



MATEMÁTICAS

Seminario Universitario para la Mejora
de la Enseñanza de las Matemáticas

**Secuencia didáctica
Estadística y probabilidad con Fathom**

Presentación

Esta secuencia didáctica está diseñada con el propósito de explorar algunos conceptos de estadística y probabilidad por medio de la sistematización y la simulación con el paquete Fathom. A partir de esta exploración que realicen los alumnos, se derivan otras secuencias relacionadas enfocadas a la construcción de conceptos de estadística descriptiva y probabilidad.

Todas las secuencias están organizadas con actividades de apertura, desarrollo y cierre, mediante las cuales se pretende plantear problemas a los estudiantes que los lleven al descubrimiento o reconstrucción de los conceptos que se desea enseñarles. Durante el desarrollo de las actividades, los estudiantes guardarán algunas evidencias de aprendizaje en portafolios electrónicos individuales, para favorecer la evaluación del proceso de aprendizaje.

Ficha técnica

Escuela Nacional Preparatoria

Colegio de Ciencias y Humanidades

Tema

Objetivos

Estadística y Probabilidad

Estadística y Probabilidad I

Medidas de tendencia central y de dispersión

- Explorar la Regla Empírica dentro de un paquete computacional, a partir de una serie de datos, con el fin de tomar una decisión dentro de un cierto contexto.
- Explorar, por medio de la simulación física y de la simulación en un paquete computacional, la idea de la ruina del jugador.
- Explorar, por medio de la simulación física y la modelación en un paquete computacional, la idea de los paseos aleatorios.
- Sentar las bases para la comprensión de conceptos de probabilidad y para el uso del paquete Fathom.

Contenidos

Medidas de tendencia central y de dispersión.

Gráficos.

Ruina del jugador.

Duración	Paseos aleatorios. Uso de Fathom. Una sesión de 120 minutos.
Población	Alumnos de quinto semestre del CCH y de sexto año de la ENP, inscritos en la materia de Estadística y Probabilidad. Grupos de aproximadamente 50 alumnos.
Recursos	Hojas de papel con las secuencias, computadoras con el paquete Fathom.
Autor	Grupo de Formación de Profesores del SUMEM, Seminario Universitario para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas.

Actividad de apertura

Actividad 1:

Recursos: Hojas de papel con la actividad, computadoras con el paquete Fathom, proyector.

Plantéese a los estudiantes la siguiente actividad:

1. *A continuación de muestran los tiempos requeridos en la preparación de un huevo tibio, medidos en segundos:*

145.508	154.398	140.834	145.955	156.542
150.16	135.295	143.886	161.401	143.535
149.994	160.515	158.971	135.874	150.397
140.664	139.029	136.582	149.046	152.038
141.044	155.414	158.968	150.689	140.518
147.48	157.516	143.852	142.71	143.958
143.866	144.001	161.025	157.484	151.714
166.166	150.963	139.204	141.54	150.319
148.73	154.433	139.32	153.828	158.652
154.448	139.942	151.393	157.09	138.381

2. *Usando Fathom, describe gráficamente la distribución de los tiempos, calcula la media y la desviación estándar.*
3. *Usando los datos del punto 2, indica cuál sería el tiempo máximo de cocción sugerido para preparar un huevo tibio, dando la justificación estadística.*

Tutorial de Fathom:



a) Abre el paquete con el icono



b) Arrastra el icono New Collection, **Collection**, localizado en la parte superior de la ventana de Fathom al área de trabajo. Haciendo doble clic sobre la palabra Collection puedes cambiar el nombre. Por ejemplo, puede renombrarse como Huevo.



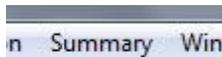
c) Arrastra el icono New Case Table, **Table**, al área de trabajo.

d) En la tabla, haz clic sobre **<new>** y asigna un nombre a la variable. Puede ser Segundos, por ejemplo. Evita usar caracteres especiales.

e) Captura los datos de los tiempos del mismo modo en el que se haría en cualquier hoja de cálculo.



f) Arrastra la tabla New Summary Table, **Summary**, al área de trabajo. Luego arrastra el nombre que le hayas dado a la variable desde la tabla de datos a la tabla Summary.



g) Abre el menú Summary, , y elige la opción Add Basic statistics.



h) Para graficar, arrastra el icono New Graph, **Graph**, al área de trabajo, y luego arrastra el nombre de la variable desde la tabla hasta la horizontal del espacio gráfico que acabas de colocar. Posteriormente, abre la pestaña superior derecha de la gráfica y elige la opción Histogram.



Pida a algunos de los alumnos que proyecten su propuesta desde una de las computadoras, ayudándose de una memoria USB si es necesario.

