



MATEMÁTICAS

Seminario Universitario para la Mejora
de la Enseñanza de las Matemáticas

Secuencia didáctica
Lewis Carroll

Presentación

Esta secuencia didáctica está diseñada con el propósito de posibilitar que los estudiantes sistematicen datos estadísticos por medio de tablas de doble entrada. A partir de esta sistematización que realicen los alumnos, se construirán los procesos para el cálculo de probabilidades para diferentes tipos de eventos, así como los conceptos de dependencia e independencia probabilística.

Todas las secuencias están organizadas con actividades de apertura, desarrollo y cierre, mediante las cuales se pretende plantear problemas a los estudiantes que los lleven al descubrimiento o reconstrucción de los conceptos que se desea enseñarles. Durante el desarrollo de las actividades, los estudiantes guardarán algunas evidencias de aprendizaje en portafolios electrónicos individuales, para favorecer la evaluación del proceso de aprendizaje.

Ficha técnica

Escuela Nacional Preparatoria

Colegio de Ciencias y Humanidades

Tema

Objetivos

Estadística y Probabilidad

Estadística y Probabilidad I

Probabilidad

- Utilizar las tablas de doble entrada para representar dos variables aparejadas, dentro de alguna situación.
- Usar las tablas de doble entrada para el cálculo de probabilidades.
- Sentar las bases para la comprensión de conceptos de probabilidad, tales como eventos, evento simple, evento compuesto, unión de eventos, intersección de eventos, eventos complementarios, eventos condicionados y su cálculo de probabilidad.
- Conocer la llamada *Falacia del fiscal*.

Contenidos

Tablas de doble entrada, eventos, evento simple, evento compuesto, unión de eventos, intersección de eventos, eventos complementarios, eventos condicionados, cálculo de probabilidades para eventos simples y compuestos, la Falacia del fiscal.

Duración	Dos sesiones de 120 minutos cada una.
Población	Alumnos de quinto semestre del CCH y de sexto año de la ENP, inscritos en la materia de Estadística y Probabilidad. Grupos de aproximadamente 50 alumnos.
Recursos	Hojas de papel, lápices, calculadoras, computadoras con editor de texto, proyector, pizarrón o pantalla, gises, proyector.
Autor	Grupo de Formación de Profesores del SUMEM, Seminario Universitario para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas.

Actividad de apertura

Actividad 1

Recursos: Hojas de papel, lápices, calculadoras, pizarrón y gis o proyector, pantalla y computadora.

En la primera actividad de esta secuencia se plantea a los estudiantes la siguiente situación:

Lewis Dodgson tenía 18 amigas. Nueve eran rubias y nueve morenas, siete tenían los ojos azules y once los tenían oscuros. ¡Ah, y seis eran rubias y de ojos oscuros! ¿Cómo eran las amigas del profesor Dodgson?



Si cuentan con tabletas, comparta el problema con Evernote para que los estudiantes puedan verlo desde sus dispositivos.

Primeramente deberá dividirse al grupo en equipos de aproximadamente cinco estudiantes, para que trabajen la actividad. Cada equipo recibirá una copia de la situación referente a las amigas del profesor Dodgson.

Solicite a los alumnos que busquen vías de representación que sean tanto claras de leer como de construir.

Observe los procedimientos que va desarrollando cada equipo. Debe tenerse cuidado que en las sistematizaciones exista una adecuada representación de la relación entre variables. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres representaciones diferentes para que sean compartidas con todo el grupo. Haga la selección teniendo en cuenta que sean representaciones diferentes y no necesariamente correctas.



Lo importante es llegar a una representación tabular de doble entrada en la que puedan verse las características de las amigas del profesor Dodgson, en cuanto a color de cabello y de ojos.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán detallar la situación en su presentación, de modo tal que pueda establecerse que su representación efectivamente es válida, además de que los estudiantes mostrarán que son capaces de explicar con claridad y certeza una situación por algún medio descriptivo. Ayude a los estudiantes a observar que cada representación efectivamente muestre lo que dice el enunciado sobre las amigas del profesor Dodgson.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de la representación desarrollada por su equipo en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.



Si cuentan con tabletas, pida al equipo que proyecte su propuesta desde el dispositivo.

Seguramente habrá distintas representaciones, y no necesariamente tabulares. Discútase con el grupo cuál de todas las propuestas parece ser la más clara de leer y de explicar.

