LAS MEDIDAS DEL COSMOS EN LA ANTIGUA GRECIA

JOSÉ LUIS ABREU Y MICHAEL BAROT

Introducción

Para poder calcular la medida de los objetos celestes y las distancias entre ellos es necesario tener un modelo geométrico adecuado. Mientras se piense que el Sol es una rueda de fuego que está siendo jalada por una yunta, nada se puede hacer para calcular la distancia de la Tierra al Sol. El requisito indispensable es que el pensamiento se haya liberado de las explicaciones mísiticas e irracionales. Este proceso de liberación se inció en la antigüedad griega con Tales de Mileto (c. 625–547 a.C.), quién – por ejemplo – trató de explicar las inundaciones anuales del Nilo por fuertes vientos, explicación equivocada pero que intentaba señalar una *causa* física para un fenómeno observado de la naturaleza, y en esto se diferencía mucho de las otras explicaciones de aquel entonces, las cuales recurrían a la magia y a diversas "causas" místicas y dogmáticas. Anaximandro (c. 610–547 a.C.), considerado como "alumno" de Tales, dió una explicación diferente pero igualmente equivocada. Este pequeño ejemplo muestra cómo empezó una era diferente en la manera de explicar los fenómenos de la naturaleza sin recurrir a agentes imaginarios externos a la propia naturaleza. De esta manera se abre la posibilidad de especular buscando causas naturales de los fenómenos observados y discutir sobre ellas y así se empiezan a eliminar las explicaciones dogmáticas basadas en creencias irracionales que anteriormente se aceptaban sin justificación alguna y por ello sin poder ser cuestionadas.

Afortunadamente Tales de Mileto no solo tuvo fracasos, también tuvo importantes aciertos. Fueron famosos sus viajes a Babilonia y Egipto. Así fue - o al menos eso cuenta la leyenda - que visitó las grandes Pirámides. La Gran Pirámide de Guiza fue por milenios el edificio más grande del mundo, en particular, el más alto. Tales quiso saber su altura, pero no la podía medir de manera directa ya que para ello abría que perforar la pirámide. La idea ingeniosa de Tales fue medirla de manera indirecta usando un bastón de madera colocado verticalmente y su sombra formando los catetos de un triángulo rectángulo imaginario y comparándolo con otro triángulo imaginario *semejante* formado por la altura de la pirámide y su sombra. Este hecho está considerado como el origen del pensamiento racional, de las matemáticas y en particular, de la trigonometría.

Para poder medir distancias entre objetos celestes, es necesario tener primero una concepción natural del cosmos. Tales pensaba que la Tierra flotaba sobre agua, pero no

Date: 17 de junio de 2022.

explicaba qué la contenía. Los hindús en cambio opinaban que la Tierra reposaba sobre una tortuga, ésta sobre un elefante, y este último sobre una hoja de Lotus. Ya no cabía preguntar en qué se apoyaba esta última. Y así, distintas culturas tenían las ideas más dispares y peregrinas sobre la configuración el cosmos[1].

Anaximandro fue el primero que resolvió el "problema del soporte", es decir qué era lo que soportaba la Tierra, propuso que en realidad la Tierra flotaba en el aire (por no decir el vacío), aunque todavía la concebía como un cilindro. Fue Pitágoras (569–475 a.e.c.) el primero que propuso la idea de que la Tierra debía tener forma esférica. Anaxágoras (500–428 a.e.c.) afirmaba que la Luna y el Sol eran rocas esféricas y que la Luna reflejaba la luz del Sol. Aristóteles (384–322 a.e.c.) dió varios argumentos en favor de la forma esférica de la Tierra misma:

(1) que viajando de Sur a Norte se podían ven otras estrellas y

(2) que como durante los eclipses lunares la sombra de la Tierra siempre se ve acotada por una arco de circunferencia, o sea que esa sombra siempre es redonda, lo cual hace suponer que la Tierra también lo es.

