

# Desarrollo del pensamiento geométrico<sup>1</sup>

José Luis Abreu<sup>2</sup> y Michael Barot

28 de septiembre de 2017

<sup>1</sup>Parte de una versión preliminar del libro *Desarrollo del pensamiento matemático*.

<sup>2</sup>Con la colaboración del Javier Bracho Carpizo, Joel Espinosa Longi y Alejandro Radillo Díaz



# Índice general

<b>1. Geometría: origen y fundamentos</b>	<b>5</b>
1.1. Los orígenes del pensamiento geométrico . . . . .	5
1.2. El pensamiento geométrico en la antigua Grecia . . . . .	9
1.3. Los fundamentos de la geometría . . . . .	22
1.4. Los axiomas de conexión e incidencia . . . . .	25
1.5. La geometría proyectiva . . . . .	25
1.6. La perspectiva . . . . .	36
1.7. La geometría hiperbólica . . . . .	46
1.8. Los axiomas de orden y el de Euclides . . . . .	59
1.9. Los axiomas de congruencia y el de Arquímedes . . . . .	62
<b>2. La geometría clásica</b>	<b>65</b>
2.1. Propiedades del círculo . . . . .	66
2.2. Propiedades del triángulo . . . . .	70
2.3. Construcciones con regla y compás . . . . .	75
2.4. Los problemas de Apolonio . . . . .	78
2.5. Las secciones cónicas según Apolonio . . . . .	82
<b>3. Geometría y Medición</b>	<b>93</b>
3.1. El uso de los números para cuantificar la realidad . . . . .	93
3.2. Longitud, área y volumen . . . . .	96
3.3. El método de exhaustión . . . . .	106
3.4. La cuadratura de la parábola . . . . .	111
3.5. El número $\pi$ a través de los siglos . . . . .	114
3.6. El volumen y la superficie de la esfera . . . . .	130
3.7. Cálculos de distancias celestes . . . . .	132
3.8. La trigonometría . . . . .	140
3.9. La medición fina de la Tierra . . . . .	157
3.10. Herramientas de precisión . . . . .	166
<b>Índice de Referencias de las Figuras</b>	<b>167</b>
<b>Índice de Personas</b>	<b>170</b>



# Capítulo 1

## Geometría: origen y fundamentos

### El estudio de las propiedades de nuestro espacio

La experiencia cotidiana del espacio que habitamos, las formas más comunes de los objetos que co-habitan con nosotros en ese espacio, las simetrías que exhiben, es decir las propiedades que conservan ante ciertas transformaciones como reflexiones, rotaciones, traslaciones, expansiones y contracciones, etcétera, lleva de manera natural a conceptos como la de igualdad o congruencia de algunas figuras, la semejanza de otras, el paralelismo y la perpendicularidad entre líneas rectas y el reconocimiento de figuras especiales con simetrías muy particulares como el cuadrado, y la circunferencia. El estudio de las propiedades y relaciones entre todos estos conceptos es lo que constituye la Geometría euclidiana o Geometría clásica. A pesar de que la palabra geometría en griego significa medición de la tierra (queriendo decir medición de terrenos), la medición es solo un aspecto particular de la geometría, del que nos ocupamos a fondo en el siguiente capítulo, y que se distingue de los temas que trataremos en éste en que aquel requiere de un sistema de numeración. En este capítulo nos ocupamos de los aspectos de la geometría que no requieren de un sistema de numeración, aspectos que los antiguos griegos desarrollaron magistralmente.

#### 1.1. Los orígenes del pensamiento geométrico

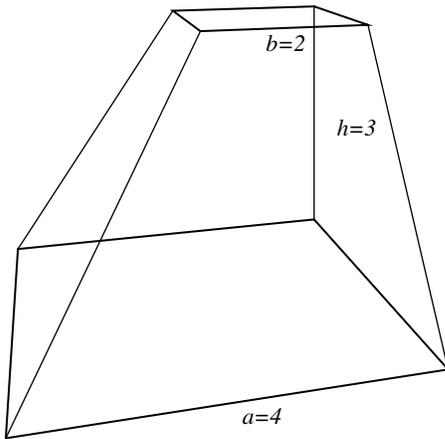
Los rudimentos de un pensamiento pre-geométrico aparecen en todas las grandes culturas de la antigüedad como la egipcia, la babilonia y la china, pero en forma muy rudimentaria y siempre vinculado a las actividades de medición y cuantificación, como en los casos de longitud, área y volumen. De hecho la palabra Geometría, según sus raíces griegas significa “medición de la tierra”. La cultura Sumeria dejó testimonios de sus intereses y conocimientos en miles de tablillas de arcilla y hay muy poco en ellas que pueda identificarse con una actividad matemática, y mucho menos geométrica. En la cultura de Babilonia, cuyos avances en cuestiones de aritmética y álgebra son indudables, las manifestaciones geométricas son muy escasas. Debido a las grandes obras que realizaban como presas y canales de riego, se enfrentaban a la necesidad de calcular cuántos tabiques

iban a necesitar o cuánto tiempo iba a llevar la excavación de un canal y para ello tenían que estimar áreas y volúmenes, pero en general solo lo hacían por interés administrativo y no parece que hayan desarrollado conceptos ni ideas propiamente geométricas. No usaron conceptos geométricos reconocibles ni siquiera en sus cálculos astronómicos, a pesar de que fueron capaces de algunos muy precisos y sofisticados que equivalen a aproximaciones polinomiales.

Para encontrar ideas que podamos considerar corresponden al *pensamiento geométrico* hay que volver la mirada a la cultura egipcia. Y aún allí encontramos muy poco. En los papiros egipcios aparecen varios ejemplos de uso de las matemáticas en relación con algunas figuras geométricas, en especial con las pirámides, pero relacionados siempre con un interés práctico como el cálculo de un volumen. Por ejemplo en el papiro Rhind, que data de aproximadamente 1650 a.e.c y está basado en otro aún más antiguo, contiene algunos problemas relacionados con la geometría. El ítem 48 sugiere el siguiente procedimiento para calcular el área de una circunferencia: *Restar al diámetro una novena parte y elevar al cuadrado* lo que equivalente a la fórmula  $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2$  para el área de un círculo de diámetro  $d$ . Se trata de una *cuadratura del círculo* pues  $\frac{8}{9}d$  es el lado de un cuadrado cuya área es *casi* igual a la del círculo de diámetro  $d$ . En particular, podríamos pensar que esta fórmula propone un valor de  $\pi = 4(64/81) = 256/81 = 3.16049\dots$ , que es una aproximación bastante aceptable para aquella época. Sin embargo no hay nada que indique que esto sea algo más que un procedimiento para estimar el área de un círculo. No hay evidencias de un razonamiento deductivo ni de que los egipcios a esas alturas tuvieran una noción clara del número  $\pi$  como *la razón del perímetro al diámetro en una circunferencia* o como *de la razón del área de un círculo al cuadrado de su radio*. En la sección 3.5 se analiza el significado de esta fórmula con más detenimiento.

En el ítem 41 del papiro Rhind, el escriba calcula el volumen de un granero cilíndrico multiplicando el área de la base circular, es decir la del cuadrado cuyo lado es  $\frac{8}{9}$  del diámetro por la altura. El procedimiento sería totalmente correcto si hubiera tenido la fórmula exacta para el área del círculo. El ítem 42 ofrece un método alternativo para llegar al mismo resultado: calcula el área de un cuadrado de lado  $\frac{4}{3}$  del diámetro de la base y la multiplica por  $\frac{2}{3}$  de la altura. El resultado es el mismo porque dos tercios del cuadrado de  $\frac{4}{3}$  es igual a  $\frac{32}{27}$  y por tanto igual a  $\frac{64}{81}$ . El hecho de querer ofrecer esta segunda alternativa sugiere un interés en proporcionar un procedimiento que requiere menos operaciones y usa números más sencillos. No parece desear explicar por qué funciona la fórmula, ésta se ofrece tal cual. Solo se trata de ayudar al futuro usuario a realizar los cálculos con mayor facilidad. Esta actitud no es reprochable, después de todo, realizar las operaciones para completar esos cálculos no era tarea fácil cuando se usaba una notación numérica como la egipcia. Seguramente cualquier simplificación en las operaciones era muy útil y apreciada.

El papiro de Moscú, transcrito durante la décima tercera dinastía a partir de originales que se remontan más o menos a 1850 a.e.c., contiene un ejemplo muy revelador del nivel de las matemáticas egipcias de aquella época. Se trata del ítem 14, que ofrece el cálculo del volumen de una pirámide truncada. El papiro incluye un esquema que nos permite intuir que se trata de un *tronco* de pirámide como el que representa figura adjunta.



Como de costumbre, el escriba procede a realizar el cálculo indicando paso a paso las operaciones que hay que hacer para llegar al resultado. En ellas claramente se utilizan los números 2, 4 y 3 como representantes genéricos de los lados de las bases cuadradas y la altura, que hoy día denotaríamos, por ejemplo, por  $a$ ,  $b$  y  $h$ , respectivamente. Este hecho lo reconocemos en que los datos son números muy sencillos y diferentes entre sí, lo cual facilita la identificación de lo que representan y permite usar el texto como guía para calcular el volumen de otras pirámides como ésta pero con diferentes valores de  $a$ ,  $b$  y  $h$ . El procedimiento descrito por el escriba equivale, en nuestro lenguaje algebraico, a la fórmula

$$\text{Volumen} = \frac{(a^2 + ab + b^2)h}{3}$$

que es totalmente correcta. No se trata solo de una buena aproximación sino de un resultado que sigue siendo válido tres mil años después de que se escribió, además de completamente general, pues no depende de que los datos guarden alguna relación especial entre ellos, como por ejemplo  $a = 2b$ , aunque así suceda con los del ejemplo concreto.

¿Significa esto que los egipcios supieron deducir racionalmente la fórmula del volumen de la pirámide truncada? Tal deducción, de cualquier manera que se haga, involucra muchos conocimientos previos. Por ejemplo, una manera de obtenerla consiste en conocer (habiéndola deducido antes) la fórmula para calcular el volumen de una pirámide de base cuadrada:

$$\text{Volumen} = \frac{b^2h}{3}$$

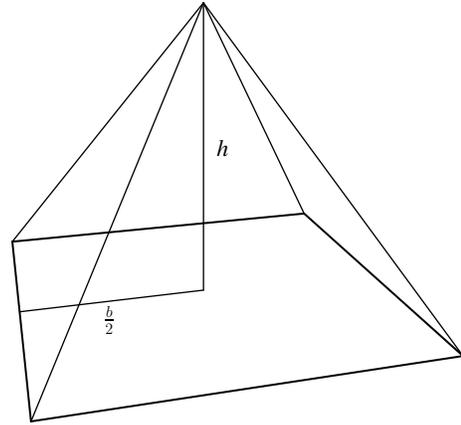
donde  $b$  es el lado de la base y  $h$  la altura, es decir la distancia perpendicular a la base desde el vértice superior; luego utilizar un razonamiento geométrico como el de concebir la pirámide truncada como la diferencia de dos pirámides completas, la más pequeña contenida en la mayor. (Probablemente los egipcios conocían la fórmula para calcular el volumen de una pirámide completa, pero no sabemos si la obtuvieron mediante un razonamiento o de una manera más o menos empírica.) Por otro lado, el desarrollo algebraico no es inmediato puesto que no se tiene el dato de la altura de la pirámide grande que hay que trincar, sino que hay que obtenerlo a partir de los valores  $a$ ,  $b$  y  $h$  de la pirámide truncada, por ejemplo utilizando semejanza de triángulos. Finalmente hay que realizar una simplificación algebraica que involucra una factorización nada trivial.

**Ejercicio.** Invitamos al lector a realizar este ejercicio para que pueda apreciar las dificultades involucradas en la deducción, sobre todo tomando en cuenta la carencia de un lenguaje algebraico como el nuestro.

¿Podieron haber realizado todo ese trabajo deductivo los egipcios? Es posible. Lo que está claro es que no tenemos ningún documento que lo compruebe. Y sin embargo también es evidente que sabían muchas cosas sobre geometría y es difícil imaginar que no practicaran algún tipo de razonamiento lógico cuando pensaban en ellas. Nuestra conclusión es que los egipcios posiblemente realizaron algunos razonamientos geométricos lógico-deductivos, pero no supieron o no vieron la conveniencia

de escribirlos, aunque también cabe la posibilidad de que los hayan asentado en papiros que están perdidos y, posiblemente, nunca aparezcan.

Otro ejemplo que parece indicar alguna evidencia de un pensamiento geométrico abstracto en los antiguos egipcios son los ítems 56 y 57 del papiro Rhind en los que se define el *seqed* de una pirámide como la razón de la mitad del lado de la base a la altura (en el esquema:  $seqed = \frac{b}{2} : h$ ). Es un claro ejemplo de un concepto abstracto (el de razón) y de su aplicación a la pendiente de un plano inclinado. Ofrece una manera de manipular la pendiente (el *seqed* resulta ser la razón inversa de la que hoy llamamos pendiente) que se usa para obtener la altura de una pirámide conociendo su lado y su *seqed*. Esto último demuestra un manejo de la semejanza de triángulos y uno de los primeros ejemplos de lo que luego vino a llamarse trigonometría.



No es de extrañarse que cuando Tales de Mileto, y más tarde Pitágoras, viajaran por Egipto, aprendieran este tipo de geometría que, aunque muy básica, ya utilizaba abstracciones como la razón de dos magnitudes (evidenciada en el concepto de *seqed*), y posiblemente algún razonamiento deductivo, como el que sugiere el cálculo del volumen de la pirámide trunca. Al regresar de sus viajes por Egipto y Mesopotamia, probablemente reflexionaron sobre esos conceptos e ideas y así iniciaron el camino hacia el pensamiento geométrico que tanto ha contribuido al progreso de la humanidad.

Es cierto que babilonios, egipcios, chinos, indios y tal vez otros pueblos de la antigüedad descubrieron, de manera independiente unos de otros, lo que hoy se identifica como el Teorema de PITÁGORAS. Hay muestras (no siempre claras por cierto<sup>1</sup>), de que conocían algunas “ternas pitagóricas”, es decir ternas de números enteros  $a, b, c$  tales que  $a^2 + b^2 = c^2$  (como 3, 4 y 5) y sabían que al formar un triángulo cuyos lados constituyeran una de ellas, éste resultaba ser un triángulo rectángulo. Incluso es posible que utilizaran esas ternas en la edificación de monumentos y edificios como un método para construir paredes perpendiculares entre sí. Sin embargo no hay nada registrado en sus legados anteriores a la época de oro de las matemáticas griegas que indique que conocieran una demostración del teorema (no siquiera de que se plantearan que tal demostración fuera posible, conveniente o necesaria).

Todo esto nos lleva a afirmar que el pensamiento geométrico como tal nació en la antigua Grecia alrededor de siglo V a.e.c.

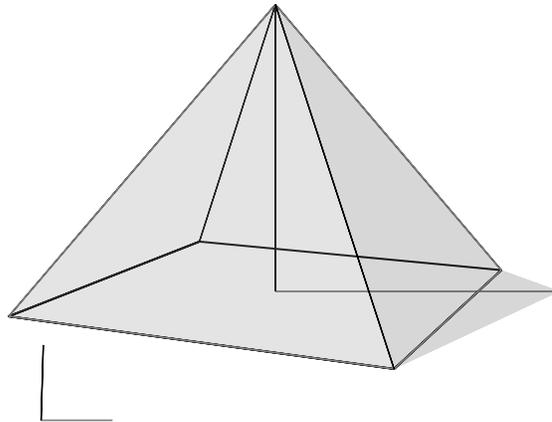
<sup>1</sup>La famosa tableta Primpton 322 que durante muchos años se creyó que mostraba una lista de elementos de algunas ternas pitagóricas, ha sido interpretada de manera diferente y más plausible como los resultados de la solución algebraica del problema algebraico  $x - \frac{1}{x} = n$  para diferentes valores de  $n$

## 1.2. El pensamiento geométrico en la antigua Grecia

### Los orígenes del pensamiento geométrico

Contamos con muy pocos documentos que revelen los detalles de la geometría griega desde su origen en el siglo VII a.e.c. atribuido a Tales de Mileto (625-546 a.e.c.) hasta el siglo III a.e.c. en que aparecen *Los elementos* de Euclides. Lo que sabemos es que muchos filósofos se ocuparon de las Matemáticas y especialmente de la Geometría y que ésta última aparentemente se desarrolló bastante alejada de las aplicaciones prácticas, aunque nadie niega que seguramente fue usada en ellas. Pero los documentos de la época revelan si no un desdén, sí una separación entre el pensamiento geométrico y la actividad productiva en general.

El detalle más antiguo del que tenemos referencia en el que se puede apreciar un pensamiento geométrico deductivo es el relato del procedimiento que Tales de Mileto sugirió para calcular la altura de una pirámide: esperar el momento en que la sombra de una vara vertical mide lo mismo que la vara, entonces la sombra de la pirámide mide lo mismo que su altura. Éste es un claro ejemplo de pensamiento deductivo. Se construyen, imaginariamente, dos triángulos, uno usando la vara y su sombra y el otro usando el vértice de la pirámide y su sombra.



Como los rayos del sol son paralelos, estos triángulos son semejantes y como el de la vara es isósceles, también lo es el otro. Para que este procedimiento puede llevarse realmente a cabo, hay que resolver algunos problemas prácticos. Medir la sombra de la pirámide tiene la dificultad de que no hay acceso directo al sitio donde estaría la proyección perpendicular al suelo de su vértice. Si en el momento en que la sombra de la vara mide lo mismo que ella los rayos del sol fueran paralelos a una de las caras de la pirámide este problema sería fácilmente soluble, pero no es un caso muy probable. Lo que queremos señalar es que, independientemente de si el procedimiento se puede realizar en la práctica, o no, la idea es válida, señala cómo, en principio, se puede estimar una magnitud inaccesible a partir de otras que sí son accesibles, utilizando las matemáticas y la razón.

Sabemos que los pitagóricos (Pitágoras 569-475 a.e.c.) veían al mundo como racional, aprensible, a través de los números. Hay que admitir que aunque en cierto sentido estas ideas se adelantan a la visión científica de Galileo Galilei (1564-1642) acerca de que la naturaleza es comprensible solamente

a través de las matemáticas, la idea pitagórica era probablemente menos científica y algo inclinada al misticismo. Por ejemplo, se dice que quisieron ocultar el descubrimiento de los incomensurables porque no encajaban en su visión del mundo, lo cual indicaría una actitud más dogmática que científica. Desde su punto de vista, que consistía en creer que todo conocimiento podía expresarse en términos numéricos, la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado *debería* tener la forma  $m/n$  con  $m$  y  $n$  números enteros positivos. Al descubrir ellos mismos que eso no era posible, su mundo intelectual entró en una crisis de la que no supieron sacarlo y decidieron ocultar su descubrimiento, no sabemos si por vergüenza o solo para evitar el desprestigio que podría acarrearles.

Recordemos que uno de los grandes descubrimientos de los pitagóricos fue que dos cuerdas de igual grosor y tensión producían sonidos que combinados resultaban agradables al oído humano, cuando sus longitudes estaban en relaciones “rationales”, es decir de la forma  $m/n$  con  $m$  y  $n$  siendo números enteros pequeños como  $3/5$  o  $5/8$ . Este descubrimiento, sin duda importantísimo, probablemente les llevó a una exaltación que les llevó a postular que todo en el mundo debía poderse expresar con relaciones racionales. Lamentablemente, a pesar de que estas ideas fomentaron en ellos el estudio de las matemáticas, llegando a realizar contribuciones importantes en ellas, en sí no son ideas precisamente racionales. Más bien al contrario, la filosofía pitagórica era mística y dogmática. Y aún así, constituye el origen de todo el pensamiento matemático y racional.

Sin embargo, uno de los logros más importantes del pensamiento racional, logro inequívocamente matemático y geométrico, el llamado *Teorema de Pitágoras*, lleva el nombre de un filósofo místico y ecologista que no sabemos si lo demostró.

La Geometría surge en la antigua Grecia con dos teoremas igualmente importantes y útiles. El que dice que *los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales*, que al menos en una de sus primeras versiones se atribuye a Tales de Mileto (625-546 a.e.c.) y el que dice que *los cuadrados contruidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo, equivalen al cuadrado construido sobre su hipotenusa*, atribuido a Pitágoras (569-475 a.e.c.). Al primero nos referiremos como la *Ley de las proporciones para triángulos semejantes* y al segundo con su nombre tradicional: *Teorema de Pitágoras*.

Independiente de a quien o a quiénes debieran atribuirse estos teoremas, el hecho es que son los dos resultados propiamente matemáticos y geométricos más antiguos de la historia y también los más importantes y más usados en las demostraciones de otros teoremas.

## El teorema de Pitágoras y los conceptos de área y semejanza

Un hecho interesante es que el *Teorema de Pitágoras* se puede demostrar fácilmente a partir de la *Ley de las proporciones*, como veremos a continuación.

Sea  $ABC$  un triángulo rectángulo donde  $AB$  es la hipotenusa. Entonces  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

Sea  $P$  la proyección ortogonal de  $C$  sobre  $AB$ .

Los triángulos  $ABC$ ,  $CAP$  y  $BCP$  son semejantes y por tanto:

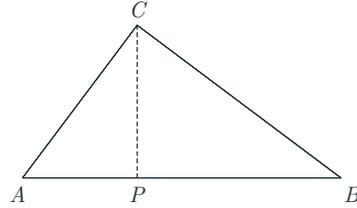
$AP : AC :: AC : AB$ , que es equivalente a:  $AC^2 = AB \cdot AP$  y

$PB : BC :: BC : AB$ , que equivale a:  $BC^2 = AB \cdot PB$ .

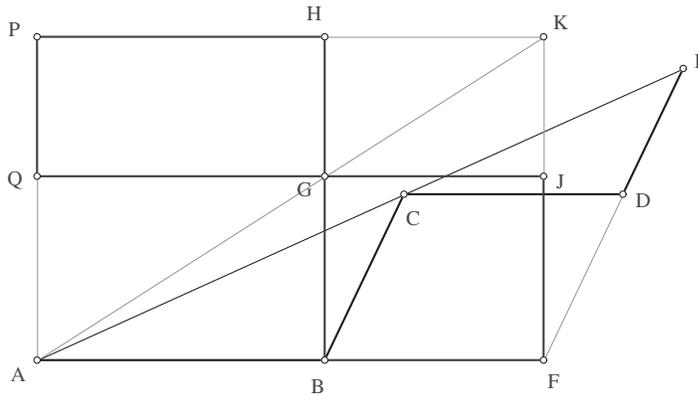
Como  $AB = (AP + PB)$ , tenemos que

$AB^2 = AB \cdot (AP + PB) = AB \cdot AP + AB \cdot PB = AC^2 + BC^2$ .

Q.E.D.



La demostración depende de la íntima relación que existe entre los conceptos geométricos de *área de un rectángulo* y *razón de dos segmentos* que a continuación describimos.

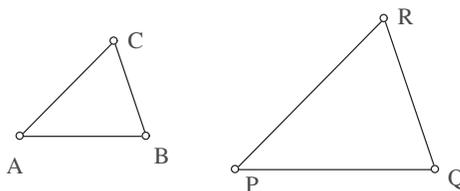


En esta construcción los triángulos  $ABC$  y  $CDE$  son semejantes y por tanto:  $CD : AB :: DE : BC$ .

Construiremos rectángulos de lados  $AB, DE$  y  $BC, CD$  y veremos que tienen la misma área, lo cual podemos expresar escribiendo  $AB \cdot DE = BC \cdot CD$ . Sea  $F$  el punto de intersección de  $AB$  y  $DE$  ( $F = AB \cap DE$  en notación moderna). Sean  $G$  y  $H$  sobre la perpendicular a  $AB$  por  $B$ , tales que  $BG = BC$  y  $GH = DE$ . Completamos la figura trazando paralelas a  $AB$  por  $G$  y  $H$  y perpendiculares a  $AB$  por  $A$  y por  $F$ . Notemos que, por construcción,  $BG = BC$ ,  $CD = GJ$  y  $DE = JK$ . Así que los triángulos  $ABG$  y  $GJK$  son semejantes y por tanto  $A, G$  y  $K$  están alineados. Los rectángulos  $QGHP$  y  $BFJG$  tienen la misma área porque son el resultado de quitarle a  $AKP$  los triángulos  $AGQ$  y  $GKH$  y a  $KAF$  los triángulos  $GAB$  y  $KGJ$  (evidentemente  $AGQ = GAB$  y  $GKH = KGJ$ ).

Así que  $CD : AB :: DE : BC$  es equivalente a  $AB \cdot DE = BC \cdot CD$ , siempre y cuando interpretemos el producto de dos segmentos como (el área de) un rectángulo.

