivación.

Estándar 48. Valores extremos de una función derivable

Descripción. El estudiante conocerá que una de las aplicaciones de la derivada es la resolución de problemas de optimización. En algunos casos, el problema se reduce a encontrar los valores máximos o mínimos de una función que modela la situación. La derivada nos proporciona información acerca del comportamiento de las funciones, para obtener información, el alumno interpretará gráficamente los puntos máximos y mínimos locales de la gráfica de una función, como puntos donde la derivada es cero, debido a que la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal en ese punto.

Calculará los máximos y mínimos de una función en problemas de aplicación, como, por ejemplo, el problema clásico de encontrar el volumen máximo de una caja, sin tapa, que se construye con una hoja de cartón. Cuando resulte complicado analizar el signo de la primer derivada alrededor de un punto crítico, entonces, si la función es dos veces derivable, recurrirá al criterio de la segunda derivada para determinar si los valores críticos son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Indicadores. El estudiante determinará si la función dada toma valores máximos o mínimos, locales o absolutos, en el intervalo indicado, y encontrará los puntos en donde se alcanzan. Determinará los puntos de inflexión de la función dada, y resolverá problemas de optimización. Aplicará el primer y el segundo criterio de la derivada.

Estándar 49. Modelación estadística y regresión lineal

Descripción. El estudiante aprenderá cómo se determinan los parámetros de un modelo funcional a partir de datos estadísticos bivariados contextualizados y sabrá utilizarlo para realizar predicciones e interpolaciones, reconociendo las limitaciones del propio modelo en términos de los datos disponibles. Específicamente, estudiará, analizará y aplicará la regresión lineal. Entenderá el método para determinar los parámetros de una regresión lineal, como una aplicación del cálculo del mínimo de una función cuadrática en apariencia complicada, pero que en realidad es sólo una suma de expresiones cuadráticas, fáciles de derivar.

Aprenderá el cálculo e interpretación del coeficiente de correlación. También sabrá que es posible el ajuste a otro tipo de funciones, además de la lineal (por ejemplo, a una función exponencial), aunque estos ajustes no se aborden.

Indicadores. El estudiante encontrará los parámetros del modelo lineal, al que mejor se ajusten una serie de datos estadísticos bivariados, por medio del método de mínimos cuadrados, y utilizará el modelo para realizar interpolaciones y predicciones, reconociendo las limitaciones en términos de la calidad de los datos y la pertinencia del modelo lineal. Asimismo, usará el valor del coeficiente de correlación para validar la confiabilidad del modelo y de sus predicciones.

Nota. Se recomienda utilizar la computadora y construir un programa que realice los cálculos de cualquier regresión lineal de manera automática.

Estándar 50. La integral definida y el área bajo una gráfica

Descripción. El estudiante descubrirá cómo obtener el área bajo la gráfica de una función escalonada (es decir que es constante en intervalos consecutivos) sumando términos de la forma $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ donde $f(\xi_i)$ es el valor constante de f entre x_i y x_{i+1}.

Utilizando una función $f(x)$ que es la derivada de otra función $F(x)$ descubrirá el Teorema Fundamental del Cálculo que le permite obtener el área bajo la gráfica de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ como

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

Para ello aproximará la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ por una función escalonada con valores

$$f(\xi_i) = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

en los intervalos de la partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b$. El área bajo la gráfica de esta función es

$$\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(b) - F(a)$$

Tomando particiones cada vez más finas se puede concluir que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Esto demuestra el Teorema Fundamental del Cálculo que permite calcular fácilmente el área bajo la gráfica de una función $f(x)$ si se conoce su antiderivada $F(x)$, es decir una función tal que

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Conocerá el concepto de integral indefinida o antiderivada, y sabrá que dos antiderivadas de una función sólo difieren en una constante, por lo cual en general éstas se denotan como:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde c es una constante arbitraria.

Entenderá la importancia histórica de este descubrimiento y las razones por las cuales el Cálculo se convirtió, a partir del siglo XVIII, en una herramienta matemática muy importante que permitía resolver problemas como el cálculo de áreas de figuras curvas, volúmenes de todo tipo de cuerpos, longitudes de todo tipo de curvas, trayectorias de partículas sujetas a fuerzas conocidas y otras cantidades de interés científico como el trabajo realizado por una fuerza, o la media y la desviación estándar de una distribución de probabilidad, que anteriormente eran intratables o ni siquiera podían definirse con precisión.

Indicadores. El estudiante calcula áreas bajo las gráficas de funciones escalonadas y lineales por partes. Explica el Teorema Fundamental del Cálculo y lo aplica para calcular áreas bajo curvas descritas por las gráficas de funciones de las cuales se conoce su integral indefinida o antiderivada. Identifica la integral definida como el área bajo la gráfica de la función a integrar. Explica con claridad la importancia histórica del Teorema Fundamental del Cálculo y cómo para utilizarlo fue necesario desarrollar métodos para obtener las funciones antiderivadas o integrales indefinidas de todas las funciones que se pudiera, convirtiendo esto al Cálculo en una tecnología matemática de gran utilidad.

Nota. Es importante observar que el énfasis de este estándar está en la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo, su trascendencia histórica, cultural y científica y su transformación en una tecnología matemática imprescindible hasta hace unos años. Sin embargo la aparición de las computadoras sugiere disminuir el énfasis que antes se daba a desarrollar habilidad en esta tecnología y trasladarlo en cambio a la comprensión de los conceptos y a su aplicación práctica, sin preocuparse tanto por la solución exacta, ya que ahora no es necesario conocer las antiderivadas puesto que las integrales definidas pueden calcularse con la precisión requerida en cualquier aplicación, utilizando la computadora.

Estándar 51. Algunos métodos de integración

Descripción. El estudiante conocerá los métodos más simples de integración:

a) Integración directa por conocimiento de las derivadas de las funciones polinomiales, trigonométricas, la exponencial y el logaritmo.

b) El método del cambio de variable, es decir, si $f(x) = g(u(x))\frac{du}{dx}$, entonces

$$\int f(x)dx = \int g(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int g(u)du$$

c) El método de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Indicadores. El alumno obtendrá las integrales indefinidas o antiderivadas de algunas funciones por el método directo, el método de cambio de variable o el método de integración por partes.