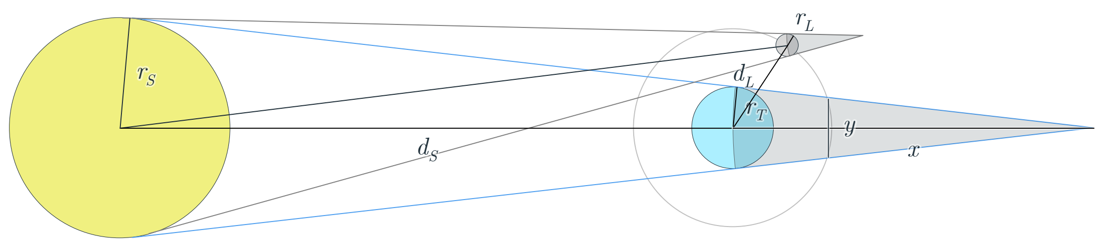
El primero que desarrolló un modelo geométrico del sistema solar y los eclipses fue Aristarco de Samos (c. 310–230 a.C.). Aristarco coloca al Sol en el centro y a los cinco planetas hasta entonces conocidos (los astros errantes): Mercurio, Venus, Marte, Jupiter y Saturno como esferas que giran alrededor del Sol.

En las siguientes secciones veremos cómo, utilizando inteligentemente algunas observaciones comunes, Aristarco logró estimar los tamaños relativos de la Tierra, la Luna y el Sol y las distancias entre ellos. Sus estimaciones daban que el Sol era muchas veces más grande que la Tierra y es por esto que en su cosmología lo colocó en el centro del universo en vez de a la Tierra, que era lo más común en los modelos basados en el pensamiento místico. Esto ocurrió casi dos mil años antes de que Nicolás Copérnico (1473–1543) finalmente acreditara de manera incontrovertible el sistema heliocéntrico de Aristarco. También veremos la idea de Eratóstenes de Cyrene (c. 275.–194 a.C.), para calcular el tamaño de la Tierra y finalmente una idea de Galileo Galilei (1564–1642) para estimar la altura de las montañas en la Luna.

Todas estas ideas tienen varios aspectos en común: primero, se basan en mediciones que realmente se pueden hacer estando en la Tierra, segundo, las medidas inalcanzables se calculan de manera indirecta utilizando relaciones matemáticas sencillas, casi siempre de proporcionalidad y, tercero, las ideas para establecer esas relaciones son muy ingeniosas pero bastante simples.

[1]La palabra "cosmos" proviene de la palabra griega para "adornar" (de la misma que proviene "cosmética") y aparece en este contexto porque se consideraba que la bóveda celeste estaba "adornada" por el Sol, la Luna, los planetas o estrellas errantes y las estrellas fijas.

El modelo de Aristarco para el sistema Sol-Tierra-Luna

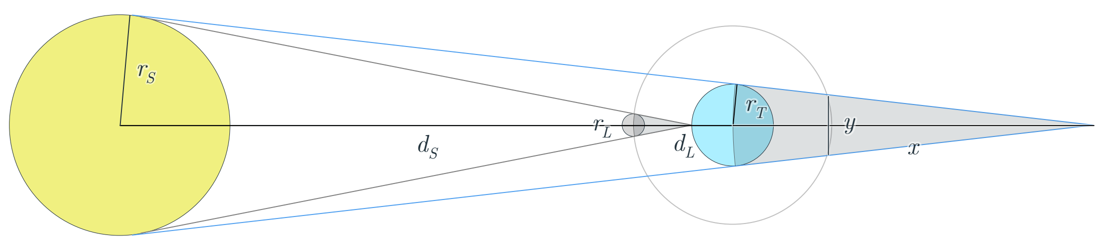


Sean r_T, r_L, r_S los *radios* de la Tierra, la Luna y el Sol, respectivamente.
Sea d_S la distancia del centro de la Tierra al centro del Sol.
Sea d_L la distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna.
Sea x la distancia del centro la Tierra a donde termina su sombra.
Sea y la cuerda del arco de la órbita de la Luna que está en la sombra de la Tierra.

En este modelo tenemos 7 incógnitas. Usando inteligentemente algunas observaciones comunes que pueden realizarse durante los eclipses totales de Sol y de Luna, así como la geometría del propio modelo, se pueden establecer varias relaciones entre estas 7 variables.