En resumen, y cambiando la notación para dar mayor generalidad al resultado, podemos decir que las siguientes afirmaciones son equivalentes para dos triángulos arbitrarios  $ABC$  y  $PQR$ :



- 1)  $ABC$  y  $PQR$  son semejantes (se entiende que  $AB$  corresponde a  $PQ$ ,  $BC$  a  $QR$  y  $CA$  a  $RP$ ).
- 2)  $AB/PQ = BC/QR = CA/RP$  (los cocientes interpretados como razones)
- 3)  $AB \cdot QR = BC \cdot PQ$ ,  $BC \cdot RP = CA \cdot QR$  y  $AB \cdot RP = CA \cdot PQ$ .

Este resultado nos permite transitar de manera transparente entre las expresiones

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

y

$$AB \cdot QR = BC \cdot PQ$$

como acostumbramos a hacerlo en el álgebra elemental, es decir, “pasando los denominadores de la primera al otro miembro de la igualdad, pero multiplicando en lugar de dividiendo”, y viceversa. La mayor parte del “álgebra” que se usa en la geometría euclidiana consiste en aplicar esta equivalencia que, para los antiguos griegos, siempre se interpretaba así: lo primero es una proporción (igualdad entre dos razones), lo segundo significa que (las áreas de) dos rectángulos son iguales y ambas cosas son equivalentes, es decir, que cualquiera de ellas se cumpla implica que la otra también se cumple.

En las Matemáticas modernas los conceptos de distancia o longitud, área, razón y ángulo se trivializan. Simplemente se les asignan valores numéricos (números reales, claro) e interpretamos sus relaciones en términos de operaciones aritméticas (o algebraicas). Esta manera de proceder deja de lado la naturaleza geométrica de estos conceptos que es independiente de cualquier sistema de numeración. Los antiguos griegos manejaron estos conceptos de una manera más sutil y profunda, probablemente porque su sistema de numeración era deplorable.

No es casualidad que, como veremos más adelante, en los primeros cuatro libros de *Los elementos* de Euclides (360-280 a.e.c.) no se realizan operaciones numéricas ni se hacen manipulaciones algebraicas. No es sino hasta el libro V en el que se desarrolla la teoría de las proporciones, debida a Eudoxio de Cnidos (390-337 a.e.c.), donde se empiezan a manejar abstracciones que pueden identificarse más o menos como números reales. Este hecho que hoy pudiera parecer extraño e innecesario, se debe al cuidado que pusieron los antiguos griegos en no caer en el error de sus predecesores pitagóricos de asignar alegremente números a los segmentos presuponiendo que siempre se podían medir con fracciones (razones entre números enteros) usando alguna unidad adecuada. La razón por la que hemos pospuesto la geometría de la medición al siguiente capítulo es para crear conciencia en el lector de que los conceptos *no numéricos* de longitud, área, volumen, ángulo y razón existen independientemente de los números y constituyen la esencia de la geometría euclidiana.

## El descubrimiento de la razón y la emancipación del pensamiento

Los desarrollos matemáticos anteriores a los de la antigua Grecia a partir de los siglos VII y VI a.e.c. fueron, aparentemente, inconscientes y poco racionales. Antes de esa época la humanidad había elaborado abstracciones como los números y algunas figuras geométricas, y los había utilizado en las actividades cotidianas como la agricultura, el comercio y la construcción de viviendas, templos y obras públicas como canales y muros para proteger sus ciudades o incluso todo su territorio, como es el caso de la gran muralla china. Pero no es sino hasta la época de la Grecia clásica que aparece el pensamiento matemático como una actividad consciente de sí misma. No podemos afirmar que en las civilizaciones anteriores a la griega clásica no hubiera razonamiento lógico, solamente sabemos que no hay evidencia escrita o documentada de tal razonamiento. En cambio, como atestiguan Los elementos de EUCLIDES, los trabajos de ARQUÍMEDES y APOLONIO y el *Almagest* de CLAUDIO PTOLOMEO, los griegos fueron especialistas en dejar evidencia clara e incontestable de sus razonamientos. Es por ello que solemos decir que los griegos descubrieron la razón e inventaron el razonamiento abstracto y lógico. De hecho para apoyar esta afirmación, basta recurrir a los escritos de EUCLIDES y ARQUÍMEDES.

Lo que los antiguos matemáticos griegos descubrieron es que, si se establecen con claridad las relaciones entre algunos conceptos abstractos, llamémoslas premisas, de ellas se pueden deducir otras relaciones cuya validez es innegable, siempre y cuando quien las juzgue acepte como válidas las premisas. En ese punto de la historia el ser humano descubre la razón y su extraordinario poder. Este paso requiere de concebir que algunas verdades pueden ser evidentes (por ejemplo que por dos puntos dados pasa una y solo una línea recta) y que otras, menos evidentes (como el Teorema de Pitágoras) pueden obtenerse de ellas por medio del pensamiento racional.

La cultura griega difería en muchos aspectos de las culturas babilonia y egipcia. La diferencia fundamental se ve ya en el ejemplo de *Tales de Mileto* (ca. 624–546 a.e.c.), quien viajó para conocer ambas culturas y aprender de ellas. Los egipcios creían que un ente divino, que llamaron *Inum* y que tenía forma de un carnero, “traía” las inundaciones anuales del Nilo de alguna manera. Tales en cambio trató de explicarlas por fuertes vientos que soplaban y embalsaban el agua.

Aunque la explicación de TALES es errónea, tiene un aspecto revolucionariamente nuevo: trata de explicar un fenómeno de la naturaleza por la naturaleza misma. Su discípulo *Anaximandro de Mileto* (ca. 610–547 a.e.c.), ya contaba con otra explicación, según la cual las inundaciones se provocaban por el derretido de la nieve en montañas lejanas.

En ello podemos observar dos características:

1. Las diferentes explicaciones se discuten. Así nace el diálogo abierto y científico.
2. Los nuevos pensadores quieren saber *por el conocimiento*, sin preguntarse por la utilidad del conocimiento.

Tales también es conocido en las matemáticas: de él se conoce el Teorema de Tales. Las fuentes transmiten que TALES encontró cuatro teoremas y que dió demostraciones para ellos. Es interesante ver que todos son Teoremas muy sencillos y lo característico de ello es que dió demostraciones aún para afirmaciones tan plausibles como que cada diámetro divide el círculo en dos partes iguales. Se puede discernir el esfuerzo de ya no aceptar nada sin cuestionarlo, de tratar de reflexionar sobre todo y de argumentar aún lo obvio.

Con ello empezó un gran desarrollo: se sustituye la creencia (ciega) en autoridades por un trato crítico con explicaciones y argumentaciones. Así fue como comenzó la emancipación del pensamiento

de sus ataduras místicas y autoritarias.

¿Por qué ocurre el descubrimiento de la actividad matemática racional precisamente en la antigua Grecia? Quizás porque sus habitantes tenían pocos prejuicios que les impidieran absorber ideas y conocimientos de culturas ajenas y construir su propio pensamiento con entera libertad. De hecho lograron vivir (al menos quienes eran considerados ciudadanos, los esclavos no) en un ambiente de libertad propicio para explorar sin freno alguno el poder de la razón para incrementar el conocimiento y la sabiduría. Descubrieron que no era necesario obtener revelaciones divinas o provenientes de los poderosos para llegar a saber algo. Tuvieron libertad de seleccionar los conocimientos más sólidos y útiles que les brindó la experiencia de culturas anteriores como la egipcia y la babilonia, y elaborarlos usando esa herramienta libre, gratuita y (casi) universal que es la razón.

Cabe aclarar que en la antigua Grecia las matemáticas incluían originalmente, además de la geometría y la aritmética, también la música, la geología y otros campos que los griegos consideraban que podían estudiarse racionalmente. Poco a poco esos campos fueron considerándose independientes y las matemáticas se redujeron a incluir solo aquellas áreas que trataban con las abstracciones más puras, que en aquella época eran los números y las figuras geométricas. Siglos después se incorporan a las matemáticas muchas otras abstracciones (como el movimiento, las fuerzas, los campos eléctricos y magnéticos, el azar, las estructuras lógicas, algebraicas, topológicas, etcétera), que constituyen el vasto campo actual de las Matemáticas.

## El método axiomático

Un patrón conocido de argumentación es reducir la veracidad de una afirmación a la de otras, que ya han sido aceptadas, ya sea por convicción o por convención. ¿Pero en qué se basa la veracidad de esas otras afirmaciones? ¿En otras? El proceso de reducción sin fin se parece a la pregunta repetitiva del niño “¿y eso por qué es así?” que con cada explicación dada se puede volver a plantear de manera casi automática.

Por ello los griegos vieron que es necesario (o al menos conveniente) aceptar algunas afirmaciones como verdaderas sin cuestionarlos. Esas afirmaciones, que llamaron *axiomas* y *postulados*, conforman el fundamento de todo lo que se deduce de ellas. La distinción entre axiomas y postulados se debe a ARISTÓTELES (384–322 a.e.c.): los axiomas son generales y los postulados se refieren a la temática especial de la que trata el texto. Estas axiomas y postulados deberían ser afirmaciones que sean clara e inmediatamente evidentes por sí mismas.

La idea fundamental del método axiomático es que se exhiba con toda claridad qué es lo que se supone sin cuestionamiento (es decir los axiomas y los postulados) para poder así tener absoluta claridad de lo que se puede deducir de ello usando únicamente la razón. Si alguien está dispuesto a aceptar estos fundamentos que se llaman axiomas y postulados, entonces está obligado a aceptar como verdaderos todos los enunciados que se demuestran a partir de ellos. El método axiomático es en realidad un acto de honestidad y claridad.

## El método axiomático en Euclides

300 años después de TALES vivió EUCLIDES (ca. 360–280 a.e.c.). Sobre su vida nos han llegado muy pocas noticias, pero su obra más importante, “*Los Elementos*”, en la que expone el *método axiomático* como ningún otro, se convirtió en el modelo indiscutible del rigor metódico que conduce

al conocimiento racional. Los 13 tomos de su obra no contenían, en general, matemáticas nuevas, gran parte de sus enunciados ya era conocidos en aquella época. Lo importante fue que formuló esos conocimientos utilizando el método axiomático con todo rigor. Durante más de dos milenios *Los Elementos* ha sido el libro más estudiado por los matemáticos y hombres de ciencia de todas las épocas y culturas. Tal es su importancia.

*Los Elementos* consta 5 POSTULADOS y 5 NOCIONES COMUNES que se enuncian en el libro I y de muchas DEFINICIONES y PROPOSICIONES que se distribuyen a lo largo de los 13 libros. Los POSTULADOS y las NOCIONES COMUNES constituyen los AXIOMAS (en griego  $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha$  significa “aquello que parece correcto”). Las definiciones sirven para establecer el tema de estudio y dar nombres a sus elementos.

El Libro I comienza con 23 DEFINICIONES y enuncia a continuación los axiomas, es decir, los 5 POSTULADOS y las 5 NOCIONES COMUNES, en los que se basa el resto de la obra. Es importante notar que los 5 postulados requieren para ser enunciados de algunas definiciones, pues son afirmaciones sobre *puntos, líneas, ángulos y círculos*, conceptos cuyo significado se intenta aclarar en las definiciones.<sup>2</sup>

#### DEFINICIONES

1. Un punto es lo que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Los extremos de una línea son puntos.
4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
5. Una superficie es aquello que sólo tiene longitud y anchura.
6. Los extremos de una superficie son líneas.
7. Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.
8. Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.
9. Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se llama rectilíneo.
10. Cuando una línea recta que está sobre otra hace que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de los ángulos es recto, y la recta que está sobre la otra se llama perpendicular a la otra.
11. Un ángulo obtuso es el que es mayor que uno recto.
12. Un ángulo agudo es el que es menor que uno recto.
13. Un límite es lo que es extremo de algo.
14. Una figura es aquello que está contenido por cualquier límite o límites.
15. Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.
16. Y el punto se llama centro del círculo.

---

<sup>2</sup>Como puede verse, algunas definiciones, especialmente las primeras, resultan torpes y no logran del todo su objetivo. Este hecho lo reconoció con claridad Hilbert por lo que en su versión de los fundamentos de la geometría algunos términos como punto, recta y plano aparecen sin justificación alguna y son precisamente los axiomas los que los definen estableciendo sus propiedades (Ver 1.3).

17. Un diámetro de un círculo es una recta cualquiera que pasa por el centro y que acaba en ambas direcciones en la circunferencia del círculo; esta línea recta también divide el círculo en dos partes iguales.
18. Un semicírculo es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia cortada por él. El centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.
19. Figuras rectilíneas son aquellas que están comprendidas por líneas rectas, triláteras las comprendidas por tres, cuadriláteras las comprendidas por cuatro y multiláteras las comprendidas por más de cuatro.
20. De los triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales; isósceles el que tiene dos lados iguales y uno desigual; y escaleno el que tiene los tres lados desiguales.
21. De los triángulos, triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, obtusángulo el que tiene un ángulo obtuso y acutángulo el que tiene los tres ángulos agudos.
22. De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos; rectángulo el que es rectangular pero no equilátero; rombo el que es equilátero, pero no tiene los ángulos rectos; y romboide el que tiene dos lados y dos ángulos opuestos iguales, pero ni es equilátero ni sus ángulos son rectos. Los otros cuadriláteros se llaman trapecios.
23. Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

Como puede verse, estas definiciones coinciden casi exactamente con las que usamos en la actualidad, con las excepción de la *línea*, que en la actualidad corresponde a *curva* y *línea recta* que en la actualidad llamamos *segmento*.

#### POSTULADOS

1. Se puede trazar una línea recta de un punto a cualquier otro.
2. Se puede prolongar cualquier línea recta acotada de manera indefinida.
3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si cuando una línea recta intersecta a otras dos hace que los ángulos interiores del mismo lado sean menos que dos ángulos rectos, entonces las dos líneas rectas, al prolongarse, se intersectan de ese lado.

#### NOCIONES COMUNES

1. Cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si uno suma iguales a iguales, los totales son iguales.
3. Si uno subtrae iguales de iguales, los restantes son iguales.
4. Cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí.
5. El total es más grande que cada una de sus partes.

Después se enuncian y se demuestran las PROPOSICIONES una a una. En cada paso se indica lo que se usa, sea esto un postulado o una proposición ya demostrada. La lógica del método axiomático consiste en separar claramente entre lo que se acepta sin discusión y lo que se obtiene como consecuencia. Si uno tiene duda que una de las consecuencias sea correcta, debe ser porque se tiene una duda sobre alguno de los pasos de la deducción, o porque se duda de alguno de los postulados.

Las PROPOSICIONES SON DE DOS TIPOS:

1. Afirmaciones cuya validez se demuestra a partir de los postulados y de proposiciones anteriores.
2. Enunciados en los que se describe algo que se desea construir y en los que se describe un procedimiento de construcción se demuestra es que tal procedimiento produce el resultado enunciado.

Los siguientes libros comienzan a veces con nuevas definiciones que establecen un lenguaje adecuado para referirse a ciertos conceptos. En algunas ocasiones hay definiciones intercaladas en el libro entre un grupo y otro de proposiciones, pero siempre lo que presenta el grueso del libro son proposiciones con sus enunciados destacados y las demostraciones respectivas, frecuentemente ilustradas con dibujos o esquemas.

Es importante notar que a lo largo de los 13 libros solo aparecen nuevas definiciones y nuevas proposiciones, pero nunca nuevas nociones comunes o nuevos postulados. Las nociones comunes pertenecen al ámbito de la lógica general. Los 5 postulados, en cambio, son afirmaciones relativas al tema de la geometría que se ofrecen sin demostración y en las que deberán basarse las demostraciones de todas las afirmaciones posteriores. Es decir, todo el conocimiento geométrico se fundamenta en estos 5 postulados. Cabe hacer notar que a lo largo de los dos milenios posteriores a *Los elementos*, estos postulados fueron sometidos a un fuerte escrutinio por parte de los matemáticos y no siempre salieron airosos. Se descubrieron varios huecos y fue necesario enmendar los detalles del método de Euclides (Ver 1.3). Pero el concepto del método se preserva hasta nuestros días y sigue siendo el fundamento del conocimiento racional.

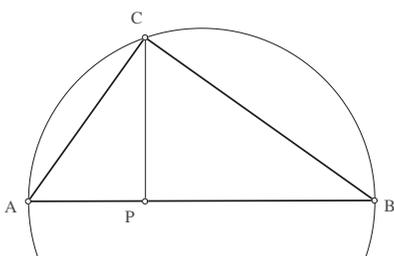
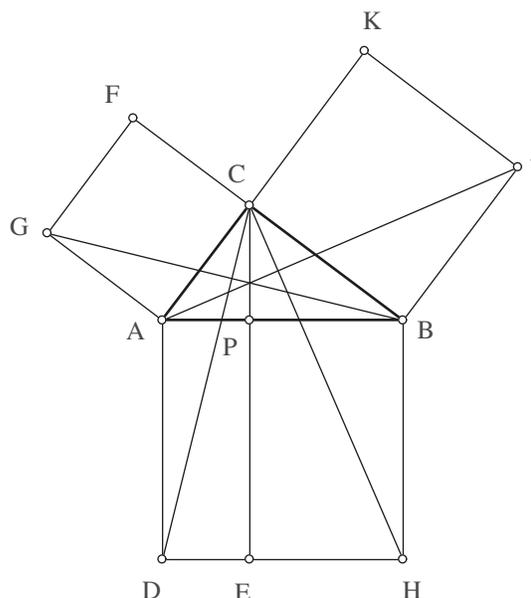
## Contenido matemático de *Los Elementos* de EUCLIDES

El contenido de esta obra es siempre de carácter matemático, pero no trata únicamente de geometría, también hay temas de aritmética y teoría de números, aunque es verdad que los temas geométricos dominan la mayor parte de la obra y que la teoría de números se presenta en términos que podrían considerarse casi geométricos.

### Los libros I, II, III y IV tratan de geometría plana

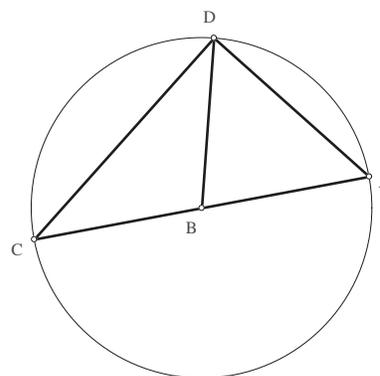
El libro I, después de establecer las definiciones y los axiomas, presenta proposiciones básicas de la geometría plana, algunas de las cuales constituyen construcciones “con regla y compás”, como la proposición 1: *Construir un triángulo equilátero sobre un segmento*, o la 10: *Dividir un segmento en dos partes iguales*. La proposición 5 dice: *Los ángulos en la base de un triángulo equilátero son iguales*. La proposición 36 dice: *Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí* (es decir, tienen áreas iguales) y por tanto justifica la fórmula  $base \times altura$  para el área del paralelogramo.

La 38 dice: *Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas, son iguales entre sí.* y la 41: *Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y ambos están entre las mismas paralelas, entonces el paralelogramo es el doble que el triángulo* justifican la fórmula  $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$  para el área de un triángulo. Las dos últimas proposiciones del libro I, la 47 y la 48, constituyen el Teorema de Pitágoras y su inverso. En resumen, este libro fija los primeros principios que son una especie de explicitación del lenguaje y las normas que se usan en el razonamiento deductivo y desarrolla gradualmente los conceptos no numéricos de área, ángulo recto y perpendicularidad, y concluye con una de las demostraciones más bellas, aunque ciertamente no la más simple, del Teorema de Pitágoras. La figura adjunta muestra el esquema correspondiente a la proposición 47.



Se dice que el libro II trata de álgebra geométrica pues sus proposiciones pueden interpretarse como identidades algebraicas tales como  $a(b+c+\dots) = ab+ac+\dots$  o  $(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$ . Se trata de un álgebra de segmentos que son figuras, y no números. Su última proposición, la 14: *Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada* muestra una manera de definir un segmento que es la raíz cuadrada del producto de otros dos, es decir, realiza una operación algebraica con segmentos, que son entes geométricos.

El libro III presenta los círculos y sus propiedades. Por ejemplo, cómo encontrar el centro de un círculo (proposición 1), intersecciones de círculos y círculos tangentes (proposiciones 10-13), trazar una recta tangente a un círculo (proposición 17), los ángulos inscritos y su relación con los ángulos centrales, incluyendo el llamado segundo teorema de Tales (figura adjunta) que afirma que el ángulo desde el cual se ve un diámetro desde un punto de la circunferencia es recto (proposiciones 20-22) y los teoremas sobre la potencia de un punto respecto a un círculo (proposiciones 35-37).



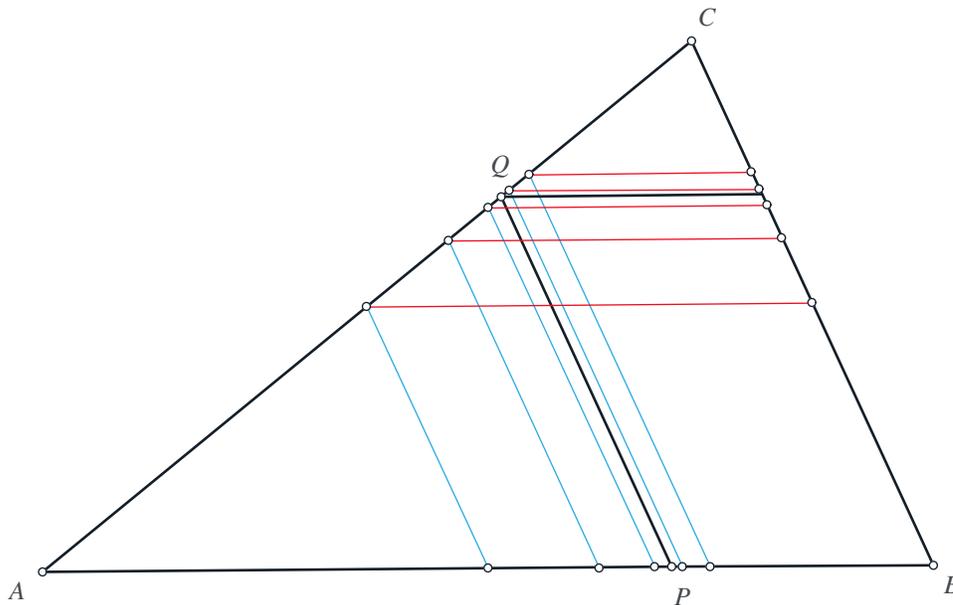
En el libro IV se construyen el incírculo (proposición 4) y el circuncírculo (proposición 5) de un

triángulo y también los polígonos regulares de 4, 5, 6 y 15 lados. La joya de este libro son las proposiciones 10 y 11 en las que se construye el pentágono regular. En la proposición 16 se construye el pentadecágono regular utilizando las construcciones del triángulo y el pentágono regulares inscritos en un mismo círculo.

### Los libros V y VI tratan la teoría de las proporciones y la semejanza de triángulos

El libro V presenta la teoría de las proporciones, debida a EUDOXIO de Cnidos (390-337 a.e.c.), uno de los matemáticos más importantes de la antigüedad griega junto con ARQUÍMEDES de Siracusa y APOLONIO de Pérgamo. Éste es uno de los libros más difíciles de leer de *Los elementos* en la actualidad. En él se presenta el concepto de la razón de dos magnitudes (las magnitudes pueden visualizarse como longitudes de segmentos, por ejemplo), que hoy día no utilizamos ya que las representamos simplemente con números reales. Se trata de magnitudes no cuantificadas que permiten trabajar con entidades cuyos valores deberían ser continuos (no discretos) como la longitud, y las medidas de los ángulos, las área y los volúmenes, sin usar números irracionales.

En el fondo, la teoría de las proporciones es un sustituto de los números reales positivos que fue necesario desarrollar porque los antiguos griegos no tenían un sistema de numeración que permitiera siquiera concebir a los irracionales como números. Fue Eudoxio quien hizo este desarrollo y lo hizo con gran elegancia y rigor. Cabe mencionar que también se debe a Eudoxio el llamado método de exhaustión para definir y a veces calcular las áreas de figuras con fronteras no rectilíneas y los volúmenes de cuerpos cuyas superficies no son planas. Fue Arquímedes quien obtuvo los resultados más importantes de la antigüedad con este método, como la cuadratura de la parábola, el volumen y la superficie de la esfera y su estimación del número  $\pi$  (Ver 3.4, 3.5 y 3.6). Pero fue Eudoxio quien sentó las bases teóricas para realizar estos cálculos. Es probable que desarrollase la teoría de las proporciones precisamente para sustentar su método de exhaustión.



<http://descartes.matem.unam.mx/ejemplos/ConGeo2D/>

El libro VI aplica la teoría de las proporciones desarrollada en el libro V a la semejanza de triángulos. Uno de los resultados poco conocidos de este libro y que sin embargo es muy útil es la proposición 3 en la que se demuestra que la bisectriz del vértice de un triángulo divide al lado opuesto en la misma razón en la que están sus lados adyacentes. El resultado más conocido y más usado de este libro es parte de la proposición 4: *En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales*. Solemos referirnos a este resultado diciendo simplemente que *los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales*. La mayor parte de este libro profundiza en lo que hoy llamamos “criterios de semejanza”.