Estándar 52. Aplicaciones de la integral

Descripción. El estudiante aprenderá a calcular áreas, volúmenes, masas, centros de masa, trabajo, medias y dispersiones estándar de distribuciones de probabilidad, entre otras, por medio de la integral definida. Conocerá algunos de los problemas clásicos como cálculo del volumen de una pirámide, y el área de un sector de parábola, resueltos por los griegos usando métodos ad-hoc poco generales y apreciará las ventajas de hacerlo utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo. Conocerá los avances de Cavalieri sobre la conservación de áreas y volúmenes antes ciertas deformaciones, y de Fermat sobre la cuadratura de regiones bajo la gráfica de x^k. El objetivo de estas aplicaciones es que adquiera una mejor comprensión del proceso de integración como una "suma infinita de componentes infinitamente pequeñas", y refuerce su habilidad para reconocer problemas que pueden ser resueltos a través de la integral.

Indicadores. El estudiante planteará el cálculo de longitudes de curvas, áreas de figuras planas, volúmenes de cuerpos y otras magnitudes, evocando la idea de una suma infinita de cantidades infinitesimales y planteando así las integrales definidas adecuadas a cada caso.

Aplicará el principio de Cavalieri para calcular áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos tridimensionales, cuyas secciones transversales perpendiculares a un eje se definen mediante una función conocida; por ejemplo, para calcular el volumen de agua en un tramo de un río, el trabajo necesario para llenar un tanque cónico o esférico con un líquido, etcétera. Podrá representar ciertos cálculos con sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ y obtener sus valores con los métodos de la integración. Por ejemplo, identificará el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

con el cálculo del área de una región bajo la gráfica de $y(x) = x^k$ y con la integral

$$\int_0^1 x^k dx$$

Estándar 53. Métodos numéricos de integración

Descripción. El estudiante reconocerá a las particiones y sumas “de Riemann” como aproximaciones a la integral. Comprenderá la necesidad de buscar métodos eficientes para el cálculo aproximado de las integrales. Conocerá algunos métodos específicos: Regla del punto medio, Regla del trapezoide, Regla de Simpson. Aprenderá a aplicar estos métodos con particiones convenientes, realizando las operaciones con una calculadora y programándolas en una computadora. Aprovechará la programación para realizar integraciones numéricas con los métodos estudiados, y comparar la eficacia de unos y otros.

Reconocerá que la idea general de los métodos de integración es la aproximación de una función por medio de funciones escalonadas, lineales por partes, o polinomiales por partes.

Indicadores. El estudiante aplicará la integración numérica en la búsqueda de soluciones adecuadas a un problema dado. Recurrirá a la interpolación para hacer el cálculo cuando sólo dispone de una tabla de datos.

Estándar 54. Otras aplicaciones del cálculo

Descripción. El estudiante reconocerá que los conceptos fundamentales del cálculo –la derivada y la integral– son una herramienta esencial para la modelación de muchos fenómenos.

En algunos casos, estos modelos se expresan a través de una ecuación diferencial (cuando la variable de interés varía continuamente), o bien por medio de una ecuación en diferencias, en el caso de que esté definida en un conjunto discreto. Ejemplos sugeridos: decaimiento radiactivo; fenómenos oscilatorios, como el movimiento armónico forzado y amortiguado; dinámica de poblaciones, como el crecimiento de una población con recursos limitados o las interacciones entre dos especies en competencia (ecuaciones presa-depredador de Lotka-Volterra).

Este estándar propone un acercamiento a las ecuaciones diferenciales y en diferencias, y a sus aplicaciones, en particular a los sistemas dinámicos, usando enfoques cualitativos, por ejemplo utilizando el concepto de espacio fase, y también enfoques numéricos, utilizando la hoja de cálculo y la programación de computadoras.

Indicadores. El estudiante planteará y resolverá problemas relacionados con: decaimiento radiactivo, fenómenos oscilatorios, dinámica de poblaciones, y otros que dan lugar a ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sabrá cómo atacar estos problemas usando métodos numéricos y la computadora. Será capaz de plantear otros modelos, y será consciente de que en muchos caso sólo se pueden obtener soluciones numéricas.

Estándar 55. La campana de Gauss.

Descripción. El estudiante conocerá la distribución normal o campana de Gauss:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Experimentará cómo ésta aparece de manera natural como la distribución de resultados de algunos comportamientos probabilísticos, por ejemplo, la caminata aleatoria o los errores de una medición. Conocerá la característica forma de campana de su gráfica, y entenderá el papel que juegan la media μ y la desviación estándar σ.

Demostrará que el área bajo su gráfica es 1 (lo cual es necesario para que sea una distribución de probabilidad) mediante una aplicación del cálculo del volumen bajo la gráfica de la función de dos variables $e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}$ en todo el plano xy, usando coordenadas polares:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\rho d\theta$$

Esta integral se puede evaluar fácilmente y su valor es $2\pi\sigma^2$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$

lo cual, con un sencillo cambio de variable, demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1$$

para cualquier valor de la media μ.

Descubrirá experimentalmente, por medio de simulaciones, que la distribución de los resultados de, por ejemplo, una caminata aleatoria, converge a la distribución normal (Teorema del límite central) a medida que el tamaño de los ensayos crece.

Sabrá que Karl Friedrich Gauss fue quien descubrió la distribución normal y dio la primera demostración del Teorema del límite central, que asegura que las variables aleatorias independientes se distribuyen de manera normal, es decir, de acuerdo con la campana de Gauss. También sabrá que en las aplicaciones prácticas, cuando se desconoce la distribución de alguna variable aleatoria, como por ejemplo la altura de los miembros de una población, se suele adoptar la hipótesis de que tiene una distribución normal

Indicadores. El estudiante conocerá la fórmula de una distribución normal:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Reconocerá a μ como la media y a σ como la desviación estándar de la distribución, y sabrá interpretar estos parámetros tanto numérica como gráficamente.

Nota. El estilo de este estándar es informal, experimental, gráfico y cultural.