Finalmente el profesor propondrá la siguiente tabla, en caso dado de que no haya sido propuesta por ninguno de los equipos:

	Chicas rubias	Chicas morenas	TOTAL
Ojos azules	3	4	7
Ojos oscuros	6	5	11
TOTAL	9	9	18

Plantee al grupo si esta representación efectivamente describe lo que arroja el reporte sobre puntualidad de las aerolíneas.

Actividades de desarrollo

Actividad 2:

Recursos: Hojas de papel, lápices, calculadoras, pizarrón y gis o proyector, pantalla y computadora.

En esta segunda actividad de esta secuencia se plantea a los estudiantes la siguiente situación:

El señor Charles Lutwidge Carroll coleccionaba marionetas y tenía veinte. Ocho eran de animales y doce de personas, seis eran grandes y ocho eran de personas y pequeñas. ¿Cómo eran todas las marionetas del señor Carroll?



Si cuentan con tabletas, comparta el problema con Evernote para que los estudiantes puedan verlo desde sus dispositivos.

Primeramente deberá dividirse al grupo en equipos de aproximadamente cinco estudiantes, para que trabajen la actividad. Cada equipo recibirá una copia de la situación referente a las marionetas del señor Carroll. El profesor deberá buscar la siguiente representación:

	Chicas	Grandes	TOTAL
Personas	8	4	12
Animales	6	2	8
TOTAL	14	6	20

Solicite a los alumnos que aprovechen la vía de representación que aprendieron en la Actividad 1. Posteriormente plantee al grupo la siguiente pregunta:

¿En qué proporciones se presentan los diferentes tipos de marionetas en la colección del señor Carroll?

Observe los procedimientos que va desarrollando cada equipo para dar respuesta a la pregunta. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres propuestas diferentes para que sean compartidas con todo el grupo, aunque no necesariamente correctas.



Lo importante es llegar a una representación tabular en la que puedan verse las características de las marionetas del señor Carroll, en cuanto a tamaño y si son de personas o de animales, por porcentajes.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán detallar la situación en su presentación, de modo tal que pueda establecerse que los estudiantes son capaces de explicar con claridad y certeza una situación modificando o ampliando algún medio descriptivo. Ayude a los estudiantes a observar que cada representación efectivamente muestre lo que dice el enunciado sobre las marionetas del señor Carroll.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de la representación desarrollada por su equipo en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.



Si cuentan con tabletas, pida al equipo que proyecte su propuesta desde el dispositivo.

Seguramente habrá distintas representaciones. Discútase con el grupo cuál de todas las propuestas parece ser la más clara de leer y de explicar.

Finalmente el profesor propondrá la siguiente tabla, en caso dado de que no haya sido propuesta por ninguno de los equipos:

	Chicas	Grandes	TOTAL
Personas	0.4	0.2	0.6
Animales	0.3	0.1	0.4
TOTAL	0.7	0.3	1

Plantee al grupo si esta representación efectivamente describe el porcentaje para cada tipo de marionetas que tiene el señor Carroll.

Para saber más



Charles Lutwidge Dodgson, a. Lewis Carroll

1832-1898. Matemático, profesor de matemáticas y escritor británico.

Charles Lutwidge Dodgson era el nombre verdadero del autor de las "Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas" (Alice's Adventures in Wonderland), y de "A través del Espejo" (Through the Looking Glass). Nacido en Daresbury, Inglaterra, era el mayor de 11 hijos: cuatro varones y siete niñas. A los 18 años, ingresó en la Universidad de Oxford, en la que permaneció durante cerca de 50 años, y en la que obtuvo el grado de bachiller y se recibió de preceptor. Fue ordenado diácono de la Iglesia Anglicana y enseñó Matemáticas a tres generaciones de jóvenes estudiantes de Oxford, y lo que es más importante, escribió dos de las más deliciosas narraciones que se han producido en el campo de la literatura.

Vivió 66 años tan tranquilamente como puede hacerlo cualquier otro hombre, y el trabajo y ocupación de su vida, así como su diversión favorita, fueron las Matemáticas. Padeció, de insomnios durante toda su existencia, y pasaba noches enteras despierto, con los arduos problemas matemáticos dando vueltas en su cabeza, y tratando de descifrarlos. Escribió diversos libros sobre la materia y el más interesante de ellos se titula: Euclides y sus modernos rivales.