En la enseñanza moderna de la geometría los resultados del libro VI son unos de los más conocidos y utilizados, pero suelen verse haciendo caso omiso de la teoría de las proporciones del capítulo V, abusando de la ventaja que tenemos de poder tratar las longitudes de segmentos como números reales y de utilizar el álgebra básica para operar con ellos. Por ejemplo, si los triángulos ABC y DEF son semejantes, interpretamos la proporcionalidad de sus lados como las igualdades de los cocientes  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$  y no tenemos ningún empacho en deducir de aquí, por álgebra elemental, que  $AB \cdot EF = BC \cdot DE$  y que  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ . Para los antiguos griegos estos resultados estaban lejos de ser tan triviales como hoy los vemos. Tales cocientes y productos no existían para ellos, no eran números sino razones y no podían operar con ellas tan fácilmente como lo hacemos ahora que los interpretamos como números reales. Los resultados equivalentes a estas manipulaciones algebraicas tan simples fueron para ellos resultados del desarrollo cuidadoso de la teoría de las proporciones, que les permitió avanzar mucho en la geometría a pesar de no contar con los números reales.

### Los libros VII, VIII, IX y X tratan la teoría de números

Los libros VII, VIII y IX tratan teoría de los números enteros positivos y comparten una sola lista de definiciones que se encuentra al principio del libro VII. El libro VII trata la divisibilidad de los números (enteros positivos) y los números primos. Presenta el “algoritmo de Euclides” para encontrar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Las proposiciones 30 y 32 constituyen lo que hoy llamamos el Teorema fundamental de la aritmética: *Todo entero positivo se puede escribir como el producto de números primos de una manera única*. Aunque Euclides no podía enunciarlo así pues en su época no se concebía un producto de más de tres números.

Los libros VIII y IX tratan de proporciones entre números enteros positivos y sus cuadrados y cubos. El libro VIII trata también las sucesiones geométricas. El libro IX demuestra que hay una infinidad de números primos (proposición 20), calcula la suma de una serie geométrica (proposición 35) y presenta la construcción de números perfectos (proposición 36).

El libro X es por mucho el más voluminoso. Trata de “magnitudes inconmensurables” (es decir números irracionales) y utiliza los conocimientos desarrolladas en los libros V, VI, VII, VIII y IX, así como las ideas del método de exhaustión para relacionarlas con los números.

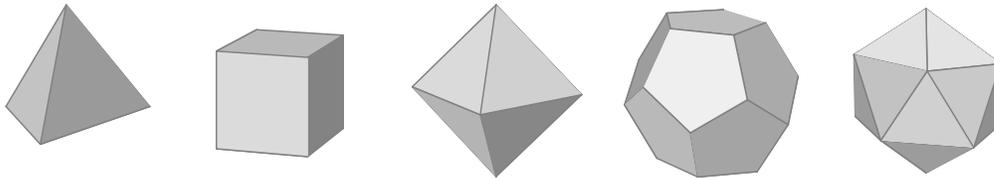
Es interesante leer partes de estos cuatro libros y comprobar lo difícil que era hablar de los temas que tratan sin el beneficio de la notación algebraica que hoy disfrutamos. En gran medida los libros VII, VIII, IX y X son los más anticuados de *Los elementos*, no porque sus resultados no sean válidos e importantes, sino porque están presentados en un lenguaje que hoy en día resulta sumamente pesado.

### Los libros XI, XII y XIII tratan la geometría del espacio

El libro XI trata, en particular el tema de los puntos, las rectas, los planos en el espacio y las figuras sólidas.

El libro XII trata del volumen de algunas figuras sólidas como prismas, pirámides y conos, y la razón que guardan los volúmenes esas figuras con respecto a sus magnitudes lineales.

Finalmente el libro XIII es un tratamiento de los *poliedros regulares*, también llamados *sólidos platónicos*.



El mayor logro de este libro es la construcción, podríamos decir que “con regla y compás”, del tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro regulares. Lo que en realidad se construye con regla y compás son los lados y los ángulos entre los lados y entre las caras de estas figuras para que queden inscritas en una esfera dada.

### Conclusión

*Los elementos* de EUCLIDES constituyen una exposición bien ordenada y muy completa de los conocimientos matemáticos que se tenían en la época de Euclides. No deben considerarse únicamente como un libro que expone el método axiomático. La combinación de ambos aspectos: el método axiomático y los conocimientos matemáticos, son lo que hacen de *Los elementos* una obra tan importante. Las obras de los matemáticos anteriores a Euclides no sobrevivieron. Probablemente esto se debe a que resultaban innecesarias al contar con la excelente exposición de *Los elementos*. Pero se sabe que tales obras existieron y que ya contenían casi todos los conocimientos expuestos en la de Euclides.

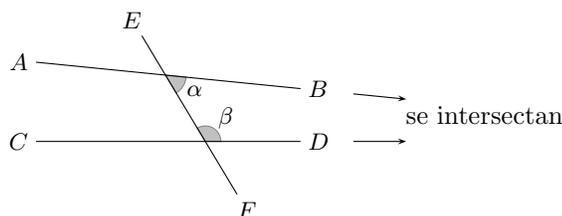
A lo largo de este capítulo y del siguiente se presentará la mayor parte de los contenidos geométricos que aparecen en *Los elementos*, así como varios desarrollos posteriores. Primero haremos una presentación de los fundamentos de la geometría, más apegada a Hilbert que a Euclides, pero difiriendo también de este último autor en algunos aspectos. A continuación seguiremos un programa para desarrollar la geometría partiendo de tales fundamentos separándola en dos partes: aquello que no tiene que ver con áreas y volúmenes, que es lo que se trata en este capítulo, y todo aquello que tiene que ver con la medida de segmentos, áreas y volúmenes, que es lo que se trata en el siguiente.

### 1.3. Los fundamentos de la geometría

#### El quinto postulado

Los primeros cuatro postulados de *Los Elementos* de EUCLIDES satisfacen el requerimiento de que los axiomas deben ser afirmaciones evidentes. Pero eso no pasa con el quinto postulado.

El enunciado del quinto postulado no es inmediatamente evidente. Para empezar, hay que leerlo dos o tres veces para lograr entender lo que quiere decir. Habla de un segmento recto que intersecta a otros dos, llamemos al primero  $EF$ . A los otros dos, que son cortados por  $EF$ , los llamamos  $AB$  y  $CD$ .



El postulado parte de la premisa que los ángulos interiores de un lado, que en la figura adjunta se llaman  $\alpha$  y  $\beta$ , suman menos que dos ángulos rectos. En esta situación, el postulado afirma que las dos rectas  $AB$  y  $CD$  se intersectan posiblemente después de prolongarlas del lado donde están estos dos ángulos.

Es claro que el quinto postulado no tienen la elegancia de los anteriores, no nos parece tan evidente como el de que por cualesquiera dos puntos se puede trazar el segmento recto que los une. Euclides mismo no usó el quinto postulado hasta la Proposición 27. Parece que él mismo no estaba muy satisfecho con él.

Esto causó mucha controversia. Muchos matemáticos creyeron que el quinto postulado era en realidad una consecuencia de los primeros cuatro y trataron de demostrarlo, pero nunca pudieron. Dos mil años después de Euclides se demostró que era imposible demostrarlo y se descubrió una nueva geometría en la que el quinto postulado no se cumple (ver 1.7). Este hecho nos hace apreciar aún más el trabajo de Euclides pues fue capaz de distinguir que este postulado era necesario para su geometría. Tal vez incluso intuyó que sin él la geometría sería imposible, o muy diferente.

Este hecho propició una revisión muy detallada de los fundamentos de la geometría que culmina en el libro de David Hilbert (1862.1943) *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos de la geometría)* publicado en 1899 que no solo proporciona una nueva versión depurada de los axiomas de la geometría sino que ejemplifica la versión moderna del método axiomático.

#### El método axiomático en Hilbert

##### Perspectiva educativa

Es innegable que, en su origen, el pensamiento racional busca primero deducir unas verdades de otras y mucho más tarde intenta encontrar primeros principios o axiomas a partir de los cuales se puedan deducir las demás verdades. La búsqueda de primeros principios surge como una necesidad

cuando el conjunto de verdades inter-conectadas por la razón debe ordenarse y documentarse, como ocurrió en el trabajo de Euclides. Allí es donde surge la necesidad de decidir por dónde empezar. En la práctica y en la génesis de las matemáticas la búsqueda de primeros principios es posterior al establecimiento de los conceptos, sus propiedades y los teoremas más importantes. No conviene olvidar esto para que al enseñar matemáticas no ignoremos ese paso pre-axiomático que es la etapa más vital, interesante, motivadora y formadora de la actividad matemática. Es la etapa en la que se exploran las primeras ideas y se descubren relaciones interesantes entre los conceptos abstractos que se están creando o aprendiendo. Cuando al enseñar matemáticas se presentan al alumno directamente los axiomas, no se puede esperar que responda con entusiasmo y menos aún que disfrute de los primeros teoremas que se pueden deducir directamente de ellos, los cuales suelen ser bastante sosos. En una presentación estrictamente axiomática, los teoremas más interesantes, que son el objetivo de toda la construcción, no aparecen sino al final de la presentación.

Creemos que es muy inconveniente esconder al estudiante la motivación originaria, el descubrimiento de las relaciones entre unos conceptos aún mal definidos pero que tienen significado por su cercanía con la problemática concreta que los impulsa a nacer. Conviene ofrecerle la oportunidad de redescubrir todo, en la medida de lo posible, sin llegar a una parálisis, y guiarlo para profundizar poco a poco, tanto hacia las aplicaciones como hacia los fundamentos. Los sistemas axiomáticos pulidos son necesarios para los matemáticos profesionales. Al ciudadano medio le conviene conocer las abstracciones que son significativas para él, y entender sus consecuencias importantes, sin necesidad de pasar por las sutilezas de los primeros principios y los detalles de una estructura lógica muy pulida pero que quizás carece de naturalidad y significado inmediato. Esto no debe confundirse con dar la espalda al pensamiento riguroso que debe ser siempre el aspecto central del aprendizaje de las matemáticas, pero éste tampoco debe confundirse con la deducción a partir de primeros principios. El pensamiento riguroso puede apreciarse y aprenderse mejor si se experimenta como una de las partes del proceso de descubrimiento, abstracción y formalización.

### **El método axiomático en el mundo moderno**

Pero tarde o temprano hay que “coger el toro por los cuernos” y decidir cuáles serán los axiomas de una teoría matemática. Los antiguos griegos pensaban que los primeros principios (como los postulados y las nociones comunes de Euclides) deberían ser *axiomas*, que para ellos quería decir *afirmaciones cuya verdad es evidente*. Sin embargo la experiencia del quinto postulado obligó a los matemáticos a ser más cuidadosos con el concepto de primeros principios y es así como David Hilbert en sus *Fundamentos de la geometría* no los concibe como verdades evidentes sino como *propiedades de las abstracciones que ellos mismos ayudan a determinar*. Por ejemplo, el que *por dos puntos pasa una y solo una línea recta* es un axioma, pero no porque sea un hecho evidente sino porque los puntos y las rectas son entes abstractos que tienen, entre otras, esta propiedad. Hilbert modifica radicalmente el concepto de axioma eliminando de él el requerimiento de ser evidente y lo convierte en definición parcial de aquello de lo que afirma algo. Al mismo tiempo elimina algunas definiciones, como las de punto, recta y plano, que sin duda eran un poco ridículas en la versión de Euclides, y las sustituye precisamente por el conjunto de axiomas que hablan de ellas, convirtiéndose así los axiomas en los determinantes los conceptos abstractos cuyas propiedades describen.

Sin duda la idea del método axiomático de Hilbert es mucho más clara y precisa que la de Euclides, pero a cambio tiene que pagar un precio: su aplicabilidad al mundo real no está garantizada. Hilbert libera a las matemáticas de la necesidad de responder al mundo real, pero a cambio las equipa de una

estructura casi perfecta. La utilidad de un sistema axiomático hilbertiano depende de si hay alguna interpretación en el mundo real de sus conceptos que se comporte de manera idéntica o al menos cercana al modelo abstracto que el sistema define. Pero un sistema axiomático no tiene la obligación de representar ninguna realidad. Los sistemas axiomáticos se obtienen verdades absolutas, pero no hablan de la realidad sino de entes abstractos.

Los requerimientos que Hilbert pide a un sistema axiomático es que los axiomas sean *consistentes*, es decir que de ellos no se pueda deducir una contradicción; *independientes*, es decir que ninguno de ellos pueda deducirse a partir de los otros; y *completos*, es decir toda proposición que pueda expresarse en el lenguaje del sistema axiomático es *decidible*, o sea que ella, o bien su negación, debe poder deducirse de los axiomas. Los dos primeros requisitos son factibles y Hilbert mismo lo ilustró con claridad en su libro. Sin embargo el tercer requerimiento, el de que el sistema sea *completo*, no es factible. Kurt Gödel (1906-1978) demostró en 1931 que en cualquier sistema axiomático suficientemente robusto como para describir a los números naturales, hay proposiciones *indecidibles*, es decir, proposiciones verdaderas que no pueden deducirse de los axiomas.

### Los axiomas de la geometría de Hilbert

A pesar de la imposibilidad de contar con un sistema axiomático completo, los axiomas de la geometría postulados por Hilbert son muy interesantes y mal que bien constituyen el enfoque más claro y riguroso que tenemos en la actualidad para el estudio de la geometría. Desafortunadamente el libro de Hilbert trata solo el asunto de los fundamentos y logra demostrar que sus axiomas son consistentes e independientes, que es lo mejor que se puede lograr. También resulta claro que son suficientes para reproducir todos los resultados de la geometría euclidiana. En este capítulo usaremos los axiomas de Hilbert para desarrollar la geometría euclidiana, aunque lo haremos siguiendo un programa distinto al del libro de Hilbert ya que nuestro propósito es exponer de manera ordenada y racional los resultados más importantes de la geometría euclidiana y no tanto hacer un escrutinio de sus fundamentos.

Hilbert plantea cinco grupos de axiomas.

#### GRUPOS DE AXIOMA DE HILBERT

1. Axiomas de *conexión e incidencia*.
2. Axiomas de *orden*.
3. Axioma de *Euclides* o *de las paralelas*.
4. Axiomas de *congruencia*.
5. Axioma de *Arquímedes* o de continuidad.

A diferencia de cómo hace su presentación Hilbert, aquí, después de presentar los axiomas de *conexión e incidencia* vamos a extraer de ellos algunos resultados importantes, antes de proceder a enunciar los otros grupos de axiomas.

## 1.4. Los axiomas de conexión e incidencia

Como ya aclaramos anteriormente, Hilbert no intenta definir los términos básicos como *punto*, *recta* y *plano* sino que adopta como definiciones de ellos precisamente las propiedades que los axiomas de conexión e incidencia describen. Lo único que menciona antes de enunciar estos axiomas es que se trata de entes abstractos que se van a denotar así: los puntos con letras mayúsculas  $A, B, \dots$ ; las rectas con letras minúsculas  $a, b, \dots$  y los planos con letras griegas  $\alpha, \beta, \dots$ .

### AXIOMAS DE CONEXIÓN E INCIDENCIA

1. Dos puntos distintos  $A$  y  $B$  siempre determinan completamente una recta  $a$ . En tal caso decimos que  $a = AB$  (y también que  $a = A \vee B$ ).
2. Dos puntos distintos de una recta siempre la determinan completamente. Es decir, si  $A \vee B = a$  y  $A \vee C = a$ , entonces también  $B \vee C = a$ .
3. Tres puntos  $A, B, C$  que no están en una misma recta siempre determinan completamente un plano  $\alpha$ . En ese caso escribimos  $ABC = \alpha$  y también  $A \vee B \vee C = \alpha$ .
4. Tres puntos que están en un mismo plano siempre lo determinan completamente.
5. Si dos puntos  $A, B$  de una recta  $a$  están en un plano  $\alpha$  entonces todos los puntos de  $a$  están también en  $\alpha$ .
6. Si dos planos  $\alpha$  y  $\beta$  tienen un punto  $A$  en común, entonces tienen al menos otro punto  $B$  en común.
7. En toda recta hay al menos dos puntos. En todo plano hay al menos tres puntos que no están en una misma recta. Y en el espacio hay al menos cuatro puntos que no están en un mismo plano.

He aquí algunas consecuencia inmediatas de estos axiomas. Dejamos las demostraciones como ejercicio para el lector.

### CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CONEXIÓN E INCIDENCIA

1. Dos rectas distintas tienen un punto en común o bien no tienen ningún punto en común.
2. Dos planos tienen una recta en común o bien no tienen ningún punto en común.
3. Un plano y una recta que no está contenida en él tienen un punto en común o bien no tienen ninguno en común.
4. Una recta y un punto que no está en ella determinan un único plano que los contiene.
5. Dos rectas que tienen un solo un punto en común determinan un único plano que las contiene.

## 1.5. La geometría proyectiva

Los axiomas de conexión e incidencia describen aspectos básicos pero importantes de nuestro espacio. La mejor muestra de esto está en la perspectiva (ver 1.6). Todo lo que visualizamos en proyecciones planas (cine, tv y videojuegos), así como las obras de arte de la pintura, usan la teoría de la perspectiva, que se basa en los axiomas de conexión e incidencia.

Es sorprendente comprobar que el estudio de las consecuencias de los axiomas de conexión e incidencia, que hoy llamamos *Geometría proyectiva*, los más sencillos de toda la geometría, tuvo su

apogeo a principios del siglo XIX y no, como podría pensarse, en la antigüedad. Aunque los antiguos griegos y sobre todo los matemáticos de Alejandría estudiaron algunos aspectos de la geometría proyectiva, no llegaron a separar los aspectos propiamente proyectivos de los de medición.

Quien tuvo por primera vez la visión clara de que había muchos aspectos de la geometría que dependían exclusivamente de las propiedades de los puntos y las rectas, fue el matemático alemán KARL GEORG CHRISTIAN VON STAUDT (1798 - 1867), colaborador de GAUSS. Sin embargo a lo largo de la historia muchos matemáticos contribuyeron con ideas importantes al desarrollo de la Geometría proyectiva. El más importante en la antigüedad es, sin duda PAPPUS DE ALEJANDRÍA quien enunció por vez primera uno de los resultados más importantes de esta geometría. Pero podemos encontrar contribuciones anteriores como en el caso de MENELAO. Quizás la primera contribución moderna deba considerarse la de DESARGUES que aunque en la actualidad está bien reconocida, por muchos años fue ignorada por el establecimiento matemático. Y es que no fue fácil para el mundo matemático reconocer que hay muchos resultados de importancia fundamental en la geometría que nada tienen que ver con los aspectos métricos. Renunciar a los aspectos métricos implica, para empezar, renunciar a una de las figuras geométricas más apreciadas, el círculo. En Geometría proyectiva no hay círculos. Sin embargo la Geometría proyectiva está íntimamente relacionada con muchos resultados que identificamos como relativos al círculo. Y es que esos resultados en realidad aplican a todas las curvas cónicas, las cuales, o sorpresa, sí son parte de la Geometría proyectiva. Sí, el hecho de que los círculos no sean elementos proyectivos, pero las curvas cónicas sí, es uno de los aspectos más sorprendentes de la Geometría proyectiva y quizás el que más ha contribuido a que ésta sea malentendida por la mayoría de los matemáticos que poco conocen de ella.

No es posible en este trabajo de carácter general hacer una presentación que haga justicia a la Geometría proyectiva. Solamente intentaremos señalar sus aspectos más representativos y a describir su importancia como fundamento del resto de la Geometría.

Comenzaremos por mostrar tres de los resultados más típicos y sencillos de la Geometría proyectiva, que pueden considerarse consecuencias más o menos directas de los axiomas de conexión e incidencia.

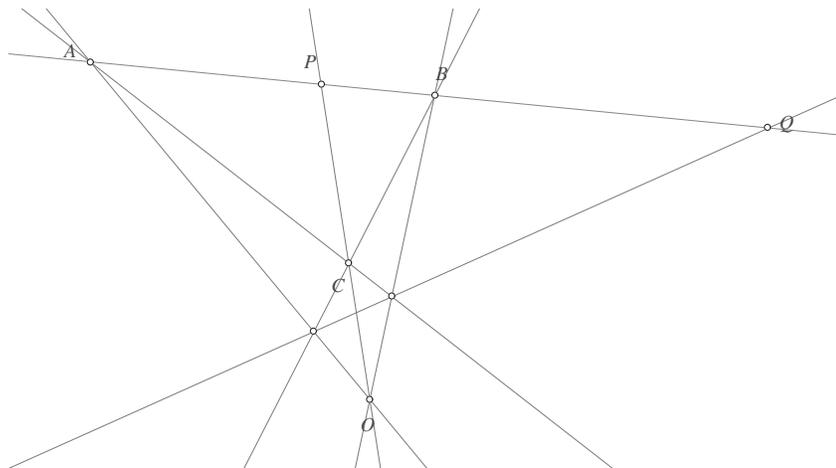
#### CONSECUENCIAS NO TRIVIALES DE LOS AXIOMAS DE CONEXIÓN E INCIDENCIA

1. Teoremas sobre cuartetos armónicos.
2. Teorema de Desargues.
3. Teorema de Pappus.

Una característica muy interesante de estos teoremas es que, aunque pueden enunciarse como afirmaciones sobre puntos y rectas del plano, sus demostraciones más directas y que no requieren más que de los axiomas de conexión e incidencia, pasan por el espacio.

#### Teorema de las cuartetos armónicos

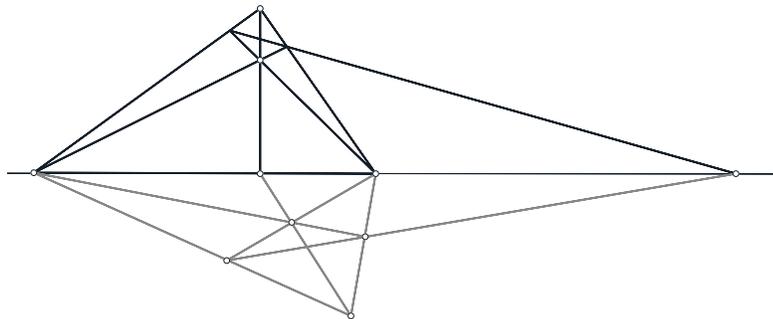
*Teorema.* Dados dos puntos  $A$  y  $B$  y otro punto  $P$  alineado con ellos, construyamos un cuarto punto  $Q$ , en la misma línea, como se ilustra en la figura, donde el punto  $O$  es cualquiera que no esté en  $AB$  y  $C$  es un punto arbitrario de  $OP$ . Entonces el punto  $Q$  es siempre el mismo, es decir, es independiente de  $O$  y de  $C$ .  $Q$  se llama el *armónico conjugado de  $P$  respecto a  $AB$* .



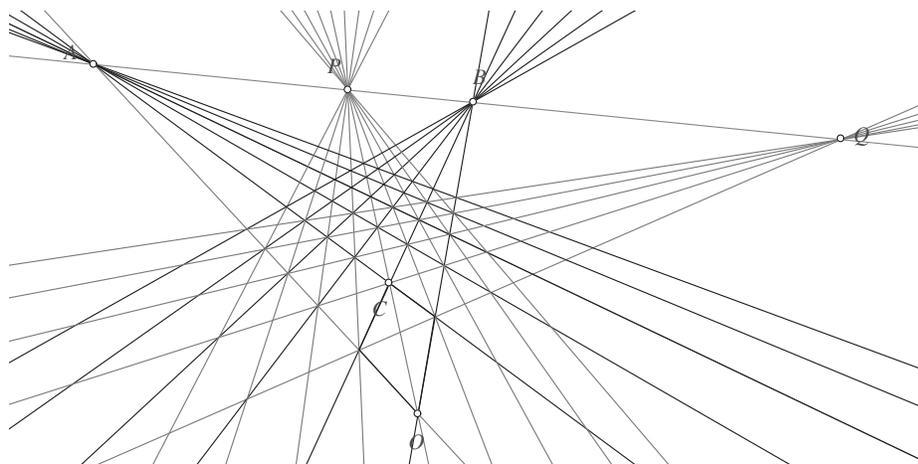
⊙3D

Imaginemos la recta que contiene a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $P$  como yaciendo en un plano horizontal, digamos el suelo. Realicemos la construcción del armónico  $Q$  de  $P$  respecto a  $AB$  en un plano distinto (por ejemplo vertical). Proyectemos al plano original (es decir al suelo) desde un punto fuera de ambos planos. Podemos pensar esa proyección como la *sombra* de la construcción. Es claro que esa sombra constituye otra construcción del armónico  $Q$  de  $P$  respecto a  $AB$  y lleva al mismo resultado porque  $A$ ,  $P$ ,  $B$  y  $Q$  no cambian con la proyección.