Cabe señalar que este modelo sólo es válido durante los eclipses de Sol o de Luna pues es cuando se puede suponer que la órbita de la Luna es coplanar con el plano determinado por el Sol, la Tierra y la misma Luna.

Durante un eclipse total de Sol éste queda casi completamente tapado por la Luna, pero se alcanza a ver su orilla brillando alrededor de la Luna.



Por lo tanto parece ser que

$$\frac{r_L}{d_L - r_T} = \frac{r_S}{d_S - r_T}$$

Es natural pensar que el radio r_T de la Tierra es bastante menor que sus distancias d_L y d_S a la Luna y al Sol, así que tomaremos como una buena aproximación la ecuación anterior la versión simplificada

$$\frac{r_L}{d_L} = \frac{r_S}{d_S}$$

Como además, el ángulo que abarca el disco lunar visto desde la Tierra, llamémoslo β, se puede medir y se sabe que es un poco mayor a medio grado, concretamente, $32'$. Podemos deducir entonces que

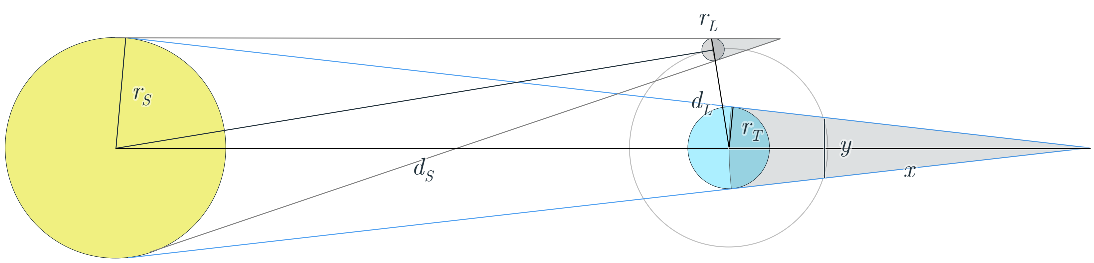
$$\frac{r_L}{d_L} = \frac{r_S}{d_S} = \operatorname{sen}\frac{\beta}{2} \approx 0.004654$$

De lo cual obtenemos dos relaciones entre nuestras incógnitas:

$$d_L \approx 215\, r_L \tag{1}$$

$$d_S \approx 215\, r_S \tag{2}$$

Esto nos dice que el radio de la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es unas 215 veces mayor que el radio de la Luna y también que el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es unas 215 veces el radio del Sol.



Cuando la Luna se ve desde la Tierra iluminada exactamente a la mitad es cuando el ángulo $\sphericalangle SLT$ (Sol-Luna-Tierra) es recto. Por tanto sabemos que

$$d_L \approx cos\,\alpha\, d_S \tag{3}$$

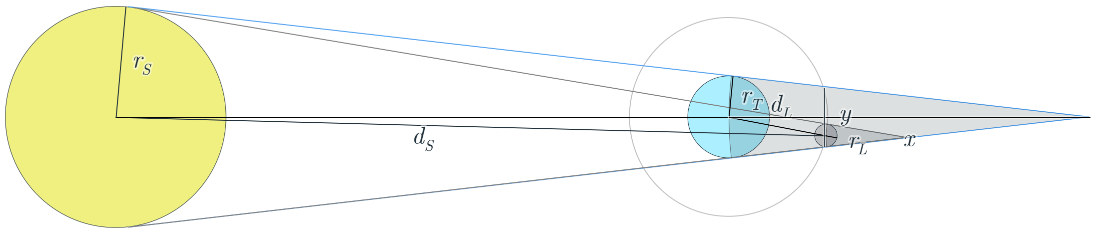
donde $\alpha = \sphericalangle STL$ (el ángulo Sol-Tierra-Luna). Mediciones muy precisas que no se hubieran podido hacer en la época de Aristarco, revelan que en esos momentos el ángulo es

$$\alpha \approx 89°51'$$

Aristarco, por falta de instrumentos adecuados hizo una estimación mucho menor:

$$\alpha \approx 87°$$

Por esta razón Aristarco obtuvo un radio del Sol y una distancia del Sol a la Tierra mucho menores de las que hoy conocemos. Sin embargo las medidas que se obtienen con su propio método usando el ángulo α de $89°51'$ son muy cercanas a los valores conocidos en la actualidad.