Estándar 56. Introducción a la estadística matemática

Descripción. El estudiante conocerá los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis, como componentes de la Estadística Inferencial. Comprenderá la ventaja de estimar parámetros a partir de la construcción de intervalos y no únicamente con el valor del correspondiente estimador. Conocerá el papel del azar en el muestreo y en el grado de confianza que puede concederse a una estimación. Interpretará intervalos de confianza, estableciendo en ese punto las limitaciones que tenga la estimación; por ejemplo, estimar los tiempos de traslado para los estudiantes de una escuela de sus casas al colegio, a partir de los datos levantados en dos o tres grupos. Adquirirá conceptos de confiabilidad y margen de error y sobre el efecto que la variabilidad y el tamaño de muestra tienen en el análisis estadístico.

Pruebas de hipótesis. El objetivo de este tema es que los alumnos establezcan una hipótesis estadística a probar y que el profesor genere, mediante un programa informático, resultados aleatorios para que los estudiantes pongan a prueba la hipótesis. Por ejemplo, si sobre un grupo de una escuela se aplica un método de enseñanza en un tema específico ¿cómo se puede saber si el aprendizaje logrado es significativamente mejor que el que se obtiene en los grupos donde no se aplica ese método?

Indicadores. El estudiante calculará e interpretará intervalos de confianza para algunos parámetros, estableciendo el nivel de confianza. Explicará los conceptos de margen de error y nivel de confianza. Planteará hipótesis estadísticas para resolver dudas acerca de si los datos de una muestra apoyan o no alguna afirmación sobre la población de la que proviene. Justificará la validez o no validez de una hipótesis estadística y, de ser el caso, establecerá alguna decisión a tomar como consecuencia de su análisis.

2.5. Estándares transversales

Los estándares transversales exponen aspectos de la competencia matemática que no corresponden a conocimientos temáticos concretos sino a formas de pensar y actitudes que deben desarrollarse poco a poco a lo largo de toda la formación del estudiante.

Estándar 57. Destreza algebraica

Descripción. El estudiante adquirirá familiaridad con la notación algebraica, capacidad para aplicarla al planteamiento de problemas, y destreza para manejarla con soltura para resolverlos. Este tema no debe abordarse como contenido de estudio en sí mismo, sino desarrollarse día a día al cubrir otros temas. La manipulación algebraica debe aprenderse como la lengua materna, usándola, no mediante reglas. De esta manera, el estudiante sabrá distinguir naturalmente los diversos elementos de una expresión algebraica (constantes, variables, operadores, símbolos de relaciones o de agrupamiento, etcétera). Conocerá que las expresiones algebraicas tienen las mismas propiedades que sus elementos más simples, que son los números y las literales. Aprenderá a despejar, factorizar, expandir y agrupar expresiones algebraicas. Podrá llevar a cabo manipulaciones algebraicas para resolver problemas concretos, así como para dar demostraciones simples de fórmulas notables.

Indicadores. El estudiante dará nombre a las variables que aparecen en un problema, tanto a las incógnitas como a los parámetros o cantidades conocidas, o supuestamente conocidas, y planteará las relaciones entre dichas variables en términos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones. Tendrá soltura y habilidad para manipular expresiones algebraicas de todo tipo. Podrá deducir por sí mismo las fórmulas de los llamados productos notables, y encontrar factorizaciones de expresiones algebraicas cuando las necesite al enfrentar problemas.

Nota. Este estándar debe abordarse día a día aplicando el álgebra simbólica en donde haga falta, aprovechando los ejemplos de cualquier tema para practicar el planteamiento de ecuaciones y la manipulación algebraica, incrementando cada vez más la destreza, la familiaridad con ella y la comprensión de sus principios. Es el desarrollo de una habilidad, y no un tema de estudio.

Estándar 58. Los conjuntos y el infinito

Descripción. Además de la simbología algebraica que usamos en todas las matemáticas, que se desarrolló a partir del siglo XVI, y la notación simbólica del Cálculo, desarrollada por Leibniz en el siglo XVII, los estudiantes deberán manejar con soltura la simbología moderna y el lenguaje de la Teoría de Conjuntos, desarrollada a finales del siglo XIX, principalmente por Georg Cantor. Sabrá que en un principio fue de difícil aceptación pero acabó por imponerse y permear a todas las áreas de las matemáticas, especialmente su simbología, su manera de escribirse y las representaciones gráficas que suelen hacerse de los conjuntos (llamada diagramas de Venn) que tanto ayudan al pensamiento racional.

El estudiante aprenderá a manejar, de manera intuitiva e informal, el lenguaje de los conjuntos y sus operaciones elementales de unión, intersección y complemento. Aprenderá incluso a aplicar este lenguaje a los conjuntos infinitos. Conocerá las paradojas que llevan a definir los conjuntos infinitos numerables, y a reconocer que todos ellos tienen el mismo número de elementos, en el sentido de que pueden ponerse en correspondencia biunívoca unos con otros. Aprenderá a demostrar que el conjunto de los números racionales es numerable, y que en cambio el de los reales no.

Entenderá con este ejemplo, que las matemáticas están en constante crítica y revisión de sus fundamentos, así como que cuestionan siempre lo primigenio (en este caso el concepto de número), lo cual muchas veces trae avances insospechados (por ejemplo, que hay diferentes infinitos, en particular el de los enteros es igual al de los racionales, pero menor que el de los reales).

Indicadores. El estudiante usará con soltura los conjuntos, sus operaciones básicas de unión, intersección, y complemento. Aplicará el lenguaje de los conjuntos en diversos contextos, y lo aprovechará para plantear y resolver problemas. Podrá manejar el razonamiento lógico a los conjuntos infinitos.

Nota. Al igual que los otros estándares transversales, como el de destreza algebraica, el uso de los conjuntos en cualquier tema de las matemáticas debe hacerse de manera natural, y sin una presentación formal.

Estándar 59. Capacidad de abstracción

Descripción. El estudiante, a lo largo de todo el bachillerato deberá cobrar conciencia de que la abstracción permite aislar los elementos esenciales de una situación, o un problema, para comprenderlo mejor y llegar a soluciones usando el razonamiento lógico. Aprenderá que hay diferentes niveles de abstracción y que todos ellos pueden jugar un papel importante en las matemáticas, la computación y las ciencias tanto naturales como sociales.