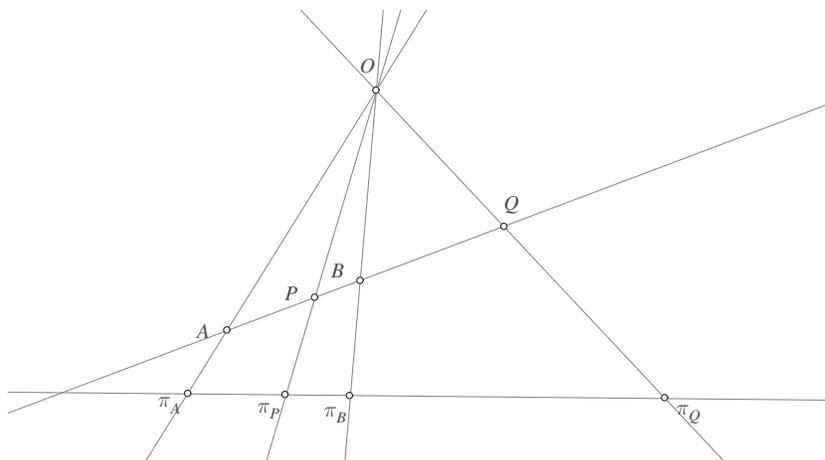
◦



El teorema de las cuartet armónicas está íntimamente relacionado con la perspectiva, como la construcción que aquí presentamos sugiere.



La proyección de una cuarteta armónica desde un punto  $O$  a otra recta es también una cuarteta armónica. Es decir, si  $A, B, P, Q$  es una cuarteta armónica,  $O$  es un punto que no está en la recta  $AB$  y  $r$  es una recta distinta de  $AB$  que no contiene a  $O$ , entonces la cuarteta  $\pi_A = OA \wedge r$ ,  $\pi_B = OB \wedge r$ ,  $\pi_P = OP \wedge r$ ,  $\pi_Q = OQ \wedge r$  formada por las proyecciones de los puntos  $A, B, P, Q$ , es armónica.



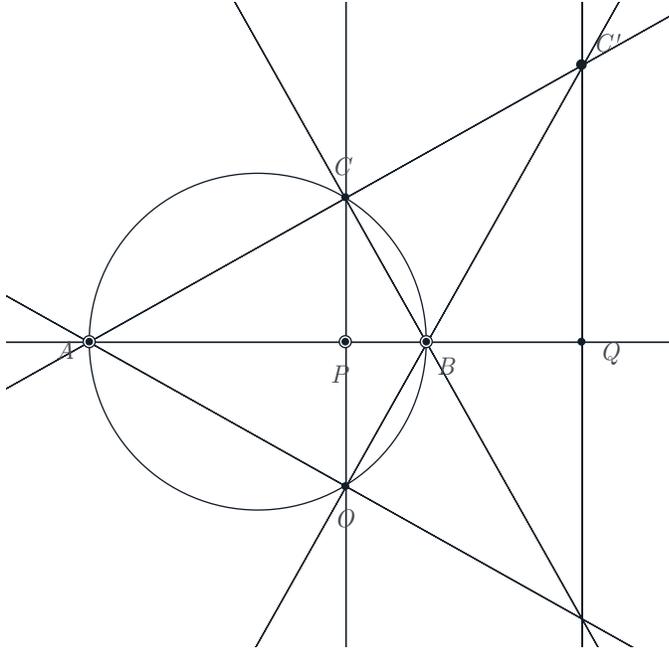
Dejamos las demostraciones formales de estos teoremas como ejercicios para el lector.

Es interesante observar que este teorema tan elemental no fue reconocido por el mundo matemático antes del siglo XIX. La noción de cuartetas armónicas surgió en la historia vinculada a una expresión en términos de tamaños de segmentos. Aún en la actualidad, si se le pregunta a un matemático qué es una cuarteta armónica, lo más probable es que responda que se trata de una cuarteta de puntos  $ABPQ$  alineados que satisface la relación

$$\frac{AP}{PQ} = -\frac{AQ}{QB} \quad (1.1)$$

Ésta es una propiedad numérica de las cuartetas armónicas, que efectivamente es cierta cuando se introduce el concepto de distancia o al menos el de igualdad entre razones. Sin embargo utilizar esta

relación como la definición de cuarteta armónica oscurece en gran medida su carácter mucho más básico. La siguiente figura muestra una configuración de construcción de una cuarteta armónica con la cual es fácil deducir la propiedad 1.1.



Se construye el círculo con diámetro  $AB$  y se eligen  $O$  y  $C$  en la perpendicular a  $AB$  que pasa por  $P$  y se completa la construcción del armónico conjugado  $Q$  de  $P$  respecto a  $AB$ . Por semejanza de triángulos resulta que

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{PC}{QC'} = \frac{PB}{BQ}$$

y por tanto

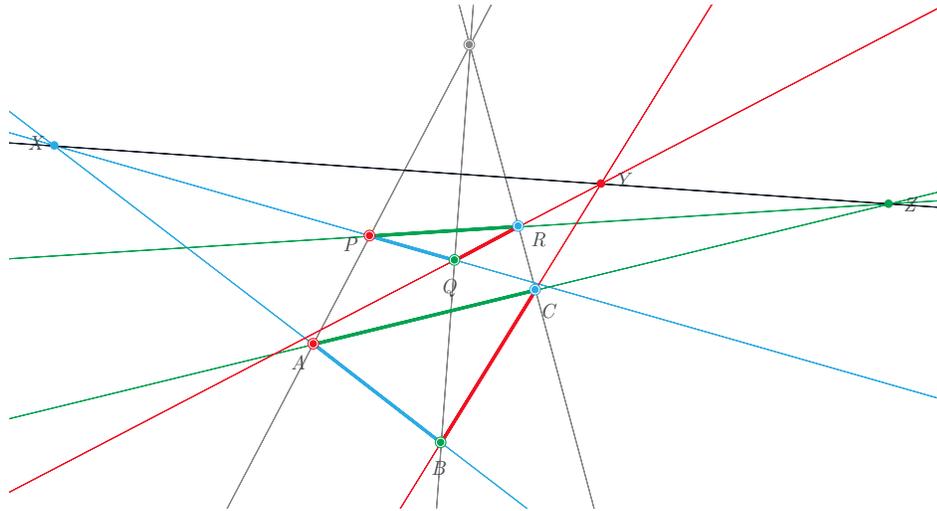
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = -\frac{AQ}{QB}$$

que es precisamente la fórmula de armonicidad 1.1.

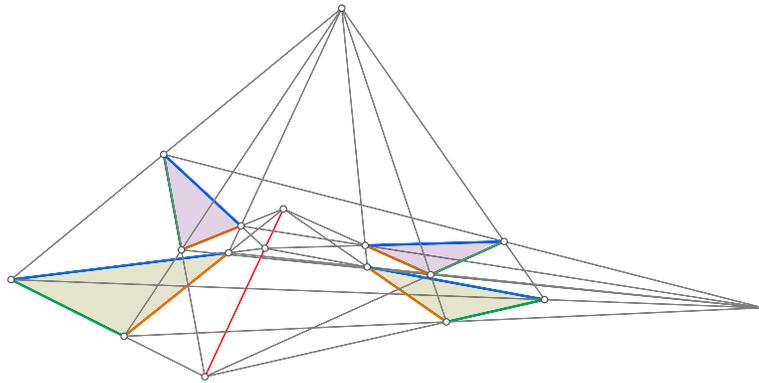
Pero hay que observar que para obtenerla fue necesario construir una circunferencia con centro en el punto medio de  $AB$ , una perpendicular a  $AB$  por  $P$  y usar las igualdades entre razones que la semejanza de triángulos proporciona, todo lo cual se aleja claramente de los conceptos básicos contemplados en los axiomas de conexión e incidencia.

El teorema de Desargues fue enunciado y demostrado por vez primera por el matemático francés GIRARD DESARGUES (1591 - 1661), por lo cual se le considera uno de los fundadores de la Geometría proyectiva.

Se dice que dos triángulos  $A, B, C$  y  $P, Q, R$  están en perspectiva si las rectas  $AP, BQ$  y  $CR$  coinciden en un punto. En ese caso, se dice que los vértices  $A$  y  $P$  son correspondientes, al igual que  $B$  y  $Q$  y también  $C$  y  $R$ . Análogamente, se dice que los lados  $AB$  y  $PQ$  son correspondientes, al igual que  $BC$  y  $QR$  y también  $CA$  y  $RP$ . En la siguiente figura los puntos correspondientes y los segmentos correspondientes están pintados en colores iguales.



El teorema de Desargues dice que si los triángulos  $A, B, C$  y  $P, Q, R$  están en perspectiva, entonces las intersecciones de sus lados correspondientes están alineadas, es decir,  $X = AB \cap PQ$ ,  $Y = BC \cap QR$  y  $Z = CA \cap RP$  son colineales. Es fácil demostrar este teorema usando sólo argumentos de incidencia, mediante un *levantamiento a 3D*, como el que la siguiente figura ilustra.

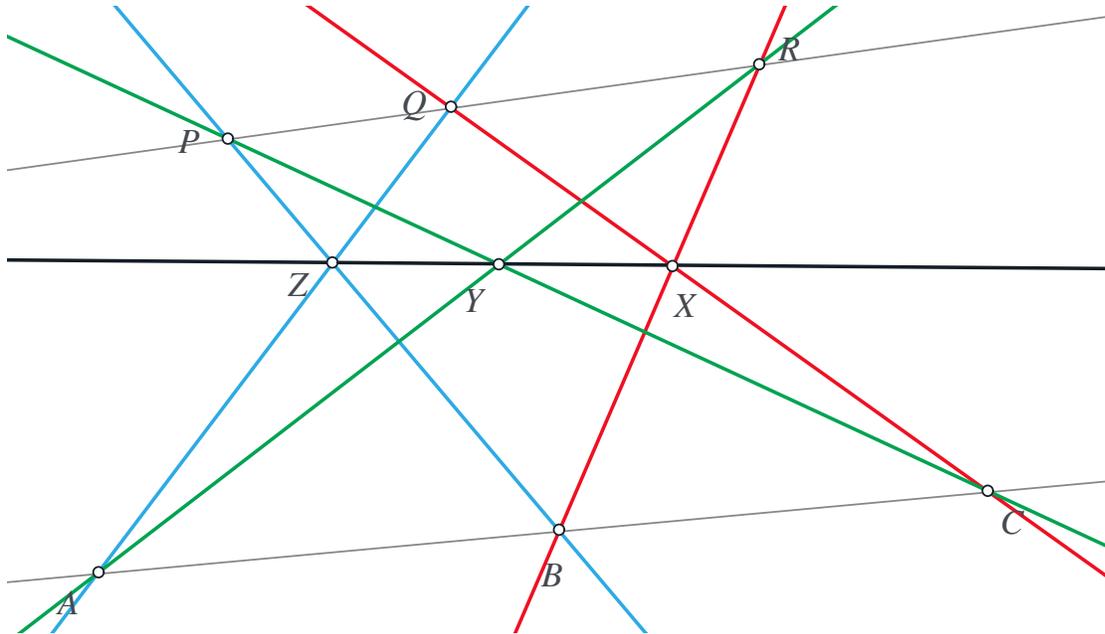


Cuando las intersecciones de los lados correspondientes de dos triángulos están alineadas, se dice que los triángulos están en *perspectiva axial*. La perspectiva normal se llama también *perspectiva polar*. Es fácil ver, utilizando los levantamientos a 3D, que también el inverso del teorema de Desargues se cumple. Así que podemos decir que dos triángulos están en perspectiva polar si y sólo si están en perspectiva axial.

### El teorema de Pappus

Sean  $A, B, C$  y  $P, Q, R$  dos ternas alineadas de puntos. Coloreamos  $A$  y  $P$  en rojo,  $B$  y  $Q$  en verde y  $C$  y  $R$  en azul. Unimos por rectas los puntos de cada terna con los de la otra que tienen distinto color y hagámoslo con rectas del color distinto al de los dos puntos. Sean  $X, Y$  y  $Z$  las intersecciones de las rectas rojas, verdes y azules, respectivamente. El teorema de Pappus afirma

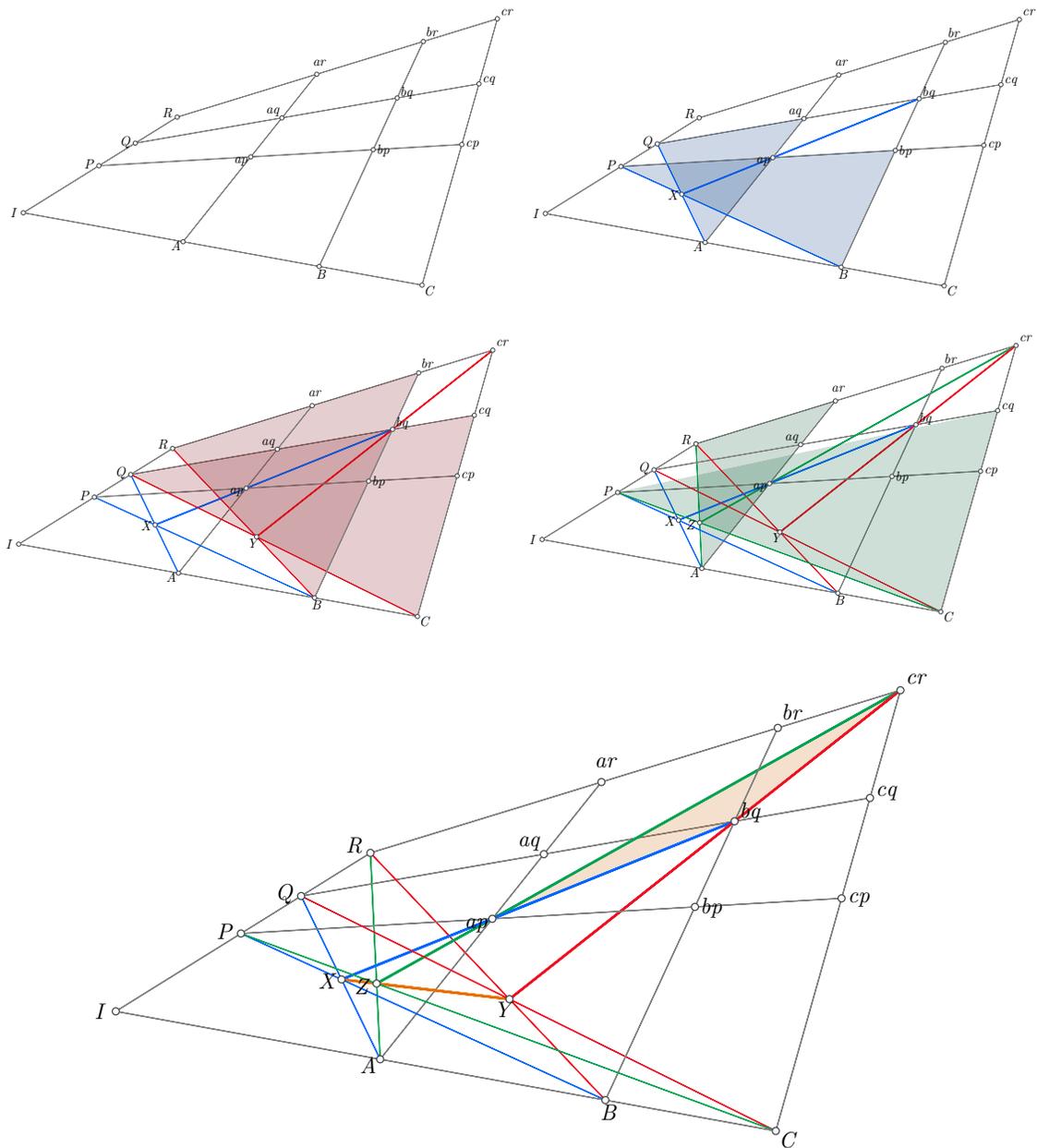
que  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  están alineados.



Este teorema también se puede demostrar mediante un levantamiento a  $3D$ , pero la demostración es más complicada que la del Teorema de Desargues. Pappus de Alejandría (290-350) enunció este teorema pero se desconoce cómo lo demostró (si es que lo demostró). Se dice que Blaise Pascal (1623-1662), con apenas 16 años, demostró un teorema más potente que el de Pappus, que dice afirma la colinealidad de ciertas intesecciones de las rectas que pasan por dos ternas de puntos que se encuentren sobre una curva cónica. Lamentablemente la obra del adolescente Pascal se perdió y tampoco sabemos cómo era esa demostración.

Aunque muchas veces se afirma lo contrario, el teorema de Pascal no es realmente más general que el de Pappus, pues su propio enunciado habla de curvas cónicas, concepto que no tiene sentido con solo los axiomas de conexión e incidencia.

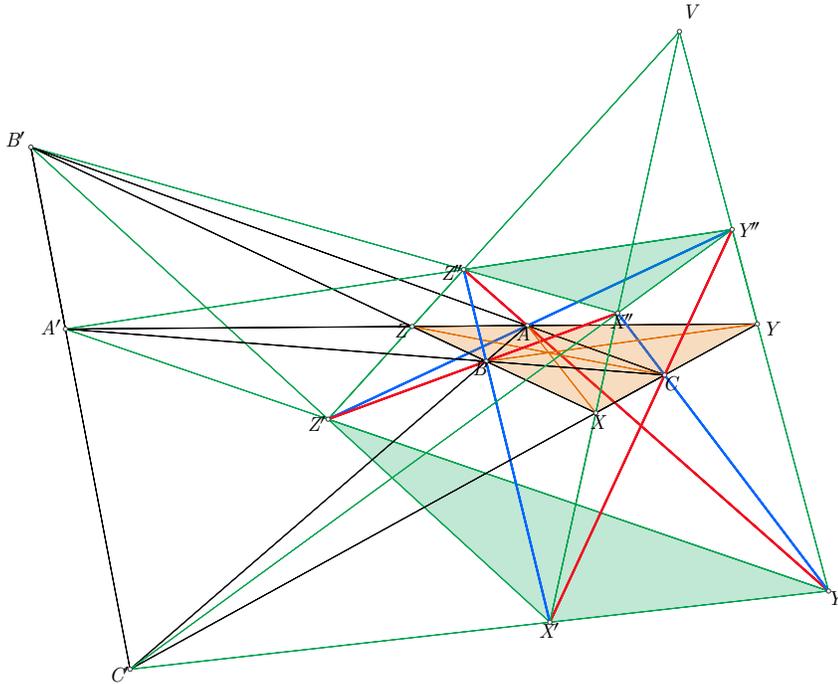
A principios del siglo XVIII Germain Pierre Dandelin (1794-1847) publica por fin una demostración del teorema de Pascal que procede mediante un levantamiento a  $3D$  y que, cuando se especializa al teorema de Pappus, utiliza únicamente los axiomas de conexión e incidencia. Utiliza un teorema sobre superficies generadas por tres rectas en el espacio que no se tocan, que puede consultarse haciendo clic aquí: [©3D](#).



La demostración de Dandelin procede más o menos así. Primero se construye la estructura de la primera figura definiendo un punto  $ap$  fuera del plano  $\alpha = AC \vee PR$ , y se trazan las rectas indicadas, de manera que las que pasan por  $A, B$  y  $C$  no se toquen, las que pasan por  $P, Q$  y  $R$  tampoco se toquen, pero en cambio cada una de las primeras toque a todas las segundas. Puede verse que los puntos  $X, Y, Z$  son precisamente las intersecciones de los lados del triángulo  $ap \vee bq \vee cr$  con el plano  $\alpha$ , por lo cual necesariamente están alineados.

### Las curvas cónicas en la geometría proyectiva

**Teorema.** Sean  $X, Y$  y  $Z$  tres puntos y sean  $A \in YZ, B \in ZX$  y  $C \in XY$ . Sea  $V$  un punto fuera del plano  $\pi = X \vee Y \vee Z$  y sea  $X' \in VX$  distinto de  $V$  y de  $X$ . Definamos ahora  $Y'' = X'C \wedge VY, Z' = Y''A \wedge VZ, X'' = Z'B \wedge VX, Y' = X''C \wedge VY$  y  $Z'' = Y'A \wedge VZ$ .



Entonces  $Z'' = X'B \wedge VZ$  si y sólo si  $XA, YB$  y  $CZ$  son concurrentes.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que  $Z'' = X'B \wedge VZ$ . Entonces los triángulos  $XYX, X'Y'Z''$  y  $X''Y''Z'$  están en perspectiva y, como  $A$  y  $B$  son dos de las intersecciones de sus lados correspondientes, la tercera será  $C' = XY \wedge X'Y' = XY \wedge X''Y'' = XY \wedge AB$ . Análogamente se puede ver que  $A' = YZ \wedge Y'Z' = YZ \wedge Y''Z'' = YZ \wedge BC$  y  $B' = ZX \wedge Z'X' = ZX \wedge Z''X'' = ZX \wedge CA$ . Por otro lado los triángulos  $X'Y'Z'$  y  $X''Y''Z''$  están en perspectiva desde  $V$  y, por el teorema de DESARGUES, las intersecciones de sus lados correspondientes, que son precisamente  $A', B'$  y  $C'$ , están alineadas. Esto prueba que los triángulos  $XYZ$  y  $ABC$  están en perspectiva axial y por el inverso del teorema de DESARGUES también lo están en perspectiva polar, lo cual quiere decir que  $XA, YB$  y  $ZC$  son concurrentes. En la figura el punto en que concurren es  $O$ .

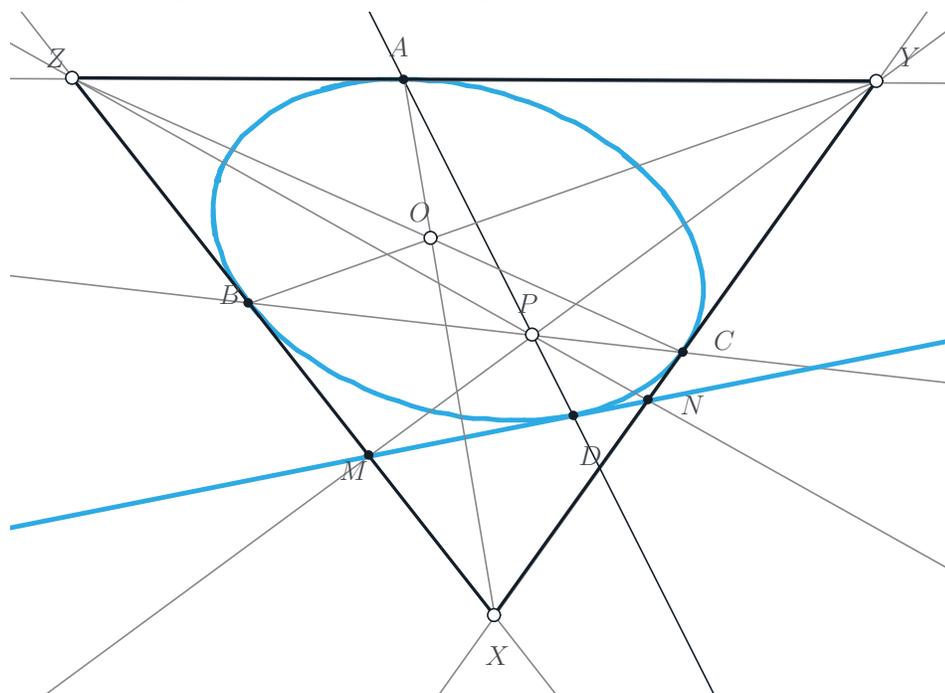
Para demostrar el inverso supongamos que  $XA, YB$  y  $ZC$  son concurrentes. Sea  $O$  el punto en que concurren. Entonces los triángulos  $XYZ$  y  $ABC$  están en perspectiva desde  $O$ . Sean  $A', B',$  y  $C'$  los armónicos conjugados de  $A, B$  y  $C$ , respecto a  $YZ, ZX$  y  $XY$ , respectivamente. Sea  $X' \in VX$  diferente de  $V$  y de  $X$  y sea  $X''$  su armónico conjugado con respecto a  $VX$ . Construimos ahora  $Y' = X''C \wedge VY$  y  $Y'' = X'C \wedge VY$ , por lo que van a ser armónicos conjugados uno del otro con respecto a  $VY$ , ya que  $C$  y  $C'$  lo son respecto a  $XY$ . Ahora construimos  $Z' = Y''A \wedge VZ$  y  $Z'' = Y'A \wedge VZ$ .  $Z'$  y  $Z''$  son armónicos conjugados uno del otro, ahora con respecto a  $VZ$ , ya que

$A$  y  $A'$  lo son respecto a  $YZ$ . Finalmente, como  $B$  y  $B'$  son armónicos conjugados uno del otro con respecto a  $XZ$ , resulta que  $B = Z_1X_2 \wedge X'Z''$ . Esto demuestra que  $Z'' = X'B \wedge VZ$ . QED.