Discútase con el grupo la forma de la distribución y las justificaciones que se den a la respuesta de la pregunta tres. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres justificaciones diferentes para que sean compartidas con todo el grupo. Haga la selección teniendo en cuenta que sean justificaciones diferentes y no necesariamente correctas.



Lo importante es llegar a justificar el tiempo pedido por medio de la Regla Empírica, validando su aplicación por la simetría en la distribución.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla en el problema, de modo tal que pueda establecerse que el uso de la Regla Empírica es válido, además

de que los estudiantes mostrarán que son capaces de explicar con claridad y certeza una situación de tipo estadístico.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia del archivo Fathom desarrollado.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

Actividades de desarrollo

Actividad 2:

Recursos: Hojas de papel con la actividad, computadoras con el paquete Fathom, proyector, monedas y cuentas de plástico.

Propóngase al grupo la siguiente situación, y solicíteles que la realicen por equipos:

1. *Dividan el equipo en dos, y a cada una de estas dos partes asígnesele 10 bolitas de plástico. Ahora lancen la moneda; si sale águila, la parte uno obtiene una de las piezas de la parte dos; si sale sol, la parte dos obtiene una de las piezas de la parte uno. El juego acaba cuando una de las partes se queda sin piezas. Lleven la cuenta del número de volados lanzados.*
2. *¿En cuántos volados terminó el juego?*

3. *Lancen un nuevo volado, para decidir cuál de las dos partes del equipo será “la casa” y cuál “el jugador”. Quien gane el volado será “la casa”.*
4. *La parte que corresponde a “el jugador” toma 10 bolitas. “La casa” toma otra diez, pero si las agota al repetir el juego del punto 1, podrá pedir más. El juego termina, de nuevo, hasta que alguna de las partes pierda todas sus piezas.*
5. *¿Qué ocurrió en esta nueva partida?*

6. ¿A qué creen que se deban estos resultados?

Discútese con el grupo las respuestas. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres respuestas diferentes para que sean compartidas con todo el grupo. Haga la selección teniendo en cuenta que sean justificaciones diferentes y no necesariamente correctas.



Lo importante es llegar a señalar que en el primer juego el “jugador” pudo vencer a la “casa”, pero que esto no ocurrió en el segundo juego. Al final, deberá concluirse que esto se debe a los recursos ilimitados de la “casa” en el segundo juego.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla en el problema, de modo tal que pueda establecerse que la “casa”, al tener recursos ilimitados, termina arruinando al jugador.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de la representación desarrollada por su equipo en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

Ahora solicite al grupo que, por parejas, simulen y representen en Fathom la situación del juego. Sugiera que usen la representación gráfica de puntos, orientándolos en lo necesario con el manejo del paquete.

Observe los procedimientos que va desarrollando cada pareja. Debe tenerse cuidado en el uso adecuado del paquete. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres proyectos diferentes para que sean compartidas con todo el grupo. Haga la selección teniendo en cuenta que sean proyectos diferentes y no necesariamente correctos.



Lo importante es llegar a una representación que muestre efectivamente la ruina de alguno de los jugadores, y del jugador contra la “casa”.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla, de modo tal que pueda establecerse que su proyecto efectivamente es válido, además de que los estudiantes mostrarán que son capaces de explicar con claridad y certeza una situación estadística por medio de Fathom. Ayude a los estudiantes a observar que cada proyecto efectivamente simule la situación de la ruina.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia del proyecto Fathom desarrollado por su equipo en sus portafolios individuales.



Es muy importante que no se valide ninguna de las simulaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

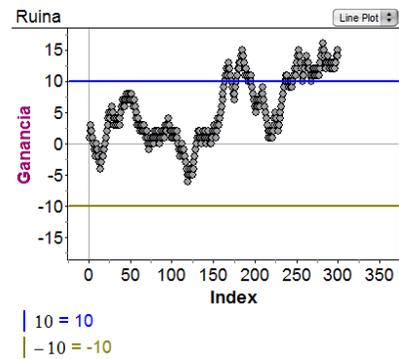


Pida al equipo que proyecte su propuesta desde una de las computadoras, ayudándose de una memoria USB si es necesario.

Seguramente habrá distintos proyectos. Discútase con el grupo cuál de todas las propuestas parece ser la más clara de leer y de explicar.

Finalmente el profesor propondrá el siguiente proyecto, en caso dado de que no haya sido propuesto por ninguno de los equipos:

Ruina		Paso	Ganancia	<new>
=		randomPick (-1, 1)	if (Paso = -1) { prev (Ganancia) - 1 prev (Ganancia) + 1	
1		1		1
2		1		2
3		1		3
4		-1		2
5		-1		1
6		-1		0
7		-1		-1
8		-1		-2
9		1		-1
10		1		0



Recuerde que usando el comando Ctrl+y puede generarse nuevas simulaciones dentro del proyecto. Esto permitirá discutir más a detalle la idea de la ruina del jugador. Posteriormente, pida a los estudiantes que redacten un pequeño reporte de las conclusiones obtenidas, y que lo conserven en sus portafolios.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de su reporte respecto a las conclusiones obtenidas.