Indicadores. El estudiante identificará las abstracciones en los modelos matemáticos y científicos de cualquier área del conocimiento, y creará abstracciones propias en algunas situaciones. Reconocerá los distintos niveles de abstracción, y será capaz de aplicar el razonamiento lógico en cualquiera de ellos.

Estándar 60. Simbología matemática

Descripción. Las matemáticas utilizan muchos símbolos y éstos representan conceptos de manera abreviada. En el lenguaje científico escogemos o inventamos palabras o frases para representar conceptos que necesitan definirse con frases más o menos largas. Por ejemplo la frase *poblaciones en competencia* encierra un concepto complejo: *Dos especies de seres vivos, uno los cuales es presa del otro, el depredador. Sus poblaciones tienen esta relación: cuando hay muchas presas los depredadores se multiplican, ocasionando una disminución en el número de presas, lo cual a su vez causa una disminución en el número de depredadores, que ocasiona un aumento del número de presas y esto vuelve a promover el aumento de los depredadores, con lo que se cierra un ciclo que puede repetirse indefinidamente.*

Usamos la frase *poblaciones en competencia* para referirnos a este concepto, para no tener que repetir la descripción cada vez que queremos utilizarla.

Lo mismo pasa en matemáticas, pero de manera más acusada. Por ejemplo la derivada $\frac{df}{dx}$ de una función $f(x)$ es un símbolo que representa el cálculo del límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si no se le diese un nombre a este concepto y un símbolo fácilmente reconocible, sería muy difícil aprovecharlo. Pero observemos que la propia definición de derivada utiliza otros símbolos como el de límite, el de función, el de cociente, el de la variable x y el parámetro h que se hace tender a 0. Esto es típico en matemáticas, cada concepto suele definirse en términos de otros, y cada uno suele usar símbolos especiales.

Los símbolos especiales hacen que las matemáticas sean incomprensibles para quien no está familiarizado con los conceptos que representan. Pero son necesarios. Sin ellos el lenguaje de las matemáticas sería torpe e ineficiente. Pero no hay que confundir a las matemáticas con sus símbolos. Las matemáticas son abstracciones e ideas, y tanto para representarlas como para manejarlas, muchas veces es necesario usar símbolos especiales.

Indicadores. El estudiante usará con soltura la simbología adecuada en los diversos contextos y la aprovechará para plantear y resolver problemas.

Estándar 61. Capacidad algorítmica

Descripción. El estudiante desarrollará la capacidad no sólo para aplicar algoritmos sino para crearlos y describirlos de manera precisa, e incluso para programarlos.

Cobrará conciencia de la importancia de poder describir, de manera precisa, un procedimiento para realizar un trabajo o resolver un problema, ya sea matemático o de la vida real. La labor del ser humano en torno a los algoritmos ya no es sólo ejecutarlos como hubiera podido ser en épocas pasadas, sino crearlos, entenderlos, mejorarlos, programarlos y verificar que sean correctos.

Debe aprender a abordar los algoritmos como procedimientos tentativos, susceptibles de ser modificados y mejorados. Debe darse cuenta de que no son formas únicas de hacer algo, sino propuestas para ello que son susceptibles de ser corregidas y mejoradas, que se puede intentar hacerlas más eficientes, más sencillas y más confiables.

Este estándar debe desarrollarse día a día reconociendo, analizando, desarrollando y programando algoritmos cada vez que sea posible, en cualquier tema que se esté abordando.

Indicadores. El estudiante adquirirá la capacidad para entender y aplicar algoritmos. Podrá diseñar nuevos algoritmos y describirlos de manera clara y precisa. Usará herramientas conceptuales como la repetición, las ramificaciones y la recursión, tanto para describir como para programar algoritmos.

Nota. La enseñanza de las matemáticas en las últimas décadas, casi se ha limitado a enseñar algoritmos simples y cómo usarlos. En este documento se ha insistido en que ese tipo de enseñanza es incompleto, hay que entender en qué se basan los algoritmos, y el estudiante debe adquirir capacidad para crearlos, más que aprender a ejecutarlos como autómata, para eso ya hay computadoras. Por supuesto, hay unos pocos algoritmos que el estudiante debe saber ejecutar eficientemente, como los de las operaciones aritméticas con decimales o fracciones, que debería dominar desde la Primaria. Pero más allá de ésos, su atención no debe dirigirse a usar algoritmos sino a crearlos.

Estándar 62. Informática y programación

Descripción. El estudiante debe aprender a utilizar las herramientas informáticas en general, por supuesto, pero en lo que respecta a su formación matemática, al menos debe aprender a manejar hojas de cálculo, algún programa que ayuda a entender las matemáticas como por ejemplo Geogebra, Geolab, Mathematica o Descartes; y a programar en algún lenguaje de uso general, como por ejemplo JavaScript.

El uso de la hoja de cálculo puede practicarse en muchos de los temas de manejo de la información y estadística, así como también al estudiar el comportamiento de los modelos basados en relaciones funcionales y ecuaciones en diferencias.

Hay programas informáticos cuyo propósito es ayudar al usuario a entender las matemáticas interactuando con ellas. Es conveniente que el estudiante del Bachillerato los conozca y los aproveche.

Aprender a programar en algún lenguaje de uso general es muy formativo, y puede ser muy útil en casi cualquier campo de actividad, además de que otorga gran poder a quien lo hace. No todos los egresados de bachillerato van a dedicarse a la programación, pero a nadie le viene mal tener la experiencia de haber escrito y echado a andar algunos programas. Este estándar plantea que el estudiante de bachillerato debe adquirir tal experiencia.

Por ejemplo, tendrá ocasión de desarrollar estas habilidades en sus estudios de matemáticas haciendo programas que calculen las soluciones de una ecuación de segundo grado, o las de sistemas de ecuaciones. También podrá hacer programas que:
a) Realicen cálculos numéricos de integrales.
b) Calculen sumas, medias y desviaciones estándar de un conjunto de datos.
c) Efectúen interpolaciones de datos.
d) Simulen, por ejemplo el crecimiento de poblaciones o el comportamiento de poblaciones en competencia y cuerpos en movimiento (tiro parabólico, oscilador armónico, el movimiento de un planeta alrededor del Sol).

Indicadores. El estudiante sabrá utilizar la hoja de cálculo y podrá escribir algunos programas útiles, en algún lenguaje popular de uso general.