Sus cuentos vieron la luz con el seudónimo Lewis Carroll. La Alicia real y verdadera era la hija de su amigo el diácono Liddell, la cual, mucho más tarde, relató cómo esos cuentos caprichosos que aún deleitan a los lectores de todas las edades y de todos los países les fueron referidos a ella y a sus dos hermanas.

Otras publicaciones de Lewis Carroll son: La caza del Snark (The Hunting of the Snark) (1876) y el cuento poco leído Silvia y Bruno 1889 y 1893.

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Dodgson.html>

<http://mapasdecostarica.info/alicia/carroll.htm>

Actividad 3:

Recursos: Hojas de papel, lápices, calculadoras, pizarrón y gis o proyector, pantalla y computadora, tabla de resultados obtenida al final de la **Actividad 2**.

Presente al grupo la tabla obtenida al final de la **Actividad 2**, y discútase sobre la viabilidad de manejar las proporciones como valores de probabilidad.

	Chicas	Grandes	TOTAL
Personas	0.4	0.2	0.6
Animales	0.3	0.1	0.4
TOTAL	0.7	0.3	1

Posteriormente, solicite a los estudiantes que señalen y justifiquen los valores de probabilidad de que al elegir una de las marionetas del señor Carroll, esta sea:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
P(De persona)=	
P(Chica)=	
P(De animal)=	
P(Grande)=	

Observe los procedimientos que va desarrollando cada equipo para dar respuesta al ejercicio. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres propuestas diferentes para que sean compartidas con todo el grupo, aunque no necesariamente correctas.



Lo importante es llegar a los valores de probabilidad y las justificaciones pertinentes.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán detallar la justificación a sus respuestas. Ayude a los estudiantes a observar que cada valor efectivamente muestre las probabilidades para las marionetas del señor Carroll. Finalmente, los resultados e ideas deberán apuntar a algo como esto:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{De persona})=0.6$	De acuerdo con la tabla, 0.6 o 60% de las marionetas del señor Carroll son de personas.
$P(\text{Chica})=0.7$	De acuerdo con la tabla, 0.7 o 70% de las marionetas del señor Carroll son chicas.
$P(\text{De animal})=0.4$	De acuerdo con la tabla, 0.4 o 40% de las marionetas del señor Carroll son de animal.
$P(\text{Grande})=0.3$	De acuerdo con la tabla, 0.3 o 30% de las marionetas del señor Carroll son grandes.

Una vez que se han agotado las discusiones, solicite al grupo calcular las siguientes probabilidades, dando ahora dos justificaciones diferentes:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN 1	JUSTIFICACIÓN 2
$P(\text{No sea de persona})=$		
$P(\text{No sea chica})=$		

Tras las discusiones, deberá llegarse a una propuesta similar a esta:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN 1	JUSTIFICACIÓN 2
$P(\text{No sea de persona})=0.4$	De acuerdo con la tabla, 0.4 o 40% de las marionetas del señor Carroll son de animal.	El 60% de las marionetas son de personas. No lo serán el 40% restante.
$P(\text{No sea chica})=0.3$	De acuerdo con la tabla, 0.3 o 30% de las marionetas del señor Carroll son grandes.	El 70% de las marionetas son grandes. No lo serán el 30% restante.

El siguiente cálculo de probabilidad, con su justificación, es el siguiente:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{De animal Y Grande})=$	

Al final, la propuesta sería similar a esta:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{De animal Y Grande})=0.1$	De acuerdo con la tabla, 0.1 o 10% de las marionetas del señor Carroll son de animales y grandes.

Posteriormente se planteará la siguiente situación, en la que nuevamente se calculará un valor de probabilidad y se dará una justificación:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{De animal O Grande})=$	

Tras la discusión grupal, la propuesta de solución deberá ser similar a esta:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{De animal O Grande})=0.6$	De acuerdo con la tabla, 0.4 o 40% de las marionetas del señor Carroll son de animal y 0.3 o 30% de ellas son grandes. Dentro de ese primer 40% se considera al 0.1 o 10% de las marionetas que son de animal y grandes; pero dentro del 0.3 o 30% igualmente se considera ese 0.1 o 10% de marionetas de animal y grandes. Al juntar el 0.4 o 40% de marionetas de animal con el 0.3 o 30% de las marionetas grandes, se está tomando dos veces el 0.1 o 10% de las marionetas de animal y grandes, por lo que habrá que retirar una vez el 0.1 o 10%: $0.4+0.3-0.1=0.6$.