Sabemos que la fase total de un eclipse lunar puede llegar a durar unos 100 minutos (una hora con cuarenta minutos) y que la Luna tarda unos 29.5 días en darle una vuelta completa a la Tierra. Con esta información podemos obtener el ángulo θ que la Luna recorre estando en la sombra de la Tierra:

$$\theta \approx 360 \frac{100}{29.5 \times 24 \times 60} \approx 0.8474^\circ \approx 51'$$

Para obtener el ángulo que abarca el arco de la órbita de la Luna que cae en la sombra de la Tierra es necesario agregar β a θ. Por lo tanto

$$y = 2\, d_L \sin \frac{\theta + \beta}{2}$$

realizando el cálculo obtenemos:

$$y \approx 0.024\, d_L \tag{4}$$

La geometría de nuestro modelo nos permite establecer otras dos relaciones:

$$\frac{r_T}{r_S} = \frac{x}{x + d_S} \tag{5}$$

$$\frac{y}{x - d_L} = \frac{2r_T}{x} \tag{6}$$

Las 6 ecuaciones 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos permiten despejar 6 de nuestras 7 incógnitas en términos de una de ellas. Elegimos r_T como la variable respecto a la cual vamos a expresar las otras.

Despejando x de (5) y (6) e igualando los resultados obtenemos:

$$x = \frac{r_T\, d_S}{r_S - r_T} = \frac{2\, r_T\, d_L}{2\, r_T - y} \tag{7}$$

De 2 tenemos

$$d_S \approx 215 \times r_S$$

de 3 obtenemos

$$d_L = cos\, \alpha \times d_S \approx 215 \times cos\, \alpha \times r_S$$

y de 4 obtenemos

$$y \approx 0.024 \times dL \approx 0.024 \times 215 \times cos\,\alpha \times r_S$$

Sustituyendo estas tres expresiones en la segunda igualdad de 7 llegamos a:

$$\frac{r_T \times 215 \times r_S}{r_S - r_T} = \frac{2 \times r_T \times 215 \times cos\,\alpha \times r_S}{2r_T - 0.024 \times 215 \times cos\,\alpha \times r_S}$$

Dividiendo por $r_T \times 215 \times r_S$ ambos lados y multiplicando $0.024 \times 215 = 5.16$ obtenemos:

$$\frac{1}{r_S - r_T} = \frac{2 \times cos\,\alpha}{2\,r_T - 5.16 \times cos\,\alpha \times r_S}$$

Ahora despejamos r_S y obtenemos:

$$r_S = \frac{2\,(1 + cos\,\alpha)}{7.16\,cos\,\alpha} r_T$$

y usando $cos\,\alpha = 0.052$ para $\alpha = 87°$ y $cos\,\alpha = 0.0026$ para $\alpha = 89°51'$, en esta última igualdad obtenemos, respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \text{con } \alpha = 87° & \text{con } \alpha = 89°51' \\ r_S \approx 5.65\,r_T & r_S \approx 108\,r_T \end{array}$$

Usando $d_S \approx 215 \times r_S$ (ver 2) obtenemos:

$$\begin{array}{ll} \text{con } \alpha = 87° & \text{con } \alpha = 89°51' \\ d_S \approx 1215\,r_T & d_S \approx 23220\,r_T \end{array}$$

Usando $d_L = a \times d_S$ (ver 3)obtenemos:

$$\begin{array}{ll} \text{con } \alpha = 87° & \text{con } \alpha = 89°51' \\ d_L \approx 63\,r_T & d_L \approx 60\,r_T \end{array}$$