Nota. La intención es que el estudiante utilice tanto la hoja de cálculo como la programación a lo largo de sus estudios, tantas veces como sea posible, con el objeto de familiarizarse con ella, y pueda recurrir a ella en su vida futura en cualquier ocasión que le convenga.

Estándar 63. Matemáticas superiores

Descripción. El estudiante debe saber que las matemáticas se han seguido desarrollando más allá de lo que él conoce por sus estudios de Bachillerato o incluso de Licenciatura.

Por ejemplo, sabrá de la importancia que, para la revolución industrial, tuvieron el cálculo y sus aplicaciones a la mecánica, el electromagnetismo y la termodinámica; y las ecuaciones diferenciales para modelar infinidad de cuestiones científicas en campos como la biología, la ecología o la química.

También conocerá el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, la geometría diferencial y la topología, asimismo sabrá de su influencia tanto en la teoría de la relatividad, como en la investigación cosmológica actual.

Podrá describir a grandes rasgos el papel que juegan el álgebra moderna, el análisis funcional y la probabilidad en la mecánica cuántica, que nos ayuda a entender el comportamiento de los átomos; sabrá de la influencia práctica de las matemáticas discretas en todo tipo de aplicaciones de la computación, y de la influencia filosófica de la lógica matemática y los teoremas de Gödel y Turing, que imponen limitaciones al conocimiento alcanzable por el método axiomático.

Entenderá que los grandes avances de la computación en el siglo XX provienen del trabajo de matemáticos como Alan Turing, que supieron crear abstracciones de lo que debería ser una máquina programable, y que gracias a ello se pudieron crear las computadoras electrónicas que usamos en la actualidad.

Sabrá que muchas de las matemáticas que se desarrollan actualmente, tienen importantes aplicaciones en las ciencias naturales y sociales, en la industria de las telecomunicaciones, así como en otras áreas de la actividad humana, y que sus aportaciones al desarrollo de la sociedad, del bienestar y el conocimiento son incalculables.

Indicadores. El estudiante sabrá que las matemáticas se siguen desarrollando, y que su contribución al avance de la sociedad ha sido y sigue siendo de importancia trascendental.

Nota. Se trata de dejar en el estudiante una idea de lo que es el quehacer matemático actual en todos los ámbitos del conocimiento humano, y de su extenso uso en la sociedad moderna.

Estándar 64. Las matemáticas en el arte

Descripción. El estudiante conocerá que la relación de las matemáticas y el arte ha sido siempre muy fructífera en ambos sentidos. Hay infinidad de ejemplos en la historia. Destacan la arquitectura clásica de todas las culturas, la música y la escuela Pitagórica, la proporción áurea (que se manifiesta también en la naturaleza), la perspectiva en la pintura renacentista, etcétera. Pero también hay manifestaciones más recientes, y con el uso de la computadora se han multiplicado, como puede comprobarse tanto en los museos que exhiben obras incluidas por las matemáticas a través de la programación, como en el cine mediante los efectos especiales y los caracteres animados.

A lo largo del Bachillerato se recomienda usar éstos y otros ejemplos como aplicaciones significativas de algunos temas matemáticos. Debe lograrse que el estudiante tenga clara la relación entre matemáticas y arte. También se debe tratar de lograr que el estudiante llegue a apreciar los juicios estéticos tan importantes en las matemáticas como la elegancia de una demostración, la belleza de una idea o la simplicidad y claridad de un argumento.

No debe olvidarse también intentar desarrollar y explotar algo muy relacionado con esto, que es la veta lúdica de las matemáticas.

Indicadores. El estudiante podrá explicar algunos ejemplos de relación entre las matemáticas y el arte, no sólo en el mundo del arte clásico sino en el mundo moderno. Apreciará la elegancia de una demostración, la belleza de una idea y la claridad de un buen argumento.

Capítulo 3

Conclusiones

Consideraciones generales

Aunque no es la intención de este documento definir un programa de estudios, los estándares se han agrupado en tres partes que corresponden vagamente a los tres años del Bachillerato, con la intención de facilitar su posible adopción en futuros planes de estudio.

Álgebra elemental

La manipulación algebraica no se estudia como tema en sí mismo. Su aprendizaje se plantea a través de la geometría, el planteamiento y resolución de problemas, así como en muchos otros temas contemplados en los estándares. La idea es que el álgebra se aprende usándola. Se le ha quitado protagonismo como tema de estudio y en cambio se ha distribuido su uso a lo largo de todo el temario.

Aprecio por las matemáticas

Otro aspecto que vale la pena notar es la apertura de toda una línea de trabajo, dedicada a propiciar una mejor apreciación y apropiación de las matemáticas en los estudiantes. Esta línea incluye sobre todo temas que, siendo de gran relevancia histórica y de gran interés intrínseco, tradicionalmente se han dejado de lado en las matemáticas del bachillerato, en favor de contenidos más técnicos que enfatizan el aprendizaje de procedimientos, los cuales ahora se han disminuido en favor de éstos, en la confianza de que contribuirán mejor a la formación matemática del bachiller.

Repetición con distintos niveles de profundidad

Se hizo un esfuerzo por presentar los conceptos clave de las matemáticas varias veces y con distintos niveles de profundidad, a lo largo de las tres partes que abarca el temario. Por ejemplo el concepto de límite se introduce desde el inicio del temario, en la geometría cuando se calcula el área de la circunferencia, la cuadratura de la parábola y la superficie de la esfera; luego aparece nuevamente al tratar la existencia de una mínima cota superior para un conjunto acotado superiormente; asimismo, se toca al final de la segunda parte cuando se ven las gráficas de funciones, los límites laterales y los límites al infinito. Finalmente, se trata también el concepto de límite al estudiar la derivada y la integral en la tercera parte.

3.1. Primera parte

3.1.1. Actitud positiva hacia las matemáticas

El objetivo de la primera parte es ayudar al estudiante a desarrollar una actitud positiva hacia las matemáticas, y una apreciación de su importancia histórica, cultural, científica y tecnológica. Por tanto, el contenido curricular propuesto para ella, hace mucho énfasis en abordar problemas históricos interesantes que fomentan el uso de la razón, sin la necesidad de recurrir necesariamente a herramientas matemáticas muy elaboradas.

