La serie binomial y la fórmula del binomio

José Luis Abreu

20 de julio de 2015

La serie binomial

Si $p > 0$ entonces

$$(1+x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} x^n \tag{1}$$

siempre que $|x| < 1$.

Convergencia

Es fácil ver que la sucesión

$$\left\{ \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

está acotada por 1 si $p \leq 1$ y por p^p si $1 < p$, por lo que la convergencia de (1) queda garantizada para $|x| < 1$.

Igualdad

Para demostrar la igualdad en (1) primero obtendremos una ecuación diferencial que la función $(1+x)^p$ satisface. Luego supondremos que esta misma función tiene un desarrollo en serie de potencias cuyos coeficientes no conocemos y, finalmente, sustituiremos la serie en la ecuación diferencial y eso determinará los coeficientes de la serie de potencias, que resultarán ser precisamente los de (1).

Definamos

$$f(x) = (1+x)^p$$

Entonces

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}$$

y por lo tanto

$$(1+x)f'(x) = pf(x) \tag{2}$$

Supongamos ahora que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Es claro que $a_0 = 1$ porque $f(0) = 1^p = 1$ y por lo tanto podemos suponer que:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

Derivando término a término obtenemos

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2), tenemos

$$(1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = p + p\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Distribuyendo $1+x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = p + p\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

que puede escribirse así:

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = p + p\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

y también así:

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = p + p\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Agrupando las dos sumas del primer término obtenemos:

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1} + na_n\big)x^n = p + \sum_{n=1}^{\infty} pa_n x^n$$

Para que se cumpla esta igualdad de series de potencias es necesario que los coeficientes de cada potencia sean iguales. Por lo tanto $a_1 = p$ y

$$(n+1)a_{n+1} + na_n = pa_n \tag{5}$$

para $n = 1, 2, ...$; y despejando a_{n+1} en (5) obtenemos la fórmula recursiva:

$$a_{n+1} = a_n \frac{p-n}{n+1}$$

Sustituyendo $a_1 = p$ y aplicando esta fórmula para $n = 1, 2, 3, 4$ obtenemos:

$$a_2 = \frac{p(p-1)}{2}$$
$$a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{2 \cdot 3}$$
$$a_4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

De lo cual es fácil ver que

$$a_n = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} \tag{6}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Finalmente, sustituyendo (6) en (3) obtenemos:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!} x^n$$

que es lo que queríamos demostrar.

Fórmula del binomio

El caso particular de la serie binomial cuando p es un entero positivo, se conoce como *fórmula del binomio* y dice:

Si p es un entero positivo, entonces:

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} x^n \tag{7}$$

Para demostrar esta fórmula basta:
(a) observar que a partir de $n = p+1$ todos los coeficientes de (1) se anulan, y
(b) multiplicar por $(p-n)!$ el numerador y el denominador del término n-ésimo.

Para obtener la forma mejor conocida de la fórmula del binomio, sustituimos $x = \frac{b}{a}$ en (7) y multiplicamos ambos miembros por a^p. Así obtenemos:

$$a^p(1+\frac{b}{a})^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} a^p \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

que equivale a:

$$(a+b)^p = \sum_{n=0}^{p} \frac{p!}{n!(p-n)!} a^{p-n} b^n$$

Ésta es la conocida fórmula de un binomio elevado a una potencia entera p, que suele demostrarse por inducción utilizando únicamente métodos algebraicos. Aquí la obtuvimos como corolario de la serie binomial, cuya demostración requiere conceptos de Cálculo.