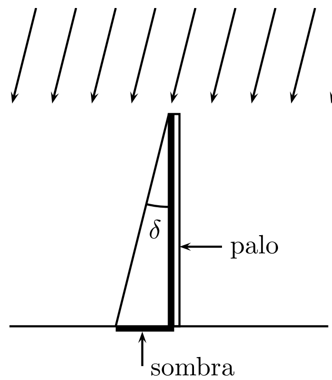
Finalmente, usando $d_L \approx 215 \times r_L$ (ver 1) obtenemos:

$$\begin{array}{ll} \text{con } \alpha = 87° & \text{con } \alpha = 89°51' \\ r_L \approx 0.293\,r_T & r_L \approx 0.279\,r_T \end{array}$$

Nótese que los resultados para el radio de la Luna y su distancia al centro de la Tierra son muy parecidos para las dos elecciones del ángulo α, pero en cambio los resultados para el Sol son muy diferentes y es que el cálculo de la distancia al Sol y su radio es para lo que la precisión en el valor del ángulo α es muy relevante. El gran logro de Aristarco consistió en establecer un modelo matemático (geométrico y cinemático) del sistema Sol-Tierra-Luna con el que pudo obtener expresiones para los radios del Sol y la Luna y sus distancias al centro de la Tierra en términos del radio de la Tierra. Pero en la época de Aristarco nadie sabía todavía cuál era el radio de la Tierra.

El tamaño de la Tierra calculado por Eratóstenes

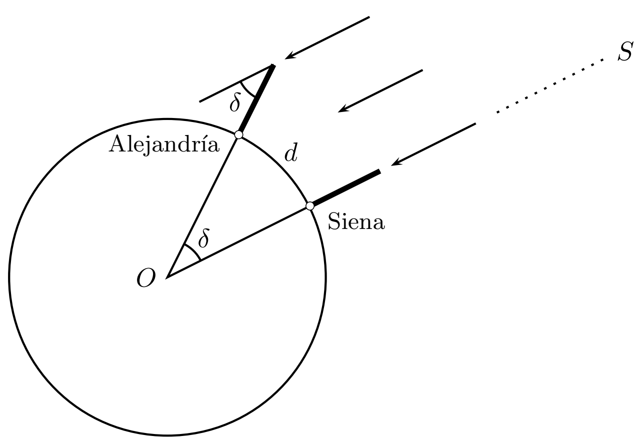
La primera medición del tamaño de la Tierra se atribuye a Eratóstenes (276–194 a. C.) quien se enteró de que el día del solsticio de verano,en Siena (una ciudad de Egipto que hoy se llama Asuan) los rayos del Sol iluminaban el fondo de los pozos y que un palo vertical no producía sombra alguna, es decir que ese día y en esa ciudad, el Sol se encuentra justo en el Cenit. Siena se encuentra casi exactamente al sur de Alejandría, lugar en el que se encontraba ERATÓSTENES. Así que durante solsticio de verano, en Alejandría, donde él vivía, ERATÓSTENES midió el ángulo δ entre un palo vertical y la línea recta que va de la punta del palo a su sombra y que coincide con el ángulo que los rayos de Sol forman con la vertical.



ERATÓSTENES vió que el ángulo δ era $\frac{1}{50}$ de un ángulo completo, es decir

$$\delta = \frac{1}{50}360^\circ = 7.2^\circ.$$

Si la distancia entre Alejandría y Siena es d, entonces el perímetro p_T de la circunferencia de la Tierra se puede obtener,como sugiere la siguiente figura,



mediante una simple regla de tres:

$$\frac{p_\mathrm{T}}{d} = \frac{360^\circ}{\delta} = \frac{360^\circ}{7.2^\circ} = 50.$$

Para estimar la distancia entre Alejandría y Siena, ERATÓSTENES se basó en los relatos de los comerciantes que contaban que recorrían la distancia en caravanas y tardaban 50 días y ellos mismo estimaban que cada día recorrían unos 100 "estadios".