Gracias a este teorema sabemos que dado un triángulo  $XYZ$  y puntos  $A \in YZ$ ,  $B \in ZX$  y  $C \in XY$  tales que  $XA$ ,  $YB$  y  $ZC$  son concurrentes, entonces hay tres rectas (rojas) que pasan por  $A$ , otra por  $B$  y otra por  $C$  y otras tres rectas (azules) de las que también, una pasa por  $A$ , otra por  $B$  y otra por  $C$ , tales que cada una de las rojas intersecta a una de las azules, cada una de las azules intersecta a una de las rojas y ni las rojas ni las azules se intersectan entre sí. Además, la recta roja y la recta azul que pasan por  $A$  o por  $B$  o por  $C$  son armónicas conjugadas una de la otra con respecto a cierto punto  $V$  y al plano  $X \vee Y \vee Z$ . Las tres rectas rojas o las tres azules generan una superficie doblemente reglada (la misma, por el "axioma del equipal"). Probaremos que tal superficie se puede generar a partir de nuestra construcción de la curva cónica que dimos al principio e esta sección, y que su intersección con el plano  $X \vee Y \vee Z$  es precisamente esa curva.

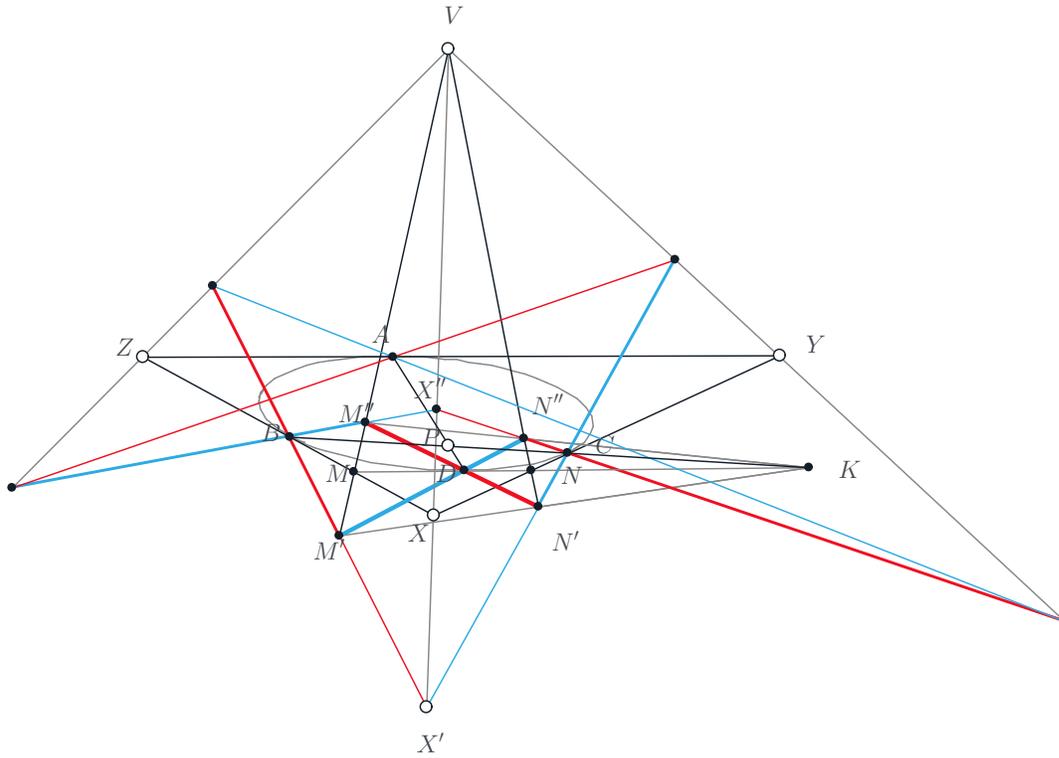
Es posible definir las curvas cónicas utilizando únicamente las propiedades de incidencia de los puntos y las rectas. Hay varias formas de hacerlo, mostraremos aquí una de ellas que, al combinarla con el teorema anterior permite demostrar que estas curvas son las intersecciones de planos con superficies doblemente regladas.

Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  los vértices de un triángulo. Sea  $O$  un punto de  $X \vee Y \vee Z$  que no esté en ninguno de los lados del triángulo. Sean  $A = OX \wedge YZ$ ,  $B = OY \wedge ZX$ ,  $C = OZ \wedge XY$ . Sea  $P \in AB$  y sean  $M = PY \wedge ZX$  y  $N = PZ \wedge XY$ . Finalmente, sea  $D = AP \wedge MN$ . Entonces, cuando  $P$  recorre la recta  $AB$ , el punto  $D$  genera una curva cuya tangente en  $D$  es precisamente  $MN$ .



Se puede ver que la curva así definida pasa por  $A$ , por  $B$  y por  $C$  y es tangente en esos puntos a las rectas  $YZ$ ,  $ZX$  y  $XY$ , respectivamente. A las curvas así definidas les llamaremos en esta sección *curvas cónicas*. Cuando se introducen axiomas de congruencia, es posible demostrar que estas

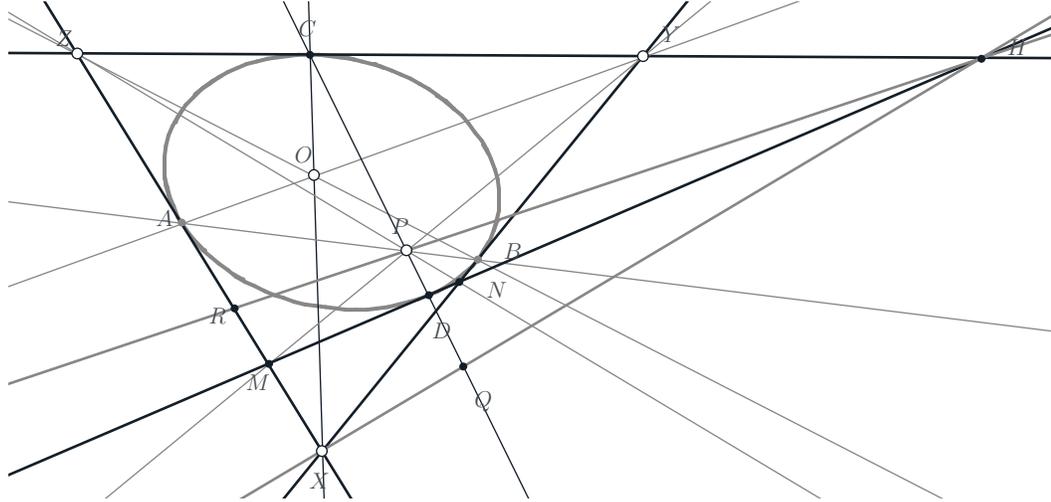
curvas coinciden con la que en la literatura clásica se llaman también “curvas cónicas”, de ahí la elección del nombre. Sin embargo, nuestra definición no requiere de la noción de *congruencia* ni de la de *círculo* o *cono circular*, como ocurre con la definición clásica.



Ampliamos ahora la construcción para obtener una superficie doblemente reglada cuya intersección con el plano  $X \vee Y \vee Z$  es precisamente esta curva. Sea  $M' = BX' \wedge VM$  y sea  $N'' = DM' \wedge VN$ . Sea  $N' = CX' \wedge VN$  y sea  $M'' = DN' \wedge VM$ . Sea  $K = M'N' \wedge M''N''$ . Por construcción,  $M'N'M''N''$  es un cuadrilátero cuyas diagonales se intersectan en  $D$  y sus lados en  $V$  y  $K$ . Las rectas  $M'N''$  (azul) y  $M''N'$  (roja) pertenecen a las familias de rectas que generan a la superficie doblemente reglada que se definió en la construcción anterior. De hecho la curva generada por  $D$  es precisamente la intersección de dicha superficie con el plano  $X \vee Y \vee Z$ . La existencia de esta superficie doblemente reglada nos regala el teorema de Pascal para estas curvas.

Demostraremos ahora que las curvas que hemos definido tienen ciertas propiedades de armonía.

Sea  $H = MN \cap YZ$ , sea  $Q = PC \cap XY$  y se  $R = PH \cap ZX$ . Es fácil ver que  $X$  es el armónico conjugado de  $R$  con respecto a  $ZM$  (basta observar el cuadrilátero  $MNYZ$ ). Como  $ZMRX$  es una cuarteta armónica y su proyección desde  $H$  a la recta  $PC$  es la cuarteta  $CDPQ$ , esta última también es una cuarteta armónica. En particular,  $D$  es el armónico conjugado de  $C$  con respecto a  $PQ$ .

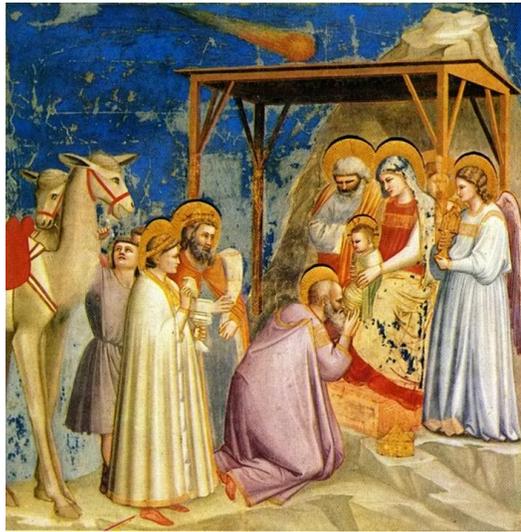


Estos resultados nos permiten definir las curvas cónicas, proyectivamente, como la intersección de una superficie doblemente reglada con un plano.

## 1.6. La perspectiva

### La conquista de la realidad en la pintura

Los griegos tenían gran estimación por el retrato del cuerpo humano. En las estatuas más apreciadas se pueden apreciar los músculos y se dejan entrever los huesos, todo refleja una natura idealizada, en búsqueda de la forma ideal, divina. En las pinturas sobre los jarrones hay más representaciones alegóricas de sucesos mitológicos, hay movimientos plasmados, el paisaje juega un papel secundario, solo de adorno.



A la izquierda: la estatua de Hermes del escultor Praxíteles, alrededor de 340ac. A la derecha el cuadro “Adoración de los Reyes Magos” de Giotto di Bondone del siglo XIV.

Con el declive de la cultura griega, el arte se puso más al servicio de nuevas religiones como el cristianismo o el islam, donde la expresión realista pasaba a segundo plano ante una necesidad de poder expresar la nueva concepción del mundo, la importancia de la creencia, y los relatos de la nueva mitología alrededor del surgimiento de las creencias. Así se aprecia el contraste en las dos imágenes anteriores. En el cuadro de GIOTTO DI BONDONE (1266–1337), la expresión simbólica se antepone a la representación natural, aunque se aprecia el uso de un fondo más elaborado, de una casa que por deber sobresalir a las personas se alargó mucho en lo vertical. La imagen muestra un momento de la mitología cristiana, el nacimiento de Jesús Cristo y la por ello provocada llegada de reyes, llamados “magos”. Todo en el cuadro está en la función de este suceso y no de un retrato realista.

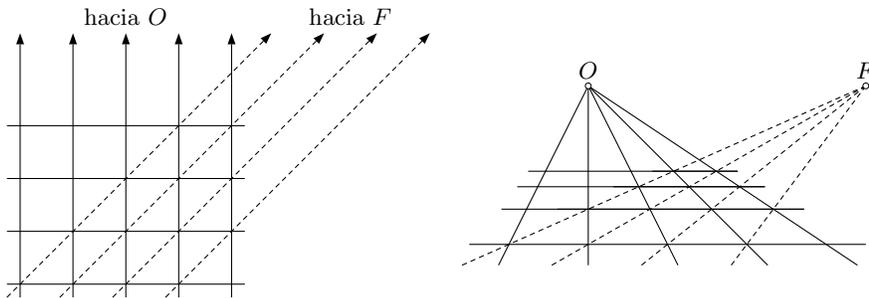
Con el descubrimiento de los antecedentes griegos en Europa, se abrió nuevo camino en el arte también. En el siglo XV se descubrieron los principios cómo había que pintar los objetos para que aparecieran más realistamente en relación con su ubicación. Se le atribuye a FILIPPO BRUNELLESCHI (1377–1446) el haber encontrado este secreto a principios el siglo XV, que es la *perspectiva*. El siguiente cuadro muestra una escena ficticia de personajes de la antigua Grecia y del renacimiento en Italia de aquel entonces congregados en el interior de un pabellón imaginario. Lo pintó RAFFAEL DI SANZIO (1483–1520) en los años 1509 y 1510 para el Papa Julio II sobre el muro en sus cuartos en el vaticano.



Raffael: “La escuela de Atenas”, estancias del Vaticano.

Se puede apreciar como el cuadro da la sensación del espacio, nos parece natural y realista porque el pintor aplicó sus conocimientos de la perspectiva.

El principio básico de la perspectiva es que rectas, que en realidad son paralelas, aparecen en un dibujo como si se fueran a “unir en el infinito”, se intersectan en el “punto de fuga”. Con este principio se puede calcular cómo se achican los objetos conforme se alejan del observador. Basta con usar una rejilla de cuadrados en el piso, de tal manera que unas líneas son paralelas a la línea de vista principal que une el ojo del observador con el centro  $O$  del cuadro a pintar. Como estas líneas son paralelas concurren en el cuadro en el punto de fuga  $O$  mientras las diagonales, que también son paralelas en realidad, se unen en el cuadro en otro punto  $F$ .



Rayos paralelos en realidad concurren en la imagen.

Al principio, los pintores italianos del renacimiento guardaron estos conocimientos como secretos de cofradía. Usar los puntos de fuga permitía estimar qué tanto se tenían que achicabar los objetos conforme se alejan del observador. El primer libro sobre la perspectiva “De picture” escribió LEON BATTISTA ALBERTI (1404–1472) en 1436. Después hay una serie de libros, con enfoques diferentes.

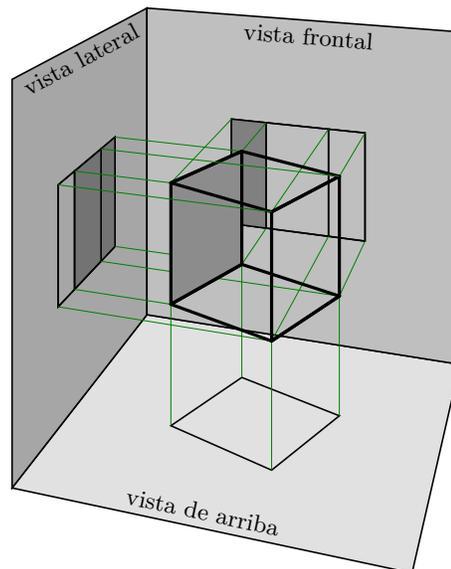
Unos se dirigen más al arquitecta o pintor, otros más a “teóricos”. Mencionamos dos: “De prospectiva pingendi” (ca. 1470) de PIERO DELLA FRANCESCA (1420–1492); “De Divina Proportione” (en 1509) de LUCA PACIOLI (1445–1517), ilustrado por LEONARDO DA VINCI (1452–1519), aunque el enfoque del último es menos sobre perspectiva que sobre proporciones.

## Construcciones a partir de planos auxiliares

El uso de planos auxiliares fue un gran avance ya que permitió construir objetos geométricos en perspectiva. Los planos auxiliares son usualmente un plano horizontal, al cual se proyecta verticalmente cada punto. Si  $P$  es un punto en el espacio, a su proyección sobre el plano horizontal la denotaremos como  $P'$ . Un segundo plano es vertical y la proyección de  $P$  a ese plano la denotaremos como  $P''$ .

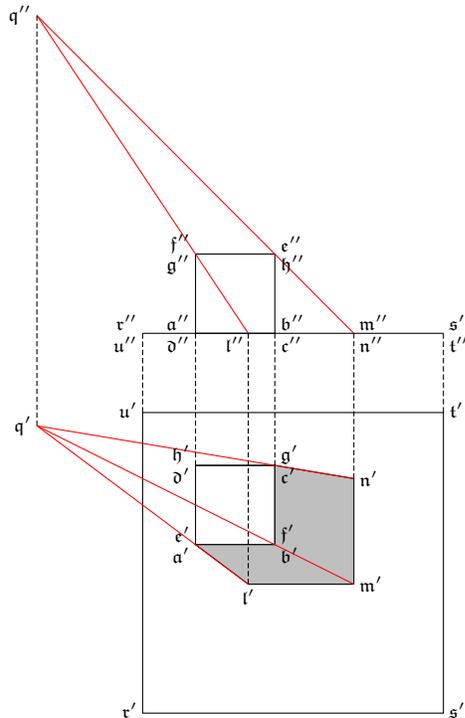
ALBERTO DURERO (1471–1528) publicó un libro cuyo título en alemán es *Underweysung der mesung mit dem zirckel un richtscheyt* y que se suele abreviar en español por “Instituciones de Geometría”. Apareció en 1525, dos décadas después de su viaje a Venecia, donde conoció a los pintores italianos del renacimiento Tiziano y Giorgione.

En este libro se explica la manera de usar diferentes planos, que también se llaman *vistas*, para construir una proyección central. Las vistas se obtienen al proyectar con luz paralela a un plano que es ortogonal a la dirección de la luz. Así se obtiene la vista de arriba, la vista frontal y la vista lateral de un objeto, tal como se muestra en el siguiente dibujo.



Durero empieza con un dado que coloca sobre una superficie cuadrada y plana y una luz que ilumina, tal como se muestra en la siguiente ilustración. Los cuatro puntos inferiores del dado son  $abcd$ , los superiores son  $efgh$ . Así que vemos en el plano visto desde arriba el punto  $e$  encima del punto  $a$ . Este plano se ve en la parte de abajo en la siguiente ilustración. Diferimos aquí de Durero, ya que denotamos las proyecciones verticales de estos puntos como  $e'$  y  $a'$  respectivamente. En

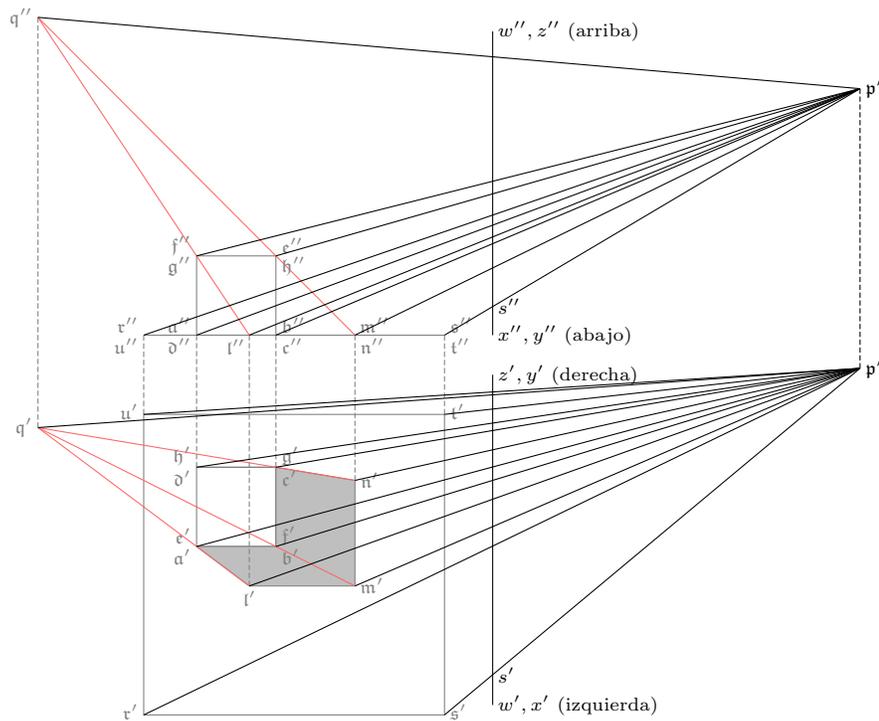
la vista de frente, que vemos en la parte superior, vemos el punto  $a$  delante del punto  $d$  y sus proyecciones horizontales a este plano vertical las denotamos con dos apóstrofes, es decir como  $a''$  y  $d''$  respectivamente.



La construcción de una sombra.

Una luz en  $q$ , cuya ubicación se puede ver en los dos planos como  $q'$  y  $q''$ , ilumina la escena y produce una sombra sobre la superficie plana. Sea  $l$  la sombra de la esquina  $c$ . En la parte superior vemos la ubicación de  $l''$  como la intersección de la recta  $q''c''$  con la proyección de la superficie  $rstu$  que se ve como línea horizontal  $r''s''$ . La recta  $qc$  se ve en el plano de abajo como  $q'c'$ . Sobre ella tiene que encontrarse  $l'$ . Pero las dos proyecciones  $l'$  y  $l''$  de un mismo punto siempre se unen por rectas paralelas a las dos proyecciones de cualquier otro punto, por ejemplo  $q'q''$ , se obtiene  $l'$  con facilidad. De la misma manera se construye las dos proyecciones en ambos planos de las sombras  $m$  y  $n$  de las esquinas  $f$  y  $g$  respectivamente.

Ahora, Durero añade el ojo del espectador, es decir el punto  $p$ , desde donde se observa la escena. Indica las dos posiciones  $p'$  y  $p''$  en ambos planos. Se une  $p'$  con cada punto del plano abajo y  $p''$  con cada uno del plano arriba. Ahora se intersectan estas líneas con el plano del lienzo. El lienzo es un rectángulo  $wxyz$  que vemos como línea en ambos planos. En la parte de arriba vemos la altura de un punto, por ejemplo  $s$  del borde inferior del lienzo, en la parte de abajo vemos la distancia al borde derecho.



La proyección de los puntos a un lienzo en los dos planos.

Durero indica que se debe tomar una nueva hoja y medir estas distancias con un compas y pasarlas a la nueva hoja, y aunque las instrucciones son correctas, son poco claras ya que no las exhibe geoméricamente a partir de la construcción ya hecha. Preferimos aquí seguir con el mismo dibujo. Para ello observamos un punto, por ejemplo la esquina  $s$  de la superficie cuadrada. En el cuadro este se verá como el punto  $s$  y las proyecciones  $s'$  y  $s''$  en los dos planos ya están a nuestra disposición.

Movemos de manera paralela las dos proyecciones del lienzo hacia la izquierda para contar con espacio vacía, ver la siguiente figura. Ahí se rota la proyección del lienzo por extremo derecho por  $90^\circ$ . De esta manera, los lados izquierdos y derechos de la imagen ya quedarán en su lugar. Luego se cruza la recta vertical por  $s'$  con la recta horizontal por  $s''$  para obtener  $s$ .

Así se puede proceder con todos los puntos para obtener el dibujo completo.

Durero manejaba el uso de estos planos magistralmente. En una obra destinada al diseño y las proporciones del cuerpo humano, muestra dibujos que obtiene al introducir nuevos planos que no son paralelos a ninguna de las aristas de un cubo.



### ¿Por qué las proyecciones de rectas paralelas concurren?

En su libro Durero también muestra el grabado de la siguiente figura. Es una manera de componer una imagen punto a punto sin la necesidad de recurrir a construcciones geométricas. El ojo desde el cuál se retrata el cuadro se encuentra en la pared en la ubicación del anillo por el cual pasa la cuerda. Durero dice que lo que se ve sólo se ve en línea recta y no curva y de dos objetos en línea recta se ve lo que está más cerca del ojo.

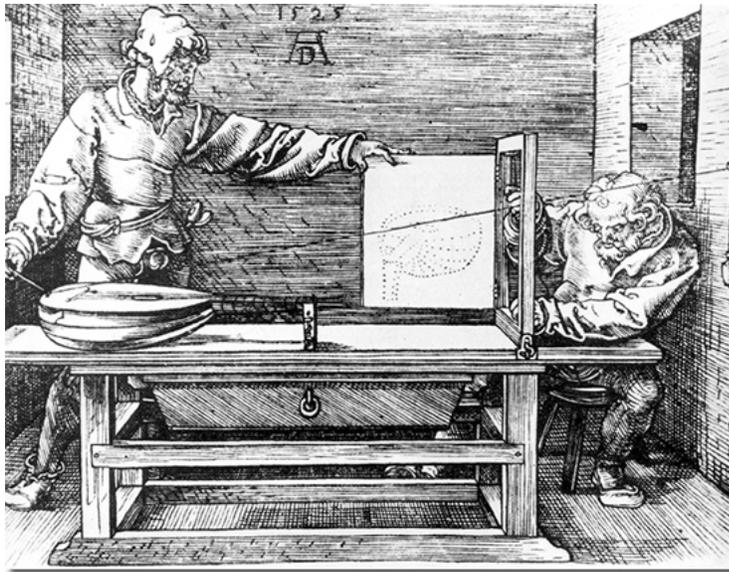


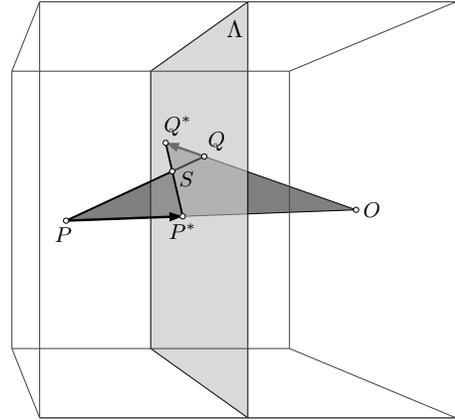
Ilustración de Durero, de como se puede medir el punto en la imagen, al cual es proyectado un punto de la realidad (sobre el borde de la mandolina), si este se une con un punto fijo (el punto en la pared por donde pasa la cuerda).