Por último, se pedirá el siguiente cálculo de probabilidades con su justificación:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{Grande DADO QUE la marioneta es de animal})=$	

La propuesta final debe ser semejante a esto:

PROBABILIDAD	JUSTIFICACIÓN
$P(\text{Grande DADO QUE la marioneta es de animal})= 0.25$	Se da por hecho que la marioneta es de animal; es decir, es una de las que representan al 0.4 40% de las marionetas del señor Carroll. Por otro lado, de esas marionetas de animal, se sabe por la tabla que el 0.1 o 10% son grandes. Por lo tanto, la probabilidad pedida será $0.1/0.4$.

Por último, deberán retomarse los resultados de las discusiones para hacer un breve resumen de los tipos de eventos, su relación con el espacio muestral y el cálculo de sus probabilidades.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de los resultados en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Lo importante es justificar los cálculos, y usar estas justificaciones para institucionalizar a los diferentes tipos de eventos y las vías para calcular sus probabilidades. Igualmente, deberás ampliarse las consideraciones respectivas a la probabilidad condicional.



Es muy importante que no se valide ninguna de las propuestas, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

Actividad 4:

Recursos: Hojas de papel y lápices o plumas, o computadoras con procesador de texto resultados obtenidos de la **Actividad 3**.

Pida a los alumnos, que por equipos de cuatro o cinco integrantes escriban un resumen con respecto a lo visto en las actividades de desarrollo. Posteriormente deberán exponerlo brevemente en clase y discutirlo con el grupo.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia del resumen desarrollado por su equipo en sus portafolios individuales.

Actividad de cierre:

Actividad 5:

Recursos: Hojas de papel y lápices, calculadora.

Presente al grupo la siguiente situación:

Supongamos que se ha cometido un delito y se encuentra una muestra de material genético (como sangre) en la escena del crimen. Esta muestra se compara con los datos disponibles en 20000 casos de los registros policiales y se encuentra una coincidencia entre el ADN de la muestra y el de la persona A, cuyos datos figuran en los registros. Supongamos que la probabilidad de encontrar una persona al azar con este tipo de ADN es solo 1 entre 10,000. ¿Podemos considerar que la persona A es la culpable del delito?

Pida a los alumnos organizarse en grupos de cuatro o cinco estudiantes, y observe los procedimientos que va desarrollando cada equipo. Debe orientarse al alumno de modo tal que explore la idea de evento complemento. Si tiene muchos estudiantes seleccione dos o tres resultados diferentes para que sean compartidos con todo el grupo. Haga la selección

teniendo en cuenta que sean resultados o procesos de cálculo diferentes y no necesariamente correctos.



Lo importante es llegar al cálculo de la probabilidad utilizando la idea de complemento y la regla del producto, misma que deberá ir apareciendo a lo largo de los desarrollos de los equipos.

Al presentar sus propuestas ante el grupo, deberán explicar la situación que se detalla, de modo tal que pueda establecerse el valor de probabilidad correspondiente a situación presentada. Ayude a los estudiantes a observar que cada propuesta efectivamente muestre lo que dice el enunciado del caso policiaco.

Finalmente, en caso de que el resultado no se presente, dirija al grupo, por medio de la discusión y la lluvia de ideas a la respuesta:

$$1 - \left(1 - \frac{1}{10000}\right)^{20000} \approx 0.86$$

Posteriormente, discútase las implicaciones que esto tendría dentro del juicio correspondiente al caso.



Indique a todos los estudiantes que conserven una copia de la comparación desarrollada por su equipo en sus portafolios individuales. Una alternativa es grabar una imagen fija con los teléfonos celulares.



Es muy importante que no se valide ninguna de las representaciones, dejando las opciones abiertas. De esta forma se incentiva la presentación de distintas alternativas y no la aprobación del profesor.

Actividad 6:

Recursos: Hojas de papel con la actividad, computadoras con el paquete Fathom, proyector, urna con canicas o notas de papel numeradas del uno al cinco.

Presente al grupo la siguiente situación:

En la planta baja de un edificio suben al elevador 7 personas, si el edificio tiene 5 pisos (además de la planta baja), y suponiendo que las 7 personas se bajarán aleatoriamente en los diferentes pisos.

¿Cuál es la probabilidad de que baje al menos una persona en cada piso?

Para saber más



La falacia del fiscal

Así se le conoce al problema anterior.