Para saber más



La ruina del jugador

En todos aquellos juegos de azar cuya marcha se basa en que los participantes deben apostar alguna cantidad de dinero para poder seguir jugando, es previsible que tarde o temprano alguno de los participantes terminará quedándose con el dinero de todos sus oponentes, o que a éstos se les irá agotando el dinero y ya no podrán seguir participando en el juego, casos en los cuales el juego puede considerarse terminado tanto para los unos como para los otros.

En el campo de las matemáticas siempre ha existido interés por calcular cuáles son las probabilidades que un jugador enfrentado a otro tiene de terminar a largo plazo en una situación en la cual ya no dispone de más dinero para seguir participando en el juego, situación que se conoce como el estado de «Ruina del Jugador».

Para poder realizar estos cálculos es necesario tener en cuenta la cantidad total de dinero que al inicio tiene disponible el jugador para apostar (conocido como el Capital Inicial), y además se debe tener en cuenta si el juego en cuestión en que participan los apostadores se basa en el «Equilibrio Equitativo» para todos ellos o si se trata de un juego en el que se establece alguna Ventaja Matemática a favor de alguno de los participantes.

<http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Ventaja-Matematica-Juegos-de-Azar/Teoria-Ruina-del-Jugador-Comprobacion-Matematica.htm>

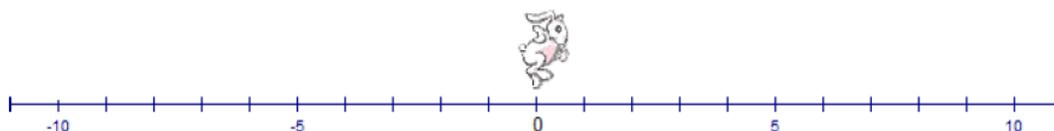
Actividad de cierre:

Actividad 3:

Recursos: Hojas de papel con la actividad, computadoras con el paquete Fathom, proyector, monedas.

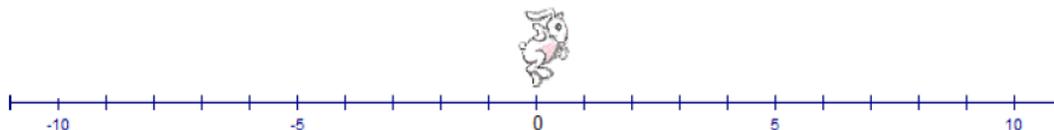
Solicite a los alumnos trabajar la siguiente actividad por parejas:

1. *Tómese la siguiente recta numérica como referencia.*



2. *Si se lanzara una moneda 30 veces y, tomando el cero como punto de partida, por cada sol se avanzara un punto a la izquierda, y por cada águila se avanzara un punto a la derecha, ¿en qué punto de la recta numérica esperarían terminar (si no están seguros de algún valor, puede especularse si se estará cerca del cero o lejos del cero)? Justifiquen su respuesta.*

3. *Realicen ahora el experimento. Si es necesario, se puede extender la recta.*



4. *¿En qué punto terminaron?*

5. *Comparen la respuesta 4 con su conjetura en la pregunta 2. ¿Qué puede concluirse?*

Discútase con el grupo las respuestas. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres respuestas diferentes para que sean compartidas con todo el grupo.



Lo importante es mostrar, paso por paso, el comportamiento del paseo aleatorio que realizaron, y si en los equipos se observó coincidencia entre la conjetura del punto 2 de la actividad y el resultado de la experimentación señalado en el punto 4.

Al presentar sus resultados ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla en la actividad, de modo tal que pueda establecerse si la simulación corresponde al planteamiento dado.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de la experimentación desarrollada por su equipo en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

Ahora solicite al grupo que, por parejas, simulen y representen en Fathom la situación del paseo aleatorio, no solo para la recta, sino para el plano. Sugiera que usen la representación gráfica de puntos, orientándolos en lo necesario con el manejo del paquete.

Observe los procedimientos que va desarrollando cada pareja. Debe tenerse cuidado en el uso adecuado del paquete. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres proyectos diferentes para que sean compartidas con todo el grupo. Haga la selección teniendo en cuenta que sean proyectos diferentes y no necesariamente correctos.



Lo importante es llegar a una simulación que permita observar el comportamiento de un paseo aleatorio en una y dos dimensiones.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla, de modo tal que pueda establecerse que su proyecto efectivamente es válido, además de que los estudiantes mostrarán que son capaces de explicar con claridad y certeza una situación estadística por medio de Fathom. Ayude a los estudiantes a observar que cada proyecto efectivamente simule la situación de los paseos aleatorios.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia del proyecto Fathom desarrollado por su equipo en sus portafolios individuales.