Esta idea, que un punto real  $P$ , el punto en la imagen  $P'$  que representa  $P$  y el ojo  $O$  son siempre *colineales*, es decir se encuentran sobre una recta, es a la vez sencilla y muy poderosa. De ello se puede inferir que rectas paralelas en la imagen o son paralelas o concurren en un punto.

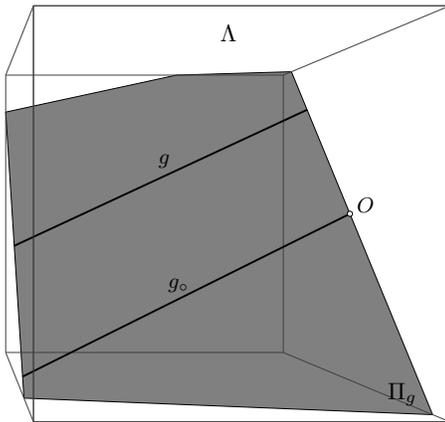
Parece que la primera demostración de este hecho se encuentra en “*Perspectivae libri sex*” (1600) de GUIDOBALDO DEL MONTE (1545–1607). Su primera demostración es bastante enredada, así que preferimos dar una más moderna. Para ello usaremos la visión de GIRARD DESARGUES (1591–1661) en 1639: el de considerar rectas doblemente infinitas y no segmentos acotados como hacían los antiguos griegos.

Primero aclaramos la situación: el lienzo, o *plano de proyección* se llama  $\Lambda$ . El ojo, o *centro de proyección* se llamará  $O$ . Un punto  $P$  se proyecta a  $P^*$ , es decir  $P^*$  es la intersección de la recta  $OP$  con  $\Lambda$ . Como se muestra en nuestra ilustración del lado  $P$  puede estar – visto desde  $O$  – detrás de  $\Lambda$  o delante de  $\Lambda$  como es el punto  $Q$ . El segmento  $PQ$  es proyectado al segmento  $P^*Q^*$ .

El punto de intersección  $S$  del segmento  $PQ$  con  $\Lambda$  es igual a su proyección, es decir se tienen  $S = S^*$ .



Para seguir necesitamos una observación sencilla.



Una recta  $g$  que no pasa por  $O$  junto con el punto  $O$  definen un plano en el espacio. En lo que sigue denotaremos a este plano por  $\Pi_g$ , ya que – como el centro de proyección  $O$  lo consideramos fijo – solo depende de la recta  $g$ .

Este plano  $\Pi_g$  contiene la recta  $g_o$ , que es la recta paralela a  $g$  que pasa por el punto  $O$ .

La observación es:  $g_o$  está contenido en  $\Pi_g$ .

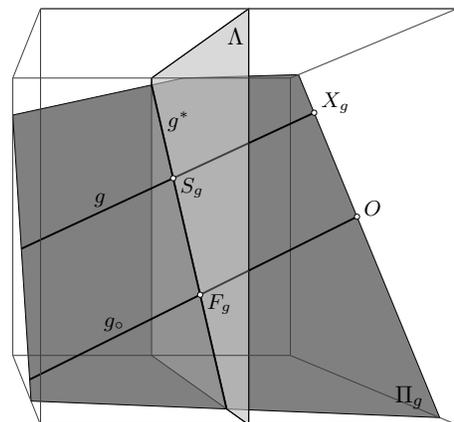
Ahora podemos seguir.

Sea  $g$  una recta que no pasa por  $O$ . Consideramos el caso en donde  $g$  no es paralelo a  $\Lambda$  y por lo tanto intersecta  $\Lambda$  en un punto, que llamamos  $S_g$ .

Si  $P$  es un punto de  $g$ , entonces la recta  $PO$  se encuentra en el plano  $\Pi_g$ . Por lo tanto también  $P'$  se encuentra en  $\Pi_g$ . Esto muestra que la proyección  $g^*$  de la recta  $g$  al plano  $\Lambda$  es la intersección de  $\Lambda$  con  $\Pi_g$ .

Como el plano  $\Pi_g$  contiene la recta  $g_o$ , también contiene al punto de intersección  $F_g$  de  $g_o$  con  $\Lambda$ . Con ello tenemos dos puntos de  $g^*$ : el punto  $S_g$  y el punto  $F_g$ .

La proyección de  $g$  es entonces la recta  $g^* = S_gF_g$ .



Ahora concluimos con facilidad: si  $h$  es paralela a  $g$ , entonces  $h_o = g_o$  y por ello  $F_g = F_h$ . Esto muestra que  $g^*$  y  $h^*$  se intersectan en el punto  $F_g = F_h$ , como lo hará la proyección de cualquier otra recta paralela a  $g$ . Por lo tanto,  $F_g$  es el *punto de fuga* de  $g$ , es decir, tiene la propiedad de que la proyección de cualquier recta paralela a  $g$  pasa por él.

Si  $g$  es paralelo a  $\Lambda$ , la recta  $g_o$  no intersecta a  $\Lambda$  y la proyección  $g^*$  es paralela a  $g$ . Si  $h$  es paralelo a  $g$  entonces  $h^*$  es paralela a  $h$  y por lo tanto  $h^*$  y  $g^*$  son paralelos. Se trató de asignarle a ellos un “punto de fuga al infinito, en dirección de  $g$ ” y se decía, que las rectas paralelas se intersectaban “al infinito”.

Hay un punto que no se proyecta a  $\Lambda$ : es el punto  $X_g$ , que es la intersección de  $g$  con un plano por  $O$  que es paralela a  $\Lambda$ . Por otro lado hay un punto de la recta  $g^*$  que no se obtiene como proyección de algún punto de  $g$ : este es el punto  $F_g$ . No se puede obtener por que  $g$  y  $g_o$  son paralelos. Si observamos el proceso inverso: de proyectar  $g^*$  desde  $O$  a la recta  $g$  pasa algo similar:  $F_g$  no se puede proyectar y  $X_g$  no se puede obtener como imagen. Y como se verá más tarde, en la Sección 1.5 sobre la geometría proyectiva,  $X_g$  se puede considerar el “punto de fuga” de  $g^*$  al igual que  $F_g$  es el punto de fuga de  $g$ .

Es sorprendente que los matemáticos se tardaran alrededor de 300 años en formular lo que estaba a punto de ser descubierto en aquel momento. ¿Si los puntos que se alinean con el ojo se ven como un solo punto, por qué no identificarlos? Sólo mucho más tarde dieron este paso. Claro, en un principio faltaba el descubrimiento de la utilidad de coordenadas. Con coordenadas, la formulación es así:

Se consideran las ternas  $(x, y, z)$  diferentes del origen  $(0, 0, 0)$  – que es la ubicación del ojo – y se establece una relación de equivalencia:  $(x, y, z) \sim (x', y', z')$  si existe un número  $\lambda \neq 0$  tal que

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x, \\y' &= \lambda y, \\z' &= \lambda z.\end{aligned}$$

Esto es equivalente a decir que los tres puntos  $(x, y, z)$ ,  $(x', y', z')$  y  $(0, 0, 0)$  son colineales, es decir se encuentran sobre una recta. Se fija un plano  $\Sigma$  en el espacio que no pasa por el ojo, por ejemplo  $z = 0$ . Este plano juega el papel del lienzo. Muchas clases de equivalencia de puntos contienen un representante en  $\Sigma$ . Por ejemplo el punto  $(3, -4, 5)$  es equivalente a  $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$ , un punto que se encuentra en  $\Sigma$ . Solo los puntos que se encuentran en  $z = 0$  no se pueden identificar con puntos en  $\Sigma$ .

Una recta  $\ell$  en el espacio se compone de puntos. Usualmente casi todos de estos puntos se pueden – al usar la relación de equivalencia – identificar con puntos en  $\Sigma$ . Lo que obtenemos en  $\Sigma$  es una recta  $\ell'$ , que se puede ver como la intersección de  $\Sigma$  con el plano que contiene a  $\ell$  y al ojo  $(0, 0, 0)$ .

Todavía se hicieron algunos avances en el siglo XVII, debidos sobre todo a GIRARD DESARGUES (1591–1661). Consideró rectas infinitas, y consecuentemente doble conos y no solo conos. Así consideró el cilindro como un (doble) cono con el vértice al infinito. Investigó las secciones cónicas desde un punto de vista general: estaba interesado en propiedades comunes a todas las secciones cónicas. Su obra inspiró a FERMAT, DESCARTES y PASCAL pero en su mayoría los matemáticos no recibieron bien su obra, que cayó en el olvido durante mucho tiempo.

## 1.7. La geometría hiperbólica

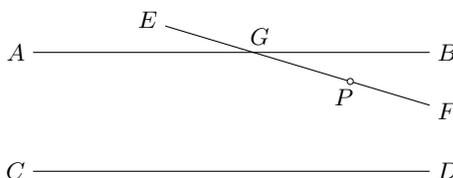
Los argumentos deductivos permiten estudiar cuáles teoremas pueden deducirse de algunos supuestos sin utilizar otros. El quinto postulado de EUCLIDES siempre fue sospechoso de quizás no ser indispensable, es decir, que pudiera haber alguna manera de demostrarlo a partir de los otros, aunque se les tuvieran que agregar otros postulados con tal de que fueran más fáciles de aceptar por la intuición. Hubo muchos intentos de eliminar de una u otra manera el famoso e incómodo quinto postulado, pero cuanto más se trabajaba en ello y con más rigor se analizaba el problema, más parecía ser independiente de los otros. Esta situación llevó a varios matemáticos de finales del siglo XVIII y principios del XIX a concebir la posibilidad de que se pudiera definir una o varias geometrías que no cumplieran con el quinto postulado, es decir, que lo negaran explícitamente. Esto llevó eventualmente a la creación de modelos geométricos claros en los que lo que se llamaba recta era sustituido por otro tipo de curva de tal manera que o bien hubiera más de una paralela a otra por un punto fuera de ella, o bien no hubiera ninguna.

### Intentos de demostrar el quinto postulado

Recordamos de la Sección 1.2 que EUCLIDES basó el libro *Los Elementos* en 5 postulados (ver página 16). De estos postulados todos fueron aceptados excepto uno, que causó controversia, el quinto postulado o “axioma de paralelas”. En comparación con los demás no fue considerado igual de intuitivo, evidente o natural. Por ello muchos matemáticos, aunque reconocieron el gran trabajo de EUCLIDES, lo criticaron por admitir entre sus axiomas tal afirmación.

La lista de los matemáticos que intentaron demostrar el postulado de las paralelas, a partir de los cuatro primeros, es larga y comprende varios griegos, árabes y europeos.

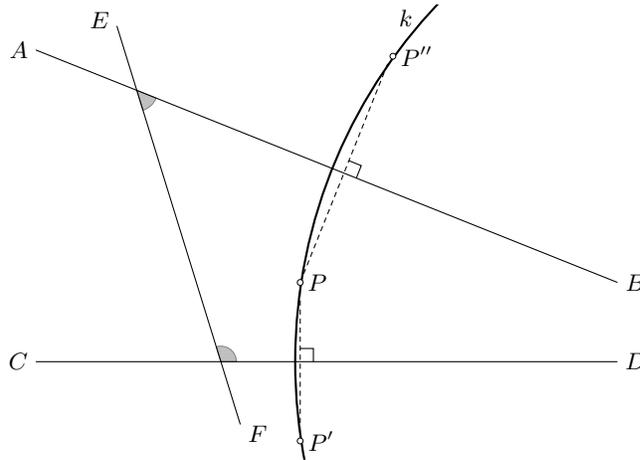
Veamos uno de estos intentos: PROCLO (410–485) argumentó así: Sean  $AB$  y  $CD$  dos paralelas, es decir dos segmentos rectos que aún al prologarse no se intersectan. Luego sea  $EF$  una recta que intersecta  $AB$  en el punto  $G$  y de tal manera que  $F$  se encuentra entre  $AB$  y  $CD$ , ver la siguiente figura.



Ahora se supone que un punto  $P$  recorre de  $G$  hacia  $F$  y más allá por la prolongación. Entonces la longitud de la perpendicular a  $AB$  por  $P$  se hará más grande y rebasará cualquier cota definida. Por consecuente  $EF$  tiene necesariamente, si se prolonga lo suficiente, que intersectarse con  $CD$ .

El error en la argumentación anterior es que se asume tácitamente que de dos rectas que no se intersectan como  $AB$  y  $CD$ , los puntos de  $AB$  están todos a la misma distancia de  $CD$ . Esto es cierto en la geometría euclídea, pero no se puede demostrar sin usar el quinto postulado. De hecho, esta propiedad es equivalente al quinto postulado. Por ello el argumento de PROCLO no muestra que el quinto postulado sigue de los cuatro anteriores, sino sólo que el quinto postulado demuestra a sí mismo.

Veamos un segundo intento de demostrar que el quinto axioma es consecuencia de los primeros cuatro. El argumento es de FARKAS BOLYAI (1775–1856). El argumento es el siguiente: A partir de la situación de la premisa del quinto postulado, es decir de tener dos rectas  $AB$  y  $CD$  con una transversal  $EF$  tales que los ángulos interiores suman menos que dos rectos, se puede construir un punto  $P$  tal que los reflejos  $P'$  resp  $P''$  de  $P$  en  $AB$  resp.  $CD$  no son colineales, es decir que no se hallan sobre una recta.

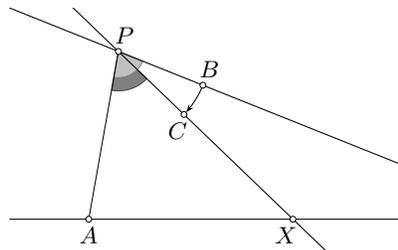


Luego el argumento de FARKAS BOLYAI concluye: sea  $k$  la circunferencia por  $P$ ,  $P'$  y  $P''$  y sea  $U$  el centro de esta circunferencia. Dado que  $AB$  resp.  $CD$  es la mediatriz de  $PP'$  resp. de  $PP''$ , esta pasa por  $U$ . Por ello  $AB$  y  $CD$  se intersectan en  $U$ . Por ello  $AB$  y  $CD$  se intersectan.

El fallo de esta demostración consiste en asumir que cualquier triángulo tiene una circunferencia circunscrita. Curiosamente, esta demostración la publicó en 1851, tres décadas después de que su hijo publicó su trabajo, que ahora es considerado como uno de las dos obras de descubrimiento de una nueva geometría.

Los errores en estas demostraciones surgen por una parte de confusiones entre diferentes conceptos de paralelismo. Como *paralela* a una recta  $g$  por un punto  $P$  podemos entender

- a) una recta por  $P$  que no intersecta a  $g$ ,
- b) el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma distancia de  $g$  que  $P$ , o
- c) la recta que es perpendicular a la perpendicular a  $g$  en  $P$ .
- d) una recta  $PB$  que no intersecta a  $g$ , tal que cualquier recta  $PC$  con  $\sphericalangle APC < \sphericalangle APB$  intersecta a  $g$  ( $A$  es un punto en  $g$ ).



Las cuatro definiciones son equivalentes en la geometría de EUCLIDES, pero para poder demostrarlo se usa el axioma de las paralelas. En lo que sigue usaremos “paralelo” para indicar que dos rectas no tienen punto en común.

Otro error en los intentos surge de asumir propiedades que son equivalentes al quinto postulado:

- e) La suma de ángulos en cualquier triángulo es  $180^\circ$ .
- f) De cada triángulo se puede construir uno semejante en cualquier tamaño.
- g) Cualquier triángulo tiene una circunferencia circunscrita.

Suponer uno de los conceptos de paralelo equivalente a otro o asumir uno de las propiedades equivale a suponer que el quinto postulado es válido. Muchas veces se sustituye el quinto postulado por el equivalente *axioma de Playfair*:

Si  $P$  es punto que no está en la recta  $g$  entonces hay exactamente una recta por  $P$  que no interseca a  $g$ .

## Cambio de perspectiva

Entre los intentos de derivar el quinto postulado de los demás, hubo varios que trataron una demostración *reduccio ad absurdum*: suponían que el quinto postulado era falso y trataron de hallar una contradicción. El primero que hizo esto con mucha insistencia, fue SACCHERI, el segundo JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728–1777). Ambos abandonaron sus intentos, después de desarrollar una serie de consecuencias de los primeros cuatro postulados y el contrario del quinto, sin encontrar una contradicción clara. Lo que encontraron fueron propiedades de una geometría que después se conoce como “no euclidiana”. No encontraron una contradicción porque no había ninguna.

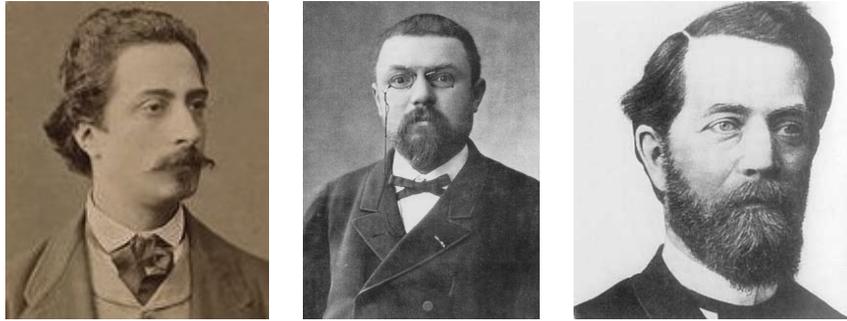
Casi un siglo más tarde hubo nuevamente dos personas que suponían los primeros cuatro postulados y el contrario del quinto. Sólo que ahora no buscaban una contradicción, sino trataron de explorar las consecuencias porque pensaron que una geometría diferente a la euclidiana era posible. Esos dos hombres eran NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKI (1792–1856) y JANÓS BOLYAI (1802–1860). Publicaron sus hallazgos de manera independiente, es decir sin saber del otro, en 1826 resp. en 1831. Hubo un tercer matemático que pensó en aquel entonces que otra geometría era posible: CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855). Se sabe por sus diarios. GAUSS no publicó nada, porque temía la reacción de la comunidad matemática y con cierta justificación: la obra de LOBACHEVSKI y BOLYAI no recibió el respeto y la distinción que merecía.



JOHANN HEINRICH LAMBERT    NIKOLAI LOBACHEVSKI    JANÓS BOLYAI    CARL FRIEDRICH GAUSS

## Los modelos promueven la aceptación

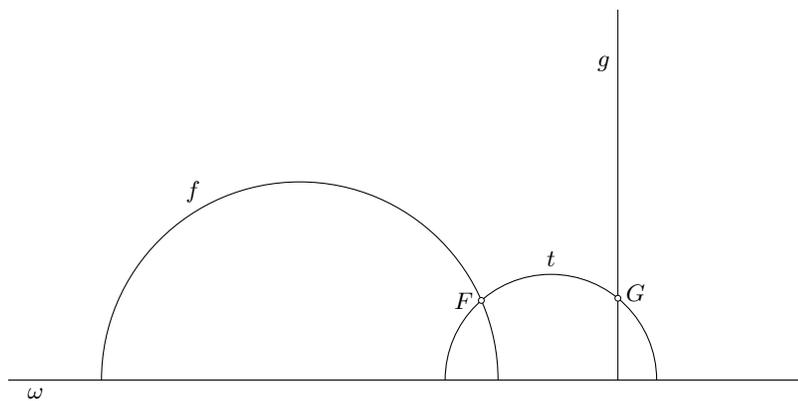
En 1868 EUGENIO BELTRAMI (1835–1900) publicó un trabajo en el cuál mostraba que la geometría expuesto en los trabajos de LOBACHEVSKI y BOLYAI es libre de contradicciones, si es que la geometría euclidiana lo era. Para ello describió tres modelos, que ahora se llaman curiosamente el modelo de “disco de KLEIN”, el modelo de “disco de POINCARÉ” y el modelo del “semiplano de POINCARÉ”, en honor al alemán FELIX KLEIN (1849–1925) y HENRI POINCARÉ (1854–1912).



EUGENIO BELTRAMI      HENRI POINCARÉ      FELIX KLEIN

En estos modelos se explicarán qué habra que entender bajo “punto” o “recta”. Es decir define lo que son los objetos geométricos importantes en el modelo de una manera inesperado y lo describe en términos de la geometría euclidiana. Una recta en el modelo no tendrá que ser recta en el sentido usual, es decir en el sentido de la geometría euclidiana. Los conceptos importantes que explicaremos son lo que es un “punto”, una “recta”, un “ángulo” y la “reflexión” en una “recta”.

Para describir el modelo del semiplano de POINCARÉ se fija una recta euclidiana  $\omega$  en el plano. Esta divide al plano en dos semiplanos, de los cuales a uno de ellos llamaremos “superior”. Los puntos del modelo serán los puntos del semiplano superior, sin los puntos de la recta euclidiana  $\omega$ . Las rectas del modelo son rayos o semicircunferencias del plano euclidiano que tocan a  $\omega$  en un ángulo recto. La siguiente figura muestra  $\omega$ , dos rectas paralelas del modelo  $f, g$  – una es un semicírculo, la otra un rayo como objeto euclidiano – y una tercera recta del modelo  $t$  que intersecta las anteriores en los puntos  $F$  y  $G$  respectivamente.



Los ángulos en el modelo se miden como los ángulos normales, es decir usando tangentes en el punto

de intersección.

Si  $g$  es una recta del modelo que es un rayo en el plano euclidiano, entonces la reflexión en el modelo es la reflexión en la recta que determina  $g$ , en el sentido de la geometría euclidiana.

Para describir lo que es una reflexión en una recta como  $f$  arriba, será importante recordar las propiedades de la inversión en un círculo  $c$ :

- fija todos los puntos sobre la circunferencia de  $c$ .
- intercambia el interior del  $c$  (menos el centro) con el exterior de  $c$ ,
- conserva ángulos (que se piden entre curvas con las tangentes en el punto de intersección),
- la imagen de un círculo o una recta es una circunferencia o una recta,

Sea ahora  $f$  una recta del modelo, que es un semicírculo. Denotaremos con  $P'$  el punto que se obtiene al invertir el punto  $P$ . De las propiedades de la inversión mencionados sigue que

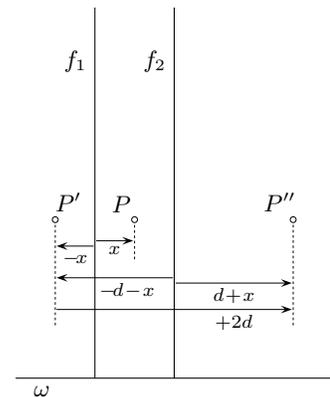
- se tiene  $\omega' = \omega$ ,
- los puntos del semiplano “superior” van a dar a puntos del semiplano “superior”,
- la parte interior del disco que está en el semiplano “superior” da a la parte exterior del semiplano “superior”.

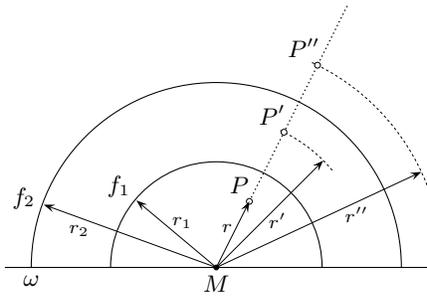
Estas propiedades indican que la inversión en  $f$  puede servir como reflexión en la recta  $f$  pensado en el modelo. A saber, las propiedades de la inversión y las que arriba se mencionaron se traducen en propiedades de la reflexión en la recta  $f$  pensado en el modelo:

- los puntos del espejo  $f$  quedan fijos,
- los dos lados de la recta se intercambian,
- los ángulos del modelo no cambian al reflejar,
- la imagen de una recta del modelo, es decir de un rayo o un semicírculo del plano euclidiano que toca  $\omega$  en un ángulo recto, es nuevamente un rayo o un semicírculo que toca  $\omega$  en un ángulo recto, es decir nuevamente una recta del modelo.

La distancia en el modelo se puede dar usando una fórmula, pero es suficiente y hasta más útil para nosotros aquí, decir que dos segmentos del modelo tienen la misma longitud si hay una serie de reflexiones en rectas tal que un segmento es la imagen del otro segmento bajo estas reflexiones.