3.1.2. Un orden más o menos histórico

En general podrá apreciarse un orden más o menos histórico en la presentación de los temas, pero con la inserción de algunos cuyo tratamiento es más bien contemporáneo. El objetivo de esta mezcla es mostrar que el pensamiento matemático es muy antiguo, pero completamente vigente. Que lo descubierto e inventado en las matemáticas hace muchos siglos sigue siendo importante hoy, así como que en la actualidad se siguen generando ideas matemáticas básicas y útiles, no sólo a nivel muy especializado sino también a nivel básico.

3.1.3. El concepto de número

El temario comienza con una reflexión sobre el concepto elemental de número, y la utilidad de una simbología adecuada. Apreciar las dificultades a las que se enfrentó la humanidad, con intentos más o menos fallidos, al desarrollar el concepto básico de número y una manera adecuada de referirse a sus instancias concretas, da la oportunidad de reflexionar sobre la profundidad de estos conceptos, las dificultades que uno mismo tiene tanto para entenderlos, como para valorar la importancia y trascendencia del sistema decimal.

3.1.4. La geometría

Se cubre desde la geometría con doblado de papel y las construcciones con regla y compás, pasando por los temas clásicos de la geometría sintética o euclidiana, por la trigonometría y sus aplicaciones a múltiples problemas, y se culmina con un estudio sintético de las secciones cónicas, es decir, sin recurrir necesariamente a la Geometría Analítica. Los problemas de geometría, y en especial los de trigonometría, promueven la habilidad del alumno para plantear problemas por medio de ecuaciones, incluyendo el primer paso que consta en dar nombre a los datos y a las cantidades desconocidas, y le lleva a realizar manipulaciones algebraicas (adquiriendo así habilidad en ellas y reconociendo su importancia), para obtener la solución al problema. Estas habilidades matemáticas son las que más se han echado en falta en los egresados de nuestros bachilleratos, y por ello es importante incluirlos como algo indispensable en su formación. Para enriquecer este tema se recurre también a los cálculos clásicos de las dimensiones del sistema planetario, así como al uso de los vectores en el plano y sus aplicaciones tanto a la estática (descomposición de fuerzas), como a la cinemática (composición de velocidades).

Otro aspecto que podrá notarse en la presentación de los temas de Geometría, es que se retoman dos conceptos que se habían eliminado del currículum del bachillerato. El primero, es el concepto euclidiano de equivalencia de figuras planas lineales a través de su disección, y los movimientos rígidos de sus partes, el cual se presenta y se explota de manera independiente al concepto de área, dentro del cual se había escondido. El otro es el concepto (no numérico) de razón, que es importantísimo y proviene de las matemáticas clásicas, el cual también se hallaba escondido en el de cociente de dos cantidades, y que es tan básico y necesario en casi todas las aplicaciones de las matemáticas, como en la comprensión de muchos conceptos basados en él, como, por ejemplo el de ángulo, el "número" pi, la razón áurea, el concepto de razón de cambio instantáneo y el de derivada. La noción de razón es particularmente importante en la trigonometría, donde hay grandes dificultades para lograr que los alumnos comprendan el concepto de ángulo y aprendan a utilizarlo. Además ya no se habla de razones trigonométricas sino de funciones trigonométricas, con lo que se pierde el significado original del concepto, y gran parte de su aplicabilidad. El hecho de que el concepto de razón nos resulte incómodo, no justifica que lo evitemos. Es incómodo simplemente por la falta de familiaridad que hemos generado al dejar de usarlo.

Se da mucha importancia a la Geometría y a la Trigonometría. Como puede verse la mayor parte del contenido de la primera parte está dedicada a la geometría, incluyendo la trigonometría y sus aplicaciones, así como algo de geometría espacial, pero sin referencia alguna, de momento, a la Geometría Analítica.

3.1.5. La trigonometría

La trigonometría y sus múltiples aplicaciones constituyen una parte considerable del temario de esta primera parte. Hay que remarcar que es a través de problemas significativos, como lo son los geométricos, donde se debe ejercitar y discutir, una y otra vez, el poderío de la notación algebraica actual. Se debe ver, e insistir, en cómo la introducción de literales facilita tanto la comprensión como el desarrollo de un problema, y cómo da lugar a la solución simultánea de múltiples instancias concretas. Con la trigonometría, y en general con problemas significativos, se pueden disipar dudas sobre el enorme poder de la notación algebraica y la manipulación de expresiones.

3.1.6. Cuerpos en el espacio

Abarca también temas de cuerpos en tres dimensiones, y un estudio sintético (sin recurrir a la geometría analítica) de las secciones cónicas, en donde la excentricidad debe tratarse como la razón entre la distancia al foco y la distancia a la directriz de cualquier curva cónica (excepto el círculo). Este tema presenta la demostración de que los cortes de un plano a un cono producen elipses o hipérbolas principalmente, basada en las esferas de Dandelín. Se trata de un ejercicio que requiere desarrollar la imaginación espacial, y utilizar las propiedades básicas de las curvas cónicas. Este tema se incluye por su importancia cultural a la vez que desarrolla el razonamiento espacial.

3.1.7. Propiedades algebraicas de los números

Los sistemas numéricos: naturales, enteros, racionales, reales y complejos, se presentan después de la Geometría euclidiana. En los temas de trigonometría y sus aplicaciones, así como en las matemáticas de la secundaria, ya se han usado los distintos tipos de número (salvo quizás los complejos), así que el objetivo de estos estándares es hacer un resumen señalando especialmente sus propiedades algebraicas.

3.2. Segunda parte

3.2.1. Los números reales y el continuo

La segunda parte se inicia con los números reales enfatizando la propiedad de completitud, que es su característica distintiva respecto a los racionales, y que les hace útiles para representar el continuo. Enseguida se exploran los números reales en la Geometría, de dos y tres dimensiones, a través de los vectores.