Es muy importante que no se valide ninguna de las simulaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.



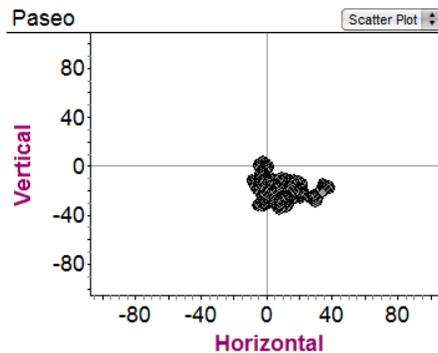
Pida al equipo que proyecte su propuesta desde una de las computadoras, ayudándose de una memoria USB si es necesario.

Seguramente habrá distintos proyectos. Discútase con el grupo cuál de todas las propuestas parece ser la más clara de leer y de explicar.

Finalmente el profesor propondrá el siguiente proyecto, en caso dado de que no haya sido propuesto por ninguno de los equipos:

Paseo

	Uno	Dos	Horizontal	Vertical
=	randomInteger (1, 2)	randomInteger (1, 2)	if (Uno = 1) { prev (Horizontal) - 1 prev (Horizontal) + 1	if (Dos = 1) { prev (Vertical) - 1 prev (Vertical) + 1
1	1	2	-1	1
2	2	2	0	2
3	1	2	-1	3
4	1	2	-2	4
5	1	1	-3	3
6	1	1	-4	2
7	2	1	-3	1



Recuerde que usando el comando Ctrl+y puede generarse nuevas simulaciones dentro del proyecto. Esto permitirá discutir más a detalle la idea de los paseos aleatorios. Posteriormente, pida a los estudiantes que redacten un pequeño reporte de las conclusiones obtenidas, y que lo conserven en sus portafolios.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de su reporte respecto a las conclusiones obtenidas.

¿Qué aprendimos?

1. El uso de la tendencia, variabilidad y distribución al analizar una variable estadística.
2. Aplicaciones de la Regla Empírica a problemas reales, y sus limitaciones.
3. Uso de Fathom para sistematizar información estadística.
4. La ruina del jugador.
5. El comportamiento de los paseos aleatorios.
6. Simulación con Fathom.
7. Argumentar sobre la base de datos estadísticos.

Evaluación

La evaluación se llevará a cabo con la revisión de los portafolios de evidencias. Estos portafolios se fueron construyendo durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Cada estudiante fue guardando las soluciones propuestas para los problemas, ya sea por equipos o individuales. Al finalizar la secuencia pida a los estudiantes que formen parejas para revisar el contenido de los portafolios de cada uno. Para la revisión, harán uso de los siguientes lineamientos:

- 1.- Verificar que el portafolio contiene todas las evidencias indicadas.
- 2.- Analizar los procedimientos desarrollados para dar solución a las actividades 1,2 y 3: ¿cambiaron la manera de trabajar con datos estadísticos? ¿Les sirvieron las formas de representación para responder a la pregunta de la actividad 1? ¿La simulación con Fathom les permitió dar una conclusión sólida sobre la ruina del jugador y el comportamiento de los paseos aleatorios?
- 3.- Elaborar un texto breve donde expresen lo aprendido en esta secuencia didáctica.

Pida a algunas parejas de estudiantes que compartan el análisis de sus respectivos portafolios.

Lecturas recomendadas

Recursos en Internet:

Libros maravillosos. Gardner, M. *Circo matemático*.

<http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/index.html>, revisado el 24 de junio de 2014.

Malkiel, B. *Un paseo aleatorio por Wall Streer: La estrategia para invertir con éxito*. Alianza Editorial. 2008

Referencias

Finzer, William. *Fathom Dynamic Data Software*, version 2.1. KCP Technologies Inc., 2007.

Libros maravillosos. Gardner, M. *Circo matemático*.

<http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo06.html>, revisado el 24 de junio de 2014.

Libros maravillosos. Gardner, M. *Circo matemático*.

<http://www.librosmaravillosos.com/circomatematico/capitulo07.html>, revisado el 24 de junio de 2014.

Eye in the sky. <http://www.eyeintheskygroup.com/Azar-Ciencia/Ventaja-Matematica-Juegos-de-Azar/Teoria-Ruina-del-Jugador-Comprobacion-Matematica.htm>, revisado el 24 de junio de 2014.

Iconos



Recomendaciones para el profesor



Información adicional, para saber más.



Recomendaciones para el uso de tabletas o teléfonos.



Indicación de registro de evidencias en un portafolios.



Indicación de trabajo en salón de cómputo.