La distancia entre Alejandría y Siena se estimaba entonces en 5000 estadios y por ello Eratóstenes dedujo que el perímetro de la circunferencia terrestre debería ser

$$p_{\mathrm{T}} = 50 \cdot d = 250\,000\,\text{estadios},$$

El "estadio" es una medida antigua que no estaba estandarizada. Tenía distintos valores en distintas regiones y hoy no se sabe exactamente cuánto valía, pero en Egipto, que es donde están Alejandría y Asuán, el valor valor del estadio medía aproximadamente 157.5 m. Usando este valor para el estadio obtenemos que el perímetro de la Tierra, según Eratóstenes debería ser de aproximadamente 39 375 km. Ésta es una estimación muy buena si tomamos en cuenta la sencillez del método y que el valor que actualmente se conoce es de unos 40 000 km. Según el valor obtenido por Eratóstenes para el perímetro de la Tierra, el radio debería ser de aproximadamente $r_T = 39\,375/2\pi$, o sea

$$r_T \approx 6\,267\,\text{km}$$

Es interesante hacer una tabla comparativa de los resultados que podemos obtener para las medidas del sistema solar en km con el método de Aristarco y usando el resultado de Eratóstenes:

	Aristarco con $\alpha = 87°$	Aristarco con $\alpha = 89°51'$	valores actuales (Wikipedia)
r_T	6 267	6 267	6 371
r_L	1 835	1 749	1 737
d_L	394 821	376 020	384 403
r_S	35,408	676 836	695 508
d_S	7 614 405	145 519 740	149 597 870

Nada mal para lo sencillo del método empleado. Observemos que aún si se toma el valor del ángulo $\alpha = 87°$ que Aristarco usó, los valores que se obtienen para el radio de la Luna y su distancia al cento de la Tierra son muy decentes. Claro, los valores para el Sol distan mucho de los verdaderos, pero es importante recalcar que esto se debe sólo a una limitación técnica y no a un defecto en el método de Aristarco.

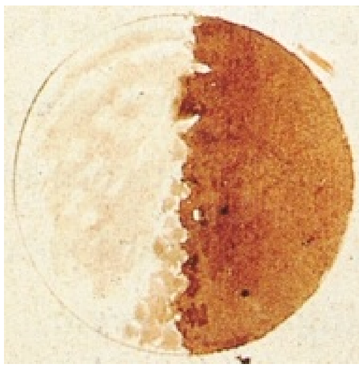
Lamentablemente estos conocimientos se perdieron durante la edad media y aparentemente Cristobal Colón emprendió su viaje hacia la India pensando que la Tierra era más chica. Si hubiera conocido la medición de Eratóstenes, tal vez nunca se hubiera atrevido a zarpar. Sin embargo su propio descubrimiento revivió el interés en estos temas y para 1511, cuando Vasco Núñez de Balboa descubrió el océano pacífico, los navegantes ya sabían que el perímetro de la Tierra era más o menos el que es y por ello sabían que el océano pacífico debería existir, y es por eso que lo estuvieron buscando.

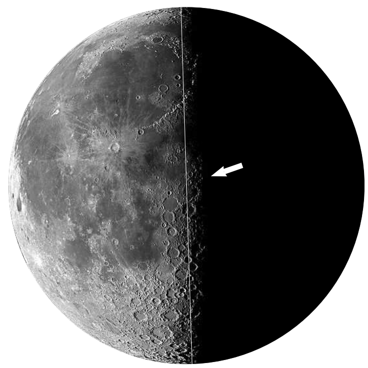
La altura de las montañas de la Luna

En la Edad Media los libros de Aristóteles eran muy influyentes. Para ciertos asuntos, él se basaba en Platón, en particular en su cosmología. Según una especulación de

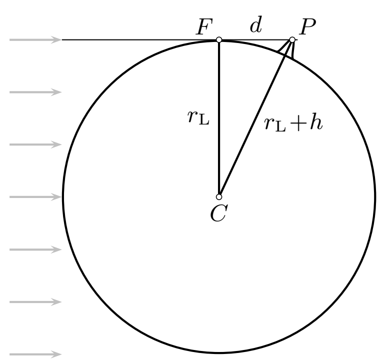
PLATÓN, la materia está compuesta por triángulos que forman sólidos regulares. Así explicó la existencia de los cuatro elementos y el quinto sólido (el dodecaedro) lo atribuyeron al cosmos, a la composición de las estrellas, la Luna, el Sol y los planetas.