3.2.2. Los números complejos

La inclusión de los complejos se hace de dos maneras: primero como puntos del plano con dos operaciones suma y producto (a presentarse en forma totalmente geométrica), las cuales los habilitan como transformaciones de semejanza, y también como números que completan el álgebra de los números reales, permitiendo que todo número tenga raíces, en particular raíz cuadrada. Esto permite que la presentación de las ecuaciones polinomiales pueda incluir temas avanzados de álgebra, a nivel de divulgación, como la existencia de raíces (posiblemente complejas) de cualquier polinomio, y la imposibilidad de dar una solución algebraica a la ecuación general de quinto grado. La presentación de la solución a la ecuación general de segundo grado, queda más robusta y clara aceptando que las ecuaciones con coeficientes reales, a veces tienen soluciones complejas.

3.2.3. La perspectiva

El estudio de la proyección en perspectiva, que nos permite representar objetos tridimensionales en un plano, es uno de los temas explícitamente mencionados en los estándares, incluyéndose tanto por su importancia histórica y práctica, como por el enorme uso que se hace de ello, por ejemplo en la industria de los videojuegos y de la animación por computadora.

3.2.4. Álgebra, ecuaciones y álgebra moderna

La parte de álgebra es algo más avanzada que la de los programas vigentes, pero también más corta. Toca verla al comenzar la segunda parte, y podría darse en poco más de un semestre. Esta parte culmina con potencias, raíces, logaritmos y exponenciales.

3.2.5. Cálculo combinatorio, probabilidad y muestreo

Se incluye el cálculo combinatorio, el cual se aprovecha para entrar al tema de cálculo de probabilidades, y éste a su vez se usa para introducir algunos temas de estadística como la variabilidad de las distribuciones de resultados de experimentos aleatorios, y el problema del muestreo con un estudio de la variabilidad de las estimaciones obtenidas de las muestras, en función del tamaño de la muestra, y de la desviación estándar de la variable bajo estudio.

3.3. Tercera parte

3.3.1. Geometría analítica

La tercera parte comienza con la geometría analítica tradicional básica, cubriendo los temas de la recta y las curvas cónicas con ejes paralelos a los coordenados. Se ven tanto curvas paramétricas como coordenadas polares. Se trata (opcionalmente) el tema de transformaciones rígidas en el plano, y el análisis de la ecuación general de segundo grado con término en xy. Si el tiempo o el nivel del grupo no lo permite, este tema puede cubrirse sólo a nivel cultural, sin detalles técnicos. Todo el tema de Geometría analítica debe cubrirse en aproximadamente la tercera parte del año, para dedicar el resto al Cálculo y sus aplicaciones.

3.3.2. Las funciones

Se incluye el estudio de las funciones algebraicas, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales; así como aplicaciones de las funciones y sus gráficas, en la modelación de fenómenos de tipos muy diversos. Finalmente, se estudian algunos métodos gráficos de solución de problemas de modelación.

3.3.3. El cálculo

El tema del cálculo empieza por la derivada, ilustrado primero con la idea de la pendiente (una razón), de la recta tangente a la gráfica de una función, pasando luego a los conceptos de velocidad y aceleración, incluyendo ejemplos en dos dimensiones como el tiro parabólico y el movimiento circular uniforme. Se introduce la velocidad como una derivada vectorial. Se cubren problemas de máximos y mínimos, tratando el tema de regresión lineal. Después se entra en el tema del problema inverso al de derivación, relacionándolo con el concepto de área bajo la gráfica de una función, es decir la integral definida. Se estudia el Teorema Fundamental del Cálculo, y se utiliza para resolver problemas de integración. Se presentan sólo dos métodos de integración: sustitución e integración por partes. Se trabaja en una amplia variedad de aplicaciones de la integral, con el objetivo de que el estudiante adquiera soltura en plantear cálculos de ciertas cantidades, usando la idea intuitiva de una suma infinita de elementos infinitamente pequeños. Se cubren aplicaciones al decaimiento radiactivo y a la evolución de poblaciones en competencia. Se estudian también algunos métodos numéricos de integración.

3.3.4. La campana de Gauss

Para terminar, se realiza un estudio de la campana de Gauss, calculado su integral y estudiándola como la distribución de probabilidad que más frecuentemente aparece en las aplicaciones.

3.3.5. Pruebas de hipótesis

El último tema pretende aplicar la distribución normal al estudio de un caso, donde se deberá diseñar tanto un experimento, como una prueba de hipótesis, en un contexto accesible y significativo para el estudiante.

3.4. Estándares transversales

En los estándares transversales se subrayan puntos neurálgicos, que deben cultivarse de manera continua y cotidiana, para lograr el aprecio por las matemáticas que se busca en el estudiante. Los primeros hacen explícitas algunas competencias y habilidades esperadas. Los dos últimos son más bien de carácter cultural. Uno pretende dejar claro que las matemáticas han seguido creciendo hasta la actualidad, en tanto que el último indica que hay otras vetas y relaciones, tales como el arte y lo lúdico, que se pueden explotar para motivar a los estudiantes. No se insiste ya en el papel de las matemáticas con las ciencias naturales y sociales, pues ésta queda clara en varios de los estándares. Creemos que estos estándares, en su conjunto, darán al estudiante herramientas y seguridad para enfrentarse al mundo del futuro.

Bibliografía

[1] ABETI, G., *The history of Astronomy*, 1954, pp. 35-40. [En línea. Recuperado de: https://archive.org/details/TheHistoryOfAstronomy, el 6 de septiembre de 2010].

[2] ABREU, J.L., BAROT, M. y BRACHO, J., *Matemáticas, Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales UNAM - Siglo XXI*, Siglo XXI Editores, 2010.

[3] BATANERO, C., *Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué contenidos se debe enseñar en la clase de probabilidad?*. En Fernandes, Sousa & Ribeiro (Orgs.), Ensino e aprendizagem de probabilidade e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidade e Estatística na Escola (pp. 9 – 30). Braga, Portugal, Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2004.

[4] BEN-ZVI, D., *Sacaffolding students' informal inference and argumentation*, 2006, p. 3. [En línea. Recuperado de http://www.researchgate.net/publication/228637727, el 16 de agosto de 2015].

[5] BUTTERFIELD, A. D., *A history of the determination of the figure of the earth from arc measurements* 1906. [En línea. Recuperado de https://archive.org/details/ahistorydetermi00buttgoog, el 23 de abril de 2015].

[6] CHANCE, B. et. al., *The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics*, Technology Innovations in Statistics Education. California, USA. UCLA Department of Statistics, 2007.