Se ha presentado en caso policiales reales en países como España y Gran Bretaña, en los que, bajo el razonamiento equivocado de que sería muy improbable hallar una coincidencia de ADN, se han emitido sentencias de culpabilidad a acusados que en realidad resultaron ser inocentes.

¿Qué aprendimos?

1. Uso de tablas de doble entrada para representar simultáneamente el comportamiento de dos variables.
2. El uso de tablas de doble entrada para cálculo de probabilidades de eventos simples, compuestos y condicionados.
3. Evento simple, evento complemento, unión de eventos, intersección de eventos, eventos condicionados y el cálculo de sus probabilidades.
4. La falacia del fiscal.
5. La importancia de un adecuado cálculo de probabilidades y de su correcta interpretación, en aras de tomar las mejores decisiones posibles bajo condiciones de azar.

Evaluación

La evaluación se llevará a cabo con la revisión de los portafolios de evidencias. Estos portafolios se fueron construyendo durante el desarrollo de la secuencia didáctica. Cada estudiante fue guardando las soluciones propuestas para los problemas, ya sea por equipos o individuales. Al finalizar la secuencia pida a los estudiantes que formen parejas para revisar el contenido de los portafolios de cada uno. Para la revisión, harán uso de los siguientes lineamientos:

- 1.- Verificar que el portafolio contiene todas las evidencias indicadas.
- 2.- Analizar los procedimientos desarrollados para dar solución a las actividades: ¿cambiaron la manera de ver la forma de calcular probabilidades? ¿Les sirvieron las formas de representación para responder a las preguntas? ¿Consiguieron sistematizar los conceptos aprendidos en el resumen? ¿Consiguieron resolver, por medio de complementos u alguna otra vía, la falacia del fiscal y dar una adecuada interpretación de sus implicaciones?
- 3.- Elaborar un texto breve donde expresen lo aprendido en esta secuencia didáctica.

Pida a algunas parejas de estudiantes que compartan el análisis de sus respectivos portafolios.

Acreditación

Finalmente, responderán de manera individual los siguientes planteamientos para obtener una calificación:

1. A un grupo de 30 personas se les preguntó que dijeran que deporte practicaban y cuál era su pasatiempo favorito. Los resultados se encuentran resumidos en la tabla siguiente:

		Deporte Favorito		
		Básquet	Fútbol	Natación
Pasatiempo	Leer	4	3	3
	Música	3	10	1
	Videojuego	1	3	2

Si se toma una persona aleatoriamente de ese grupo, calcula la probabilidad de que:

- a) No practique natación.
 - b) Le gusten los videojuegos y practique básquet.
 - c) Practique fútbol o tenga como pasatiempo escuchar música
 - d) Ni practique natación ni le guste leer.
 - e) Le guste la lectura, si practica la natación
 - f) No practique fútbol, si no le gusta la música.
2. Supón que en cierta gasolinera 45% de los clientes utilizan gasolina Magna, 30% usan diesel, y los restantes gasolina Premium. De los clientes que consumen gasolina Magna, sólo el 32% llena sus tanques. De los que compran diesel, 55% llenan sus tanques, en tanto que quienes llevan gasolina Premium, el 45% llena su tanque. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente:
 - a) llene su tanque con gasolina Premium?
 - b) llene su tanque?
 - c) pida diesel si no llena su tanque?

Lecturas recomendadas

Matemáticas: El surgimiento de la probabilidad, Ian Hacking, capítulo diez, “La probabilidad y la ley (1665)”. Gedisa Editorial.

Literatura: El juego de la Lógica, Lewis Carroll.

Recursos en Internet: http://www.estadisticaparatodos.es/software/software_libre.html

Referencias

Batanero, C. Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: Un desafío educativo. SEJ2004-00789, Madrid, MCYT y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

Quintana, J. *Las diversiones matemáticas de un matemático aburrido: Lewis Carroll*. NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas. Volumen 34, junio de 1998, pp. 25-38

The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Dodgson.html>, revisado el día 21 de junio de 2014.

Sitio Web de Lewis Carroll (Aventuras de Alicia en el país de las Maravillas).
<http://mapasdecostarica.info/alicia/carroll.htm>

Iconos



Recomendaciones para el profesor



Información adicional, para saber más.



Recomendaciones para el uso de tabletas o teléfonos.



Indicación de registro de evidencias en un portafolios.



Indicación de trabajo en salón de cómputo.