Veremos dos casos particulares de rectas paralelas  $f_1$  y  $f_2$  en el modelo: en el primero las dos rectas son rayos en el plano euclidiano, en el segundo son dos semicírculos concéntricos. En ambos casos vemos un punto  $P$  “arriba” de  $\omega$ . Denotamos con  $P'$  el reflejo de  $P$  en  $f_1$  y con  $P''$  el reflejo de  $P'$  en  $f_2$ . Nos interesa analizar qué es la función que manda  $P$  en  $P''$ . En el primer caso es una traslación euclidiana paralelo a  $\omega$  por lo doble de la distancia entre los dos rayos.



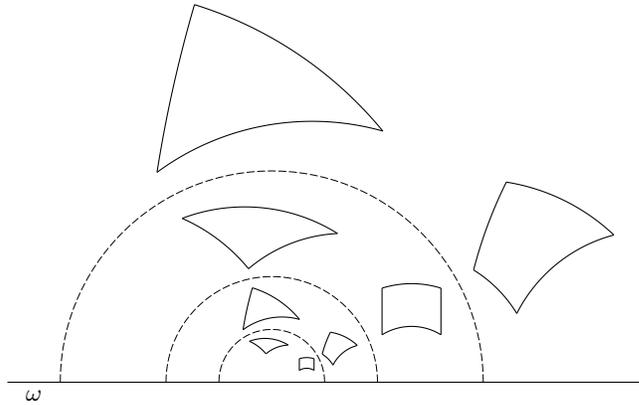


El segundo caso es más interesante. Sea  $r$ ,  $r'$  y  $r''$  la distancia euclidiana de  $P$ ,  $P'$  resp.  $P''$  del centro común  $M$  de  $f_1$  y  $f_2$ . Entonces se tiene

$$r' = \frac{r_1^2}{r} \quad \text{y por ello} \quad r'' = \frac{r_2^2}{r'} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot r.$$

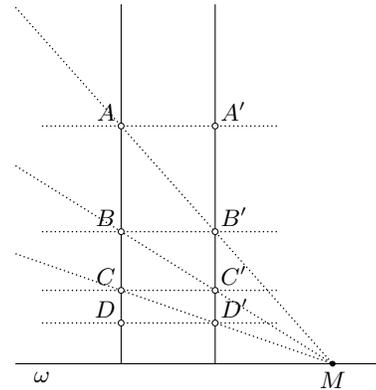
Esto muestra que la composición de las dos reflexiones en estas dos rectas del modelo es en el plano euclidiano una homotecia con centro  $M$  y factor  $\frac{r_2^2}{r_1^2}$ .

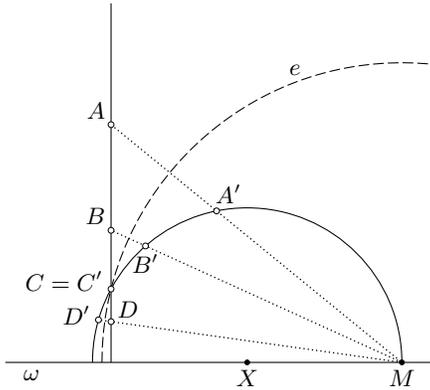
La siguiente figura muestra un triángulo y un cuadrilátero que se reflejaron tres veces. Se observa como las figuras se hacen euclidianamente pequeños al acercarse a  $\omega$ . Pero hay que recordar que los cuatro triángulos y los cuatro cuadriláteros son congruentes entre si en el modelo.



Esto permite marcar con facilidad puntos sobre rectas  $f_1$  y  $f_2$  del modelo que sean rayos en el plano euclidiano, ver la ilustración a la derecha. Como la traslación euclidiana horizontal es una congruencia en el modelo, se tiene que las siguientes distancias en el modelo sean iguales:  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $CD = C'D'$ .

Por otro lado, la homotecia con centro en  $M$  es también una homotecia en el modelo, por lo que las siguientes distancias en el modelo también son iguales:  $AB = B'C'$  y  $BC = C'D'$ , ver la ilustración a la izquierda. Por ello se tiene para las distancias en el modelo  $AB = BC = CD$ .

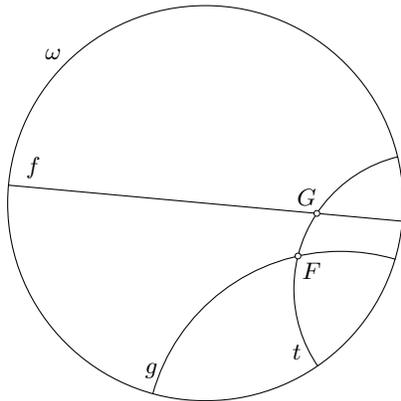




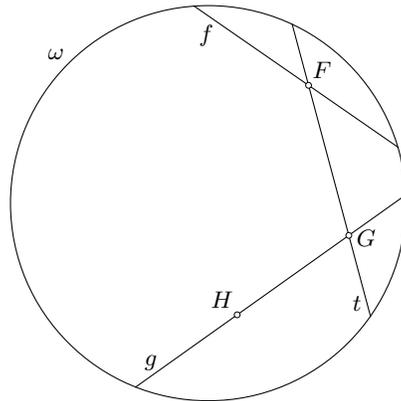
Otro caso interesante es comparar distancias sobre dos rectas del modelo que en el plano euclidiano sean distintos, es decir, una  $f_1$  que es rayo y la otra  $f_2$  que es un semicírculo. Sea  $M$  uno de los puntos donde  $f_2$  toca  $\omega$ . La inversión en un círculo con centro  $M$  intercambia  $f_1$  y  $f_2$ . Por ello  $AB = A'B'$ ,  $BC = B'C'$  y  $CD = C'D'$ , por lo que de  $AB = BC = CD$  sigue que  $A'B' = B'C' = C'D'$ .

Los dos casos muestran: con un número finito de pasos igual de grandes en el modelo no es posible llegar a  $\omega$ , es decir en el modelo, los puntos de  $\omega$  (que no forman parte del modelo) están infinitamente lejos. Con ello se demostró el postulado que cualquier segmento recto en el modelo se puede prolongar tanto como se quiere. Dejamos al lector la tarea de verificar de también se satisface el postulado de que por cualquier dos puntos del modelo se define de manera única una recta del modelo.

Hay otros dos modelos famosos. Uno de ellos se obtiene por una inversión: Si se coloca un círculo euclidiano  $\varepsilon$  en el semiplano inferior y se invierte en  $\varepsilon$  entonces el semiplano superior se convierte en el interior de un disco  $\omega'$ . Esto da el modelo de disco de POINCARÉ. En él los puntos del modelo son los puntos euclidianos en el interior de  $\omega'$ . Las rectas del modelo son los diámetros euclidianos de  $\omega$  o los arcos de circunferencias euclidianas que tocan a  $\omega'$  en un ángulo recto. La siguiente figura de la izquierda muestra la circunferencia  $\omega'$ , dos rectas paralelas  $f, g$  y una tercera recta  $t$  que intersecta las anteriores en los puntos  $F$  y  $G$  respectivamente.



El disco de POINCARÉ



El disco de KLEIN

A la derecha se muestra el modelo del disco Klein. Para definirlo se fija igualmente una circunferencia euclidiana  $\omega$ . En este modelo, los puntos son los puntos del plano euclidiano en el interior de  $\omega$ , las rectas son cuerdas rectas en el sentido euclidiano. Los ángulos son más difíciles de medir que en los otros dos modelos. La figura anterior muestra a la derecha  $\omega$ , dos rectas paralelas  $f, g$  y

una tercera recta  $t$  que intersecta las anteriores en los puntos  $F$  y  $G$  respectivamente.

Cada uno de los modelos tiene ventajas y desventajas. Usamos el semiplano de Poincaré ya que es más fácil exponer algunas características del modelo, pero cualquiera de los tres modelos explica la misma geometría. Estos modelos ayudaron mucho en que la nueva geometría se aceptara. También sirven para darse cuenta de algunas de las propiedades peculiares y muy diferentes que en la geometría euclidiana.

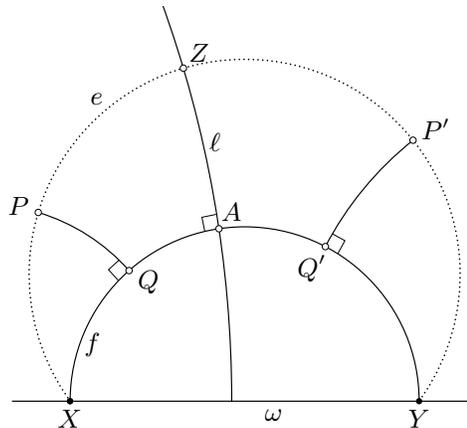
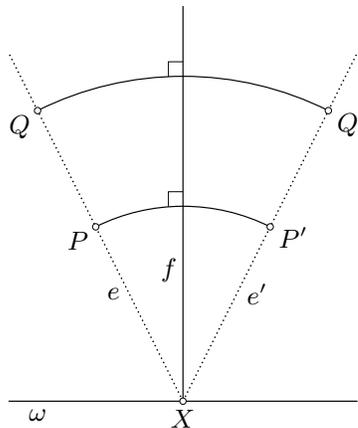
### Algunas propiedades de la geometría hiperbólica

En lo que sigue veremos que se cumplen los primeros cuatro postulados de Euclides, más no el quinto. Veremos varias propiedades de la geometría descrito en este modelo, una geometría que ahora se conoce como *hiperbólica*. Estas propiedades son a veces bastante diferentes y a veces bastante similares de las que conocemos de la geometría euclidiana. Sugerimos al lector siempre comparar con los enunciados análogos de la geometría euclidiana.

Primero nos ocuparemos de la pregunta del lugar geométrico de todos los puntos que estan en el modelo a la misma distancia de una recta dada que un punto dado. Resulta que este lugar geométrico no es una recta del modelo. Por ello necesitamos darle un nuevo nombre: se llama *equidistante*.

**P1:** *Una equidistante a una recta es un rayo euclidiano o un arco de circunferencia euclidiano.*

Sea  $f$  la recta y  $P$  el punto que están dados. Si  $f$  es un rayo en el plano euclidiano, que toca a  $\omega$  en el punto  $X$ , entonces este lugar geométrico consiste de dos rayos de  $X$ , ver la siguiente figura a la izquierda.



Ahora consideramos el caso donde la recta del modelo  $f$  es un semicírculo del plano euclidiano. Como en el caso anterior, la distancia de un punto hacia una recta se mide con la perpendicular. Ahora se piensa un punto  $A$  móvil sobre la recta  $f$  y en ella erigido la perpendicular  $l$ . El reflejo en  $l$  manda a  $f$  en una recta  $f'$  que pasa por  $A$  y es perpendicular en  $A$  a  $l$ . Esto muestra  $f = f'$ . Dado ello,  $Q'$  tiene que ser un punto de  $f$  y  $P'Q'$  perpendicular a  $f$ .

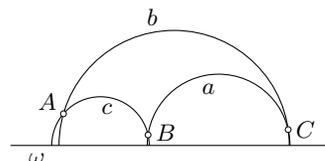
Ahora bien, sea  $e$  la circunferencia del plano euclidiano que pasa por los puntos  $X$  y  $Y$  donde  $f$  toca  $\omega$  y además por  $P$ . Sea  $Z$  el punto de intersección de  $e$  con  $l$ . La reflexión en  $l$  intercambia

$X$  y  $Y$  y fija  $Z$ . Por lo tanto manda  $e$  en sí mismo:  $e' = e$ . Esto muestra  $P'$  es la intersección de  $e$  con la recta perpendicular del modelo en  $Q$  a  $f$ . Pero el mismo argumento muestra que todos los puntos de  $e$  están a la misma distancia de  $f$  que  $P$  en el modelo. Por ello  $e$  y su reflejo  $e'$  en  $f$  conforman el lugar geométrico de todos los puntos que en el modelo están a la misma distancia de  $f$  que  $P$ .

Debe notarse que este lugar geométrico, se conforma por dos *equidistantes*, esto son en el plano euclidiano, arcos de circunferencia que pasan por  $X$  y  $Y$ , los puntos donde toca  $f$  a  $\omega$ . Estas equidistantes no son rectas en el modelo ya que no tocan a  $\omega$  en un ángulo recto, sino son curvas.

Mostraremos algunas propiedades más de esta geometría, que se conoce ahora como geometría hiperbólica.

Hay triángulos cuya suma de ángulos es muy pequeña, como lo muestra la siguiente figura a la derecha.



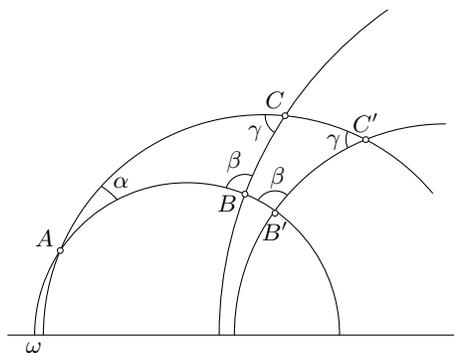
**P2:** Cada triángulo del modelo tiene una suma de ángulos menor a dos rectos.

Esta propiedad se puede demostrar con la ayuda de la inversión, pero aquí nos saltaremos este argumento y nos concentraremos en sus consecuencias. De ello sigue que cada cuadrilátero tiene una suma de ángulos menor a cuatro rectos. Pero hay una consecuencia mucho más sorprendente:

**P3:** Dos triángulos que tienen los mismos ángulos en el modelo son congruentes en el modelo.

Supongamos lo contrario: que haya dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  que tengan los mismos ángulos, pero que no sean congruentes. Podemos suponer que  $A = A'$  sino reflejamos uno de ellos en la mediatriz de  $AA'$ .

Luego podemos suponer que  $AB$  y  $A'B' = AB'$  definan la misma recta, sino reflejamos uno de ellos en la bisectriz del ángulo  $\sphericalangle BAB'$ . Ahora hay dos casos posibles: o  $C$  y  $C'$  están del mismo lado que  $AB = A'B'$  o no los son. En el primer caso coinciden las rectas  $AC$  y  $A'C' = AC'$ , dado que los dos triángulos tienen al mismo ángulo  $\alpha$ , en el segundo coinciden después de reflejar uno de los triángulos en  $AB$ . Obtenemos entonces la situación de la figura a la derecha. Pero esto es imposible ya que el cuadrilátero  $AA'B'B$  tendría una suma de ángulos igual a cuatro rectos, que es imposible. Por lo tanto  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen que ser congruentes.



En la demostración anterior se usa un hecho interesante en sí mismo. Al igual que en la geometría euclidiana, se pueden llevar cualesquiera dos triángulos congruentes uno en el otro por medio de a lo más tres reflexiones:

**P4:** Cualquier congruencia es composición de reflexiones y se necesita a lo máximo tres reflexiones para una congruencia dada.

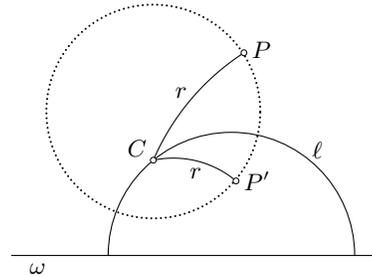
Por ello las reflexiones son como las piezas principales de las congruencias. Las traslaciones que

nos suelen ser muy familiares de la geometría euclidiana, son a cambio en la geometría hiperbólica bastante diferentes y los trataremos al final de este apartado.

Al igual como se averiguó las equidistantes como lugar geométrico, se puede averiguar qué es una circunferencia en el modelo, es decir el lugar geométrico de todos los puntos en el modelo que están a la misma distancia de un punto  $C$  que un punto dado  $P$ .

**P5:** *Un círculo en el modelo es un círculo euclidiano que está contenido completamente en el semiplano superior.*

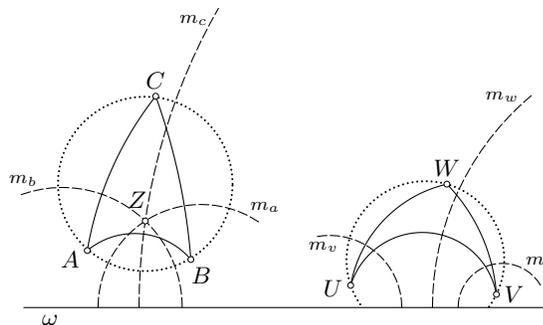
Se considera una recta  $\ell$  que pasa por  $C$  y en ello se refleja  $P$  para obtener otro punto  $P'$  del modelo que está a la misma distancia, ver la siguiente figura a la derecha. Al girar  $\ell$  alrededor de  $C$  se obtiene que una circunferencia en el modelo es una circunferencia en el sentido euclidiana que está completamente contenido en el semiplano superior.



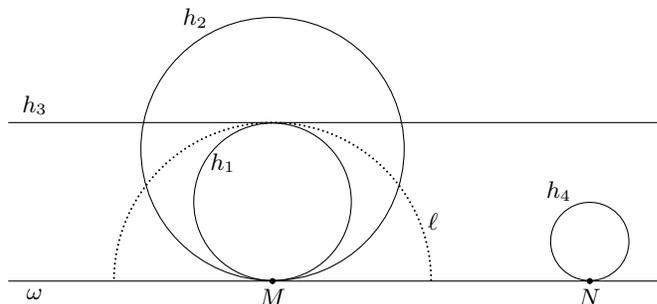
Cualquier tres puntos del modelo son –en el plano euclidiano– o colineales o cocíclicos, es decir se encuentran sobre una circunferencia. Pero esta circunferencia no tiene que ser completamente comprendido en el semiplano superior.

**P6:** *Hay triangulos del modelo que no tienen circunferencia circunscrita*

En la figura del lado se muestran dos triangulos  $ABC$  y  $UVW$  del modelo, uno tienen una circunferencia en el modelo y la otra no, sus puntos están sobre una equidistante y las tres mediatrices  $m_u, m_v$  y  $m_w$  no se intersectan.

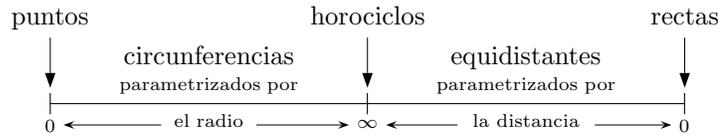


Círculos euclidianos que están completamente dentro del semiplano superior son círculos del modelo – aunque los centros no coinciden. Círculos euclidianos que cortan a  $\omega$  en dos puntos se pueden interpretar como equidistantes a la recta que tiene estos dos puntos como puntos *límite*. Pero, ¿qué sería un círculo euclidiano que toca  $\omega$  en un punto dentro del modelo? Resulta que esto es otro objeto interesante, se llama *horociclo*. La siguiente figura muestra cuatro horociclos:  $h_1, h_2, h_3$  y  $h_4$ .



Que la recta euclidiana  $h_3$ , paralela a  $\omega$  también es un horociclo del modelo, sigue de que  $h_3$  se obtiene al reflejar  $h_1$  en la recta  $\ell$ . Como las homotecias con centro sobre  $\omega$  son congruencias en el modelo, todos los horociclos son congruentes. Como los puntos y las rectas, de horociclos solo hay una clase bajo la conjugación.

Una equidistante determina la recta del modelo a la que es equidistante, ya que determina los dos puntos límites. Por ello, las equidistantes están parametrizadas por la distancia a la recta que determinan, similar como los círculos están parametrizados por el radio. Los horociclos se pueden ver como el caso límite de círculos con radio infinito o como equidistantes que están infinitamente lejos de su rectas. Así que los objetos en la geometría hiperbólica se pueden agrupar de la siguiente manera.

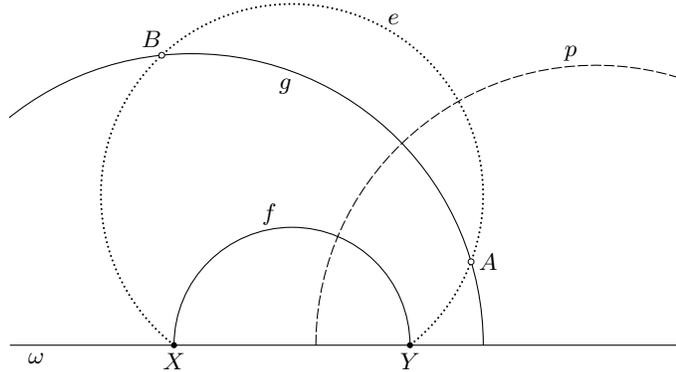


Esto muestra que la geometría hiperbólica es mucho más interesante. En la geometría euclidiana horociclos y equidistantes coinciden con las rectas.

Veamos finalmente cómo se comportan las traslaciones en el modelo de la geometría hiperbólica. Dos rectas en el modelo pueden intersectarse en un punto o pueden tener un punto límite en común. Pero también es posible un tercer caso: que no se intersectan, ni tienen punto límite en común.

**P7:** *Dos rectas que no se intersectan y no tienen punto límite en común, tienen una única recta perpendicular en común, es decir una recta que es perpendicular a ambas rectas dadas.*

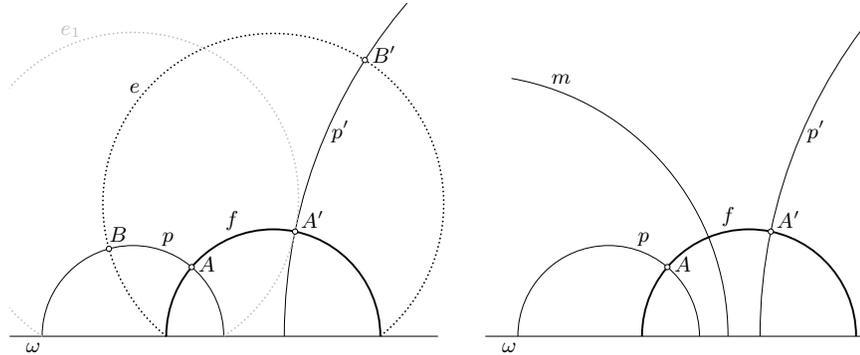
Para ver esto llamamos las dos rectas dadas  $f$  y  $g$ . Elegimos un punto  $A$  en  $g$ . Sea  $e$  la equidistante a  $f$  por  $A$  y  $B$  el segundo punto de intersección de  $e$  con  $g$ , ver la figura del lado. Finalmente sea  $p$  la mediatriz de  $AB$ .



La argumentación es la siguiente: la reflexión en  $p$  intercambia  $A$  y  $B$ . Por ello fija la recta  $g = AB$ . Esto implica que  $g$  y  $p$  se intersectan en un ángulo recto. Entonces cualquier círculo por  $A$  y  $B$  se intersecta con  $p$  en un ángulo recto. De ahí que  $p$  y  $e$  se intersectan en un ángulo recto y por ello la reflexión en  $p$  fija también la equidistante  $e$  e intercambia  $X$  y  $Y$ , los dos puntos límites de  $e$  y  $f$ . Por ello la reflexión en  $g$  también fija  $f$  y por ello  $p$  es perpendicular a  $f$ .

Para definir una traslación en la geometría hiperbólica es necesario especificar a lo largo de qué recta  $g$  se traslade y qué tan lejos. Esto se puede hacer al especificar un punto  $A$  de recta  $g$  y su imagen  $A'$  bajo la traslación. Dado que una traslación conserva ángulos debe enviar la perpendicular  $p$  a  $g$  en  $A$  a la perpendicular  $p'$  a  $g$  en  $A'$ . Un punto  $B$  de  $p$  se moverá a un punto de  $p'$  y este estará a la misma distancia de  $g$  que  $B$ . En otras palabras,  $B$  y  $B'$  están sobre una equidistante a  $g$ , ver la siguiente imagen. La siguiente figura a la izquierda muestra la situación. Se aprecia también que  $B$

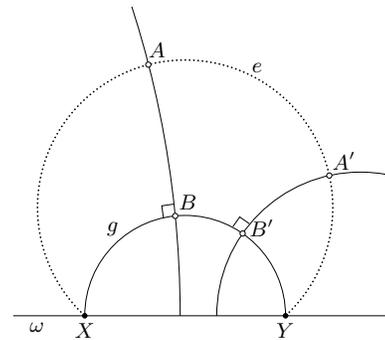
se mueve más lejos que  $A$ : obsérvese para ello la equidistante  $e_1$  en gris que indica los puntos que están a la misma distancia de  $p$  que lo es  $A'$ . Se observa que  $B'$  es más lejos.



Una manera práctica de definir la traslación es como la composición de dos reflexiones: primero en la perpendicular  $p$  y luego en la mediatriz  $m$  de  $AA'$ , ver la siguiente imagen anterior a la derecha. Claramente esta composición mueve  $A$  en  $A'$  y traslada todos los puntos sobre  $f$  a lo largo de esta recta. Como consecuencia los demás puntos se mueven por equidistantes a  $f$ . Denotaremos a  $\tau_{A,A'}$  a la traslación definida de esta manera.