Por ello, cuando GALILEO GALILEI, en enero de 1610, usa por primera vez un telescopio para observar el cielo nocturno, sus descubrimientos chocan con aquella teoría, ya que observó que Jupiter tenía cuatro lunas, que la vía láctea estaba compuesta por miles de estrellas, que el Sol tenía manchas y que la superficie de la Luna no era lisa sino que presentaba irregularidades, como se observa en las siguientes dos ilustraciones.





La izquierda es un dibujo de GALILEI, la derecha es una fotografía moderna. GALILEI interpretó estas irregularidades como sombras proyectadas por montañas. Calculó la altura de esas montañas al observar la media luna de la siguiente manera: Los rayos de Sol iluminan los picos más altos aunque los valles ya están completamente oscurcidos. Por ello se puede observar el brillo de los picos más altos más allá del diámetro que separaría la parte iluminada de la Luna de la parte oscurecida, en caso de ésta ser una esfera perfecta. En la ilustración hay una señal donde se encuentran los picos iluminados más alejados de ese diámetro. GALILEI estimó que la distancia de esos picos iluminados al diámetro es aproximadamente igual a la décima parte del radio de la Luna.



Esta ilustración muestra un esquema de la situación y sugiere el cálculo a realizar.

Con la estimación de la distancia $d \approx \frac{1}{10} r_L$, donde r_L denota el radio de la Luna, se puede calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo CPF:

$$r_L + h = \sqrt{r^2 + d^2} \approx \sqrt{r_L^2 + \frac{1}{100} r_L^2} = \sqrt{1.01}\, r_L \approx 1.005\, r_L.$$

Por ello se obtiene

$$h \approx 0.005\, r_L,$$

Usando la medida del radio de la Luna obtenida por el método de Aristarco $r_L = 1\,749$ km obtenemos que la altura de esa montañas debe ser de 8745 m aproximadamente, casi la altura del monte Everest. Galilei dijo que en la Tierra no hay montaña de semejante altura, pero esto hay que atribuirlo al hecho de que las mediciones de la Tierra apenas se empiezan a hacer unos 100 años después de su época y el Himalaya no se midió sino hasta mediados del siglo XIX. Actualmente se sabe que las montañas más altas en la Luna se erigen unos 5500 m sobre la superficie. El sencillo cálculo realizado por Galileo dio un valor que nos ofreció una buena idea de la magnitud de esas montañas, es decir, es correcto en cuanto al orden de magnitud.

Algunas reflexiones inspiradas por los ejemplos presentados

La observación de los fenómenos naturales provoca en el ser humano la inquietud de buscar explicaciones que le permitan comprenderlos. Por ello es natural inventarlas. Pero una vez inventada una explicación hay dos manera diametralmente opuestas de proceder. La primera consiste en aferrarse a la explicación encontrada y la segunda consiste en ponerla a prueba. Aferrarse a una respuesta sin utilizar la crítica y la experimentación lleva a convertir las explicaciones simplistas en dogmas de fe y a rechazar el progreso. En cambio, poner a prueba y criticar las primeras explicaciones lleva a rechazarlas o modificarlas para así poco a poco obtener nuevas explicaciones que se ajusten cada vez mejor a la realidad y que nos permitan predecirla y controlarla.

El papel de la matemáticas en este proceso es fundamental pues nos ayuda a construir modelos cuantitativos de los fenómenos naturales que nos permiten mejor que ningún otro tipo de explicación no solo saber si nuestras concepciones son sensatas sino que además nos guían para afinarla mediante la búsqueda de coincidencias cada vez más exactas entre los modelos que construimos y las observaciones que realizamos.

Es importante que la juventud al educarse conozca estos logros tan espectaculares de la humanidad que se deben a su capacidad para emplear su raciocinio, su inteligencia y su creatividad. Las matemáticas no son un cuerpo de conocimientos estériles y aburridos, sino el resultado de miles de años de esfuerzos del ser humano por comprender objetivamente y medir con precisión su entorno natural.