[7] Collette, Jean Paul, *Historia de las matemáticas, Vol. I y Vol. II*, Siglo XXI Editores, 1985.

[8] Common Core State Standards FOR Mathematics, 2010. [En línea. Recuperado de http://www.corestandards.org/Math/, el 23 de abril de 2015].

[9] Common Core State Standards Initiative, *Preparing America's Studentes for College & Carrer. High School: Statistics & Probability >> Conditional Probability & the Rules of Probability*. [En línea. Recuperado de: http://www.corestandards.org/Math/Content/HSS/CP/, el 7 de agosto de 2015].

[10] Common Core State Standards Initiative, *Preparing America's Studentes for College & Carrer. High School: Statistics & Probability >> Making Inferences & Justifying Conclusions*. [En línea. Recuperado de: http://www.corestandards.org/Math/Content/HSS/IC/, el 7 de agosto de 2015].

[11] Courant, Richard, *Mathematics in the Modern World*, Scientific American, septiembre de 1964, pp. 40-49.

[12] Davis, P. and Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Birkhauser, 1981.

[13] Devlin, Keith, *The Math Gene, How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books, 1999.

[14] Devlin, Keith, *Introduction to Mathematical Thinking*, Keith Devlin, 2012.

[15] Driver, R. D., *Why Math?*, Springer, 1984.

[16] Dunham, William, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Wiley, 1990.

[17] ERIC ED335228, *Counting on You: Actions Supporting Mathematics Teaching Standards*, Perspectives on School Mathematics, 1991. [En línea. Recuperado de https://archive.org/details/ERIC_ED335228, el 23 de abril de 2015].

[18] ERIC ED478915, *Chattanooga Math Trail*, Community Mathematics Modules, Volume 1, 2003. [En línea. Recuperado de https://archive.org/details/ERIC_ED478915, el 23 de abril de 2015].

[19] Garfield, J., & Ben-Zvi, D., *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching*, New York, Springer, 2008.

[20] Garfield, J., & Ben-Zvi, D., *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching*, New York, Springer, 2008.

[21] Goldenberg, P. et al. : *Making Sense of Algebra: Developing Student's Mathematical Habits of Mind*, Heinemann Portsmouth, NH 2015.

[22] Gravemeijer, K. and Teruel, J: *Hans Freudenthal: A Mathematician on Didactics and Curriculum Theory.*, J. Curriculum Studies, 2000, vol. 32, nº 6 777-796.

[23] Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics, Vol 1. and Vol 2.*, Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[24] Heath, Sir Thomas, *Aristarchus of Samos, the ancient Copernicus; a history of Greek astronomy to Aristarchus, together with Aristarchus's Treatise on the sizes and distances of the sun and moon*, pp. 299-327. [En línea. Recuperado de https://archive.org/details/aristarchusofsam00heat, el 19 de julio de 2011].

[25] Hersh, Reuben, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Advances in Mathematics 31, 1979, pp. 31-50.

[26] Hersh, Reuben, *What Is Mathematics Really?*, Oxford University Press, 1997.

[27] INEE 2013, *México en PISA 2012. 1ª edición.* México: INEE. Recuperado de
http://publicaciones.inee.edu.mx/detallePub.action?clave=P1CI125.

[28] Klein, Felix, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Nivola, 2006 (Originalmente publicado en 1908).

[29] MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPÚBLICA DE CHILE: *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.* Recuperado de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/ 2012.

[30] KLEIN, MORRIS, *Mathemtics in Western Culture*, Oxford University Press, 1953.

[31] KLEIN, MORRIS, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[32] KLEIN, MORRIS, *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI Editores, 2006.

[33] KONOLD, C., *Teaching concepts rather than conventions*, New England Journal of Mathematics, USA, 2002.

[34] LAKATOS, IMRE, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 (Pruebas y refutaciones, Madrid, Alianza, 1981).

[35] MASON, J. and STACEY, K., *Thinking Mathematically, Second Edition*, Pearson, Prentice Hall, 2010.

[36] MATTHEWS, M.R., *Science Teaching. The role of History and Philosophy of Science*, Routledge, 1994.

[37] MEAVILLA, VICENTE, *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros*, Almuzara, 2010.

[38] MEAVILLA, VICENTE, *Eso no estaba en mi libro de matemáticas*, Almuzara, 2012.

[39] MOORE, D.S., *The basic practice of statistics*, 3rd Ed., New York, W. H. Freeman, 2004.

[40] OECD 2013, *PISA 2012 Assesment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

[41] PAENZA, ADRIÁN, *Matemática, ¿estás ahí?*, RBA Ediciones, 2006.

[42] PAENZA, ADRIÁN, *¿Y esto también es matemáticas?*, Random House Mondadori, 2012.

[43] Pfannkuch, M., *Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning*, Statistics Education Research Journal, 5(2), 27-45, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj, International Association for Statistical Education (IASE/ISI), 2006.

[44] Rodríguez, M. I., *Consideraciones acerca de la inferencial informal*, X Congreso de Latinoamericano de Sociedades de Estadística. Córdoba, Argentina, 2012.

[45] Stillwell, John, *Mathematics and its History*, Springer, 2010.

[46] Sultan, A. and Artzt, A., *The Mathematics that Every Secondary School Teacher Needs to Know*, Routledge New York and London, 2011.

[47] SUMEM, *Consideraciones Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM*, [En línea. Primera edición (México), Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM, 2014. Disponible en Internet].

[48] Watson, J., *Statistics in context*, The Mathematics Teacher, Vol. 93, No. 1, January 2000, pp. 54-58. National Council of Teachers of Mathematics, USA, 2000.

[49] Weismann, Friedrich, *Introduction to Mathematical Thinking: The Formation of Concepts in Modern Mathematics*, Dover Publications, Inc. New York, 2003. (Originally published by Friedrich Ungar Co., New York in 1951).

[50] Zieffler, A. et. al., *A framework to support research on informal inferential reasoning*, Statistics Education Research Journal, 7(2), 40-58, International Association for Statistical Education (IASE/ISI), 2008. [En línea. Recuperado de http://www.stat.auckland.ac.nz/serj, el 16 de agosto de 2015].