**P8:** Hay una infinidad de traslaciones que mueven un punto dado en otro punto dado.

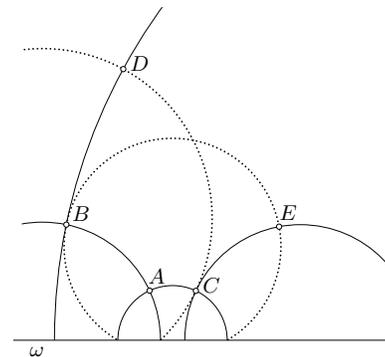
Sean  $A$  y  $A'$  dos puntos dados. Hay una infinidad de traslaciones que mueven  $A$  en  $A'$ . Para verlo, basta dibujar una equidistante  $e$  cualquiera por  $A$  y  $A'$ . Luego sea  $g$  la recta que define  $e$  – es decir la recta a la cual  $e$  es equidistante y  $B$  resp.  $B'$  la intersección de las perpendiculares a  $g$  por  $A$  resp.  $A'$ , ver la ilustración a la derecha. Entonces la traslación  $\tau_{B,B'}$  que mueve a lo largo de la recta  $BB'$  el punto  $B$  en  $B'$  moverá  $A$  en  $A'$ , pero no será la misma traslación que  $\tau_{A,A'}$ .



En la geometría euclidiana traslaciones *conmutan*, es decir no importa en qué orden se ejecutan, el resultado será lo mismo. En la geometría hiperbólica esto no es así.

**P9:** Las traslaciones no conmutan

Para ver esto consideramos tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  del modelo de tal manera que el ángulo  $\sphericalangle BAC$  es recto –esto no es muy importante pero muestra el efecto claramente. Luego consideramos las composiciones de las traslaciones  $\tau_{A,B}$  y  $\tau_{A,C}$ , ver la imagen anterior a la derecha. Veremos a donde se mueve el punto  $A$  después de efectuar las dos traslaciones. Claro,  $\tau_{A,B}$  mueve  $A$  a  $B$ . La segunda traslación  $\tau_{A,C}$  mueve  $B$  al punto  $E$ . Por otro lado, si primero efectuamos  $\tau_{A,C}$ , el punto  $A$  se mueve a  $C$  y luego este se mueve a  $D$  bajo  $\tau_{A,B}$ . Por lo tanto las dos posibles composiciones no son los mismos.



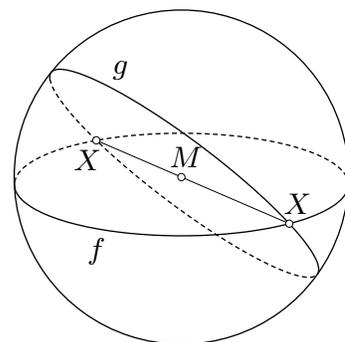
## La geometría elíptica

En base al descubrimiento de la geometría hiperbólica, los matemáticos se dieron cuenta que hay otra geometría, una tercera a parte de la euclidiana y la hiperbólica: la geometría *elíptica*. En ésta el quinto postulado es también falso. Se conocía un modelo de esta geometría desde hace mucho tiempo pero no se interpretaba como un modelo de una geometría “plana”: se trata de una geometría sobre la esfera.

En este modelo se toma una esfera euclidiana. Un punto del modelo es un par de puntos euclidianos que son antípodas en la esfera. Una recta del modelo es un círculo máximo de la esfera, es decir un círculo euclidiano que se obtiene al intersectar la esfera con un plano que pasa por su centro.

La figura muestra dos rectas  $f$  y  $g$  del modelo que se intersectan en un punto  $X$ . Los ángulos en el modelo se miden como los euclidianos entre las tangentes en los puntos de intersección.

No es difícil mostrar que en este modelo no hay rectas paralelas.



## La importancia del descubrimiento

El descubrimiento de la geometría hiperbólica marcó un punto de transición en la historia de las matemáticas. Antes nadie dudaba que al hacer geometría uno investigaba las propiedades del espacio que nos rodea. Después, cuando ya no era claro cuál es la geometría de nuestro espacio, las matemáticas se habían despedido de describir la realidad, se tuvieron que limitar a estudiar las diferentes posibilidades que existen. Cuál es realmente la geometría de nuestro espacio es una cuestión de la física y no de las matemáticas.

De esta manera se aclaró el papel que juegan las matemáticas dentro del tejido de las ciencias: las matemáticas proveen un lenguaje inmensamente versátil, pero no deciden cuál de los ejemplos que se pueden estudiar es el que mejor describe nuestra realidad.

Hay otro aspecto que se aclaró con el descubrimiento de las nuevas geometrías: no tiene sentido tratar de aclarar qué es un punto o qué es una recta. En vez de ello se deben buscar aclarar las relaciones que tienen unos objetos con otros. En vez de buscar definiciones explícitas hay que dar definiciones implícitas. Los objetos se definen únicamente por sus relaciones con los otros objetos. Este es el punto de vista que adoptó DAVID HILBERT (1862–1943) al formular sus axiomas de la geometría y es lo que quiso indicar cuando dijo que en vez de “punto”, “recta” y “plano” se debe poder decir también “tarro”, “silla” y “mesa”. Para hacer geometría lo único que se necesitan son *las relaciones entre los objetos que se describen en los axiomas*.

El estudio de la geometría hiperbólica ayuda a afinar nuestra visión de la geometría euclidiana: hace reflexionar sobre cuestiones que muchas veces tomamos por garantizadas. Es similar al hecho de que el aprendizaje de una segunda lengua lleva a las personas a reflexionar sobre su propia lengua y a conocerla mejor.

## 1.8. Los axiomas de orden y el de Euclides

Los axiomas de orden de Hilbert son éstos.

### AXIOMAS DE ORDEN

1. Si  $A, B, C$  son puntos de una línea recta y  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , entonces  $B$  también está entre  $C$  y  $A$ .
2. Si  $A$  y  $C$  son dos puntos de una línea recta, hay al menos un punto  $B$  entre  $A$  y  $C$  y al menos un punto  $D$  tal que  $C$  está entre  $A$  y  $D$ .
3. Dados tres puntos en una línea recta, siempre hay uno y solo uno de ellos que está entre los otros dos.
4. Dados cuatro puntos en una recta siempre se pueden nombrar como  $A, B, C, D$  de manera que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$  y también entre  $A$  y  $D$ , y que además  $C$  esté entre  $A$  y  $D$  y también entre  $B$  y  $D$ .
5. Sean  $A, B, C$  tres puntos que no están en una misma recta y sea  $a$  una recta en el plano  $A \vee B \vee C$  que no pasa por ninguno de esos puntos. Entonces si la recta  $a$  pasa por un punto entre  $A$  y  $B$ , también pasará por un punto entre  $B$  y  $C$  o bien por un punto entre  $A$  y  $C$ .

Al conjunto de puntos que están entre dos puntos dados  $A$  y  $B$  se les llama *el segmento  $AB$* . A veces, para distinguir entre la recta definida por dos puntos  $A$  y  $B$  y el segmento definido por ellos mismos conviene denotar la primera por  $A \vee B$  y al segundo por  $AB$ . Con estas herramientas se pueden definir también las curvas poligonales (o líneas quebradas) y los polígonos simples, los primeros como cadenas de segmentos que no se tocan y los segundos como curvas poligonales simple, excepto porque el primer extremo del primero coincide con el segundo extremo del último.

### CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS DE ORDEN

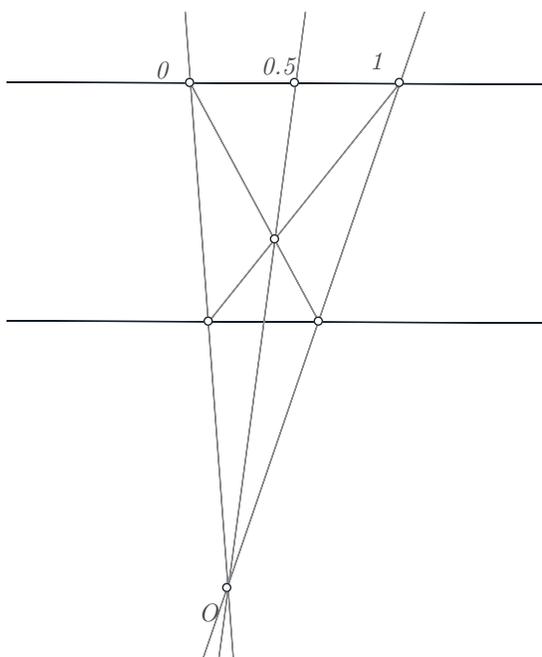
1. Entre dos puntos de una recta hay una infinidad de otros puntos.
2. Cualquier número finito de puntos  $A, B, \dots, K$  de una recta siempre se pueden acomodar de manera que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$  y entre  $A$  y  $D$ , ... y entre  $A$  y  $K$ ;  $C$  entre  $B$  y  $D$  y entre  $B$  y  $E$ , ... y entre  $B$  y  $K$ , etc.
3. Toda línea recta  $a$  en un plano lo divide en dos regiones tales que: Para cada punto de  $A$  de una de ellas y otro punto  $B$  de la otra, hay un punto entre  $A$  y  $B$  que está en  $a$ . Por otro lado, Dos punto  $A$  y  $A'$  determinan un segmento  $AA'$  que no contiene ningún punto de  $a$ .
4. Todo polígono simple cuyos vértices se encuentran en un plano  $\alpha$ , divide al plano en dos regiones, una *interior* y otra *exterior* tales que si  $A$  es un punto de la primera y  $B$  uno de la segunda, cualquier curva poligonal que los una tiene forzosamente un punto en el polígono; por otro lado, dados dos puntos  $A$  y  $A'$  en la región interior y otros dos puntos  $B$  y  $B'$  en la exterior, hay curvas poligonales que unen a  $A$  con  $A'$  y a  $B$  con  $B'$  que no tienen ningún punto en común con el polígono.
5. Todo plano  $\alpha$  divide al espacio en dos regiones tales que todo punto  $A$  de una de ella y todo punto  $B$  de la otra define un segmento  $AB$  que tiene un punto en el plano  $\alpha$ ; y por otro lado el segmento definido por un par de puntos  $A$  y  $A'$  en una de ellas no tiene ningún punto en común con el plano  $\alpha$ .

El tercer grupo de axiomas consta de uno solo y es una reformulación del famoso *quinto postulado* de

Los *elementos* de Euclides, sin el cual, como podrá verse en la sección 1.7, es posible construir otras geometrías diferentes de la clásica o euclidea, pero igualmente interesantes y que en principio pueden ser útiles en la ciencia.

AXIOMA DE LAS PARALELAS O DE EUCLIDES

1. Sean  $r$  una recta y  $A$  un punto en un plano  $\alpha$  tales que  $A$  no esté en  $r$ . Entonces existe una y solo una recta  $p$  en  $\alpha$  que pasa por  $A$  y que no tiene ningún punto en común con  $r$ . A la recta  $p$  se le llama *la paralela a  $r$  en el plano  $\alpha$  que pasa por  $A$* , o simplemente, cuando el plano está sobreentendido, *la paralela a  $r$  por  $A$* .



La existencia de una paralela es equivalente a la de un punto  $C$ , entre otros dos cualesquiera  $A$  y  $B$ , cuyo armónico conjugado no existe (también se dice que el armónico conjugado de  $C$  respecto a  $AB$  está en el infinito). El punto  $C$  se puede definir como el punto medio del segmento  $AB$ .

En esta figura a los puntos  $A$  y  $B$  se les ha llamado  $0$  y  $1$  y al punto  $C$  se le ha llamado  $0.5$ . La figura ilustra el hecho de que la existencia de una paralela es equivalente a la de un punto (el  $0.5$ ) cuyo armónico conjugado no existe o está en el infinito.

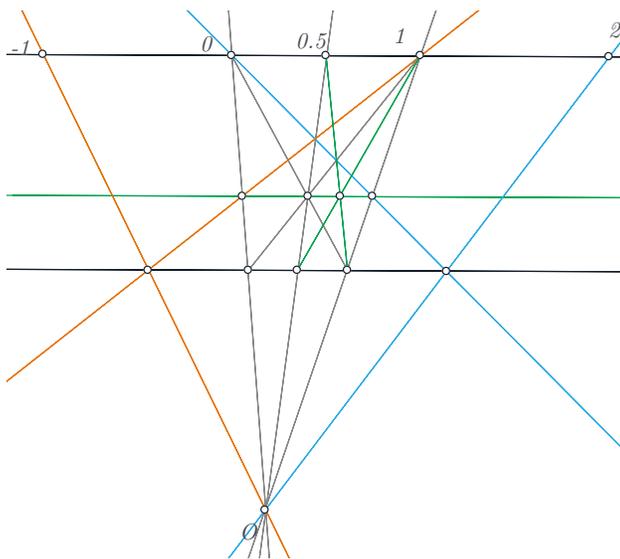
El punto  $O$  se ha construido como la intersección de dos rectas, una que pasa por  $0$  y por un punto de la paralela y otra que pasa por  $1$  y por otro punto de la paralela. En cierto sentido, el punto  $0.5$  es el armónico conjugado del punto al infinito.

Continuando con esta construcción se puede llegar otro teorema, mucho más ambicioso.

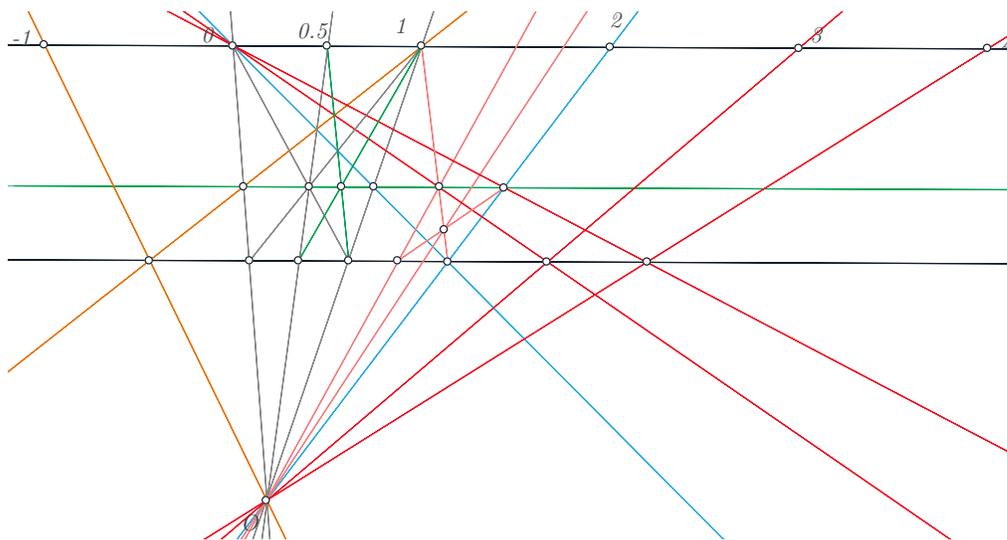
*Teorema.* *Dados dos puntos  $0$  y  $1$  en una recta y una paralela a ella, es posible asignar a cada punto de la primera una representación binaria o decimal única (en general infinita) que lo represente.*

Como veremos, para demostrar este teorema hace falta, además de los axiomas de orden y de las paralelas, probar que cualquier punto es “alcanzable” mediante un número finito de pasos y esto a su vez requiere de alguna versión del axioma de continuidad o de Arquímedes. Sin embargo, lo interesante del resultado es que no requiere de los axiomas de congruencia, que sólo hacen falta cuando se quiere comparar segmentos que no están en la misma rectas. La construcción se ilustra en la siguiente sucesión de figuras.

Después de haber construido el 0.5 como se indicó anteriormente, se construye el 2 como se muestra con las rectas azules, y el -1 como se hace con las rectas color naranja. Para construir más enteros se repiten las operaciones descritas anteriormente. Por ejemplo con las rectas rojas se obtienen los puntos 3 y 4. Así se puede seguir indefinidamente hasta rebasar el punto que queremos representar (aquí se usa el axioma de Arquímedes que se presenta en siguiente sección). Para las fracciones que corresponden a un punto entre dos enteros, se procede como se hizo para 0.5, partiendo el segmento que lo contiene en dos. Encontramos el punto medio de ese segmento y nuestro punto quedará en uno de dos nuevos segmentos.



Las rectas color de rosa muestran cómo se pueden encontrar los puntos 1.5 y 1.75. Procedemos así por inducción hasta que nuestro punto sea uno de los puntos medios construidos o indefinidamente si esto nunca sucede.<sup>3</sup>



Los axiomas de congruencia permiten definir el concepto de *rayo*, como la parte de una recta que queda *a un lado* de uno de sus puntos y se dice que el rayo *emana* de ese punto. A su vez el concepto de rayo permite definir el de *ángulo* como una pareja (no ordenada) de dos rayos  $h$  y  $k$  que *emanan de un mismo punto*  $O$ , el cual se denota por  $\angle(h, k)$ .

<sup>3</sup>Que esto produzca representaciones diferentes para puntos distintos también depende del axioma de Arquímedes.

## 1.9. Los axiomas de congruencia y el de Arquímedes

### Los axiomas de congruencia

Los axiomas de congruencia especifican la idea de *desplazamiento* o transformación rígida (como traslación, rotación y reflexión) y la propiedad que estas transformaciones conservan que se identifica con la *congruencia*.

#### AXIOMAS DE CONGRUENCIA

1. Si  $A$  y  $B$  son puntos de una recta  $a$ , y si  $A'$  es un punto de la misma o de otra recta  $a'$ , entonces de un lado de  $A'$  y sobre la recta  $a'$  hay un punto  $B'$  tal que el segmento  $AB$  es congruente con el segmento  $A'B'$ . Esta relación se escribe en símbolos como  $AB \equiv A'B'$ . Por supuesto un segmento es congruente con si mismo:  $AB \equiv AB$ .
2. Si  $AB \equiv A'B'$  y  $A'B' \equiv A''B''$  entonces  $AB \equiv A''B''$  (transitividad de la congruencia)
3. Si  $AB$  y  $BC$  son dos segmentos de una recta  $a$  que no tienen ningún punto en común, excepto  $B$  y  $AB \equiv BC$ , y si  $A'B'$  y  $B'C'$  son dos segmentos de una recta  $a'$  que no tienen ningún punto en común, excepto  $B'$  y  $A'B' \equiv B'C'$ , entonces  $AC \equiv A'C'$ .
4. Sea  $\angle(h, k)$  un ángulo en un plano  $\alpha$  y sea  $h'$  un rayo en otro plano  $\alpha'$ . Entonces existe uno y solo un rayo  $k'$  en  $\alpha'$  que emana del mismo punto que  $h'$  tal que  $\angle(h, k)$  es congruente con  $\angle(h', k')$ , lo cual se denota por  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ . Todo ángulo es congruente consigo mismo, es decir,  $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ .
5. Si  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  y  $\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'')$  entonces  $\angle(h, k) \equiv \angle(h'', k'')$ .
6. Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  se dan las congruencias<sup>4</sup>:

$$AB \equiv A'B'; BC \equiv B'C'; \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

entonces también se cumplen estas otras congruencias:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'; \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

A partir de estos axiomas se pueden demostrar varias propiedades básicas como que la congruencia tanto de segmentos como de ángulos es *reflexiva* (Si  $AB \equiv A'B'$  entonces  $A'B' \equiv AB$  y si  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$  entonces  $\angle(h', k') \equiv \angle(h, k)$ ) y se pueden definir los conceptos de *ángulos complementarios* y de *ángulo recto*, que es aquel que es congruente con su ángulo complementario. En particular el que todos los ángulos rectos son congruentes es un teorema, aunque para Euclides éste era un postulado.

A partir de estos axiomas, especialmente del 6º, se pueden deducir los criterios conocidos de congruencia de triángulos.

Por supuesto, los axiomas de congruencia, en especial el 3º y el 5º sirven para definir la suma de segmentos colineales y la de ángulos coplanares y para demostrar el teorema de que los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales y el de que los ángulos internos de un triángulo suman dos rectos.

Las demostraciones de estos teoremas se dejan como ejercicios para el lector. En caso de dudas sugerimos consultar el libro de HILBERT *Los fundamentos de la geometría*.

<sup>4</sup> $\angle BAC$  se define como  $\angle(h, k)$  donde  $h$  y  $k$  son los rayos que emanan de  $A$  y el primero está formado por la parte de  $A \vee B$  que está del lado de  $B$  y el segundo por la parte de  $A \vee C$  que está del lado de  $C$

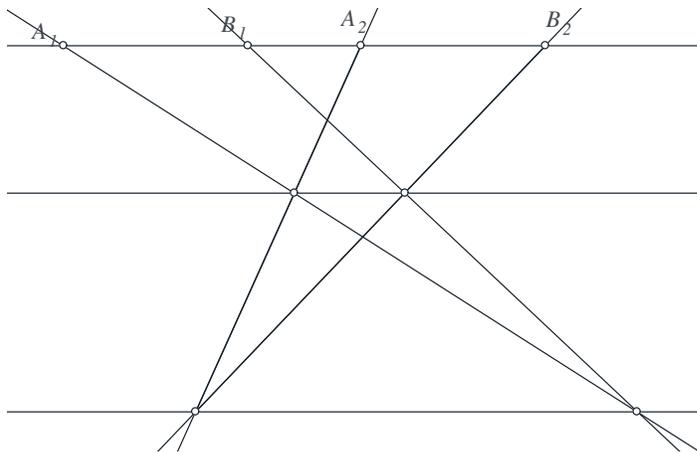
## El axioma de continuidad o de Arquímedes

Para enunciar ese axioma, que es el que permite introducir en la geometría la idea de continuidad, es necesario definir el concepto de “*igualdad*” de dos segmentos de una recta. Hay dos opciones, definir la igualdad como *congruencia*, lo cual requiere la adopción del cuarto grupo de axiomas, o bien definirla utilizando alguna construcción que se apoye únicamente en los dos o tres primeros grupos de axiomas.

### AXIOMA DE CONTINUIDAD O DE ARQUÍMEDES

1. Sea  $A_1$  un punto arbitrario de una recta entre dos puntos  $A$  y  $B$  de ella misma. Sean  $A_2, A_3, \dots$  los puntos de la recta tales que  $A_1$  está entre  $A$  y  $A_2$  y  $AA_1$  es igual a  $A_1A_2$ ,  $A_2$  está entre  $A_1$  y  $A_3$  y  $AA_1$  es igual a  $A_2A_3$ , etc. Entonces hay algún punto  $A_n$  tal que  $B$  está entre  $A$  y  $A_n$ .

Para completar la identificación de los puntos de una recta con las expansiones decimales o binarias como se describió en la sección 1.8, claramente conviene adoptar la segunda de las opciones arriba mencionadas para definir la *igualdad* entre segmentos. No haremos aquí tal construcción sino que la dejaremos al lector como un *ejercicio avanzado*. La siguiente figura sugiere una posible definición para la *igualdad de dos segmentos*  $A_1B_1 = A_2B_2$  basada en el axioma de las paralelas.



Este trabajo equivale a una *construcción de los números reales*. Como es bien sabido, cualquier construcción de los números reales requiere del axioma de continuidad o de Arquímedes.

Cabe mencionar algo más en este punto y es que al definir las operaciones entre segmentos, ya sea que la igualdad entre ellos se defina como congruencia o con una construcción como la que sugerimos en el párrafo anterior, la conmutatividad del producto requiere del teorema de Pappus. El hecho de que éste pueda demostrarse a partir de los axiomas de conexión e incidencia permite, en principio, realizar la construcción de los números reales de manera geométrica y sin necesidad de utilizar los axiomas de congruencia.



## Capítulo 2

# La geometría clásica

Llamamos Geometría clásica a todo el cuerpo de conocimientos geométricos que se deducen racionalmente a partir, ya sea de los postulados de Euclides o de los axiomas de Hilbert. Con ambos enfoques encontramos los mismos teoremas y las mismas construcciones con regla y compás. Incluimos en lo clásico tanto la geometría plana como la del espacio. La geometría deja de ser clásica cuando utiliza coordenadas y álgebra y se convierte en Geometría analítica, o cuando se aplica a superficies curvas y se convierte en Geometría diferencial. Cuando se incorporan las rectas y puntos al infinito la geometría se convierte *proyectiva*, pero se sigue considerando como clásica. La negación del 5º postulado de Euclides y el desarrollo de la *geometría hiperbólica*, puede incluirse como clásico pues no requiere de nuevas herramientas matemáticas, sino que procede exactamente con las mismas, de hecho con algo menos. Sin embargo muchos autores no la incluyen en lo clásico.

La mayor parte de la Geometría clásica que conocemos, es decir los teoremas y las construcciones con regla y compás, ya se conocían en la época de Euclides. Por eso su libro sigue siendo tan valioso. Sin embargo a lo largo de los siguientes 2000 años se han ido encontrando nuevos resultados. Por ejemplo se pueden mencionar los teoremas de *Pappus* y *Menelao* (siglo IV), la recta de Euler (siglo XVIII), la circunferencia de los 9 puntos, las esferas de Dandelin y la construcción del heptadecágono regular (siglo XIX), al igual que Los fundamentos de la Geometría de Hilbert. Incluso fue hasta el siglo XX que se demostró que no es posible partir cualquier poliedro en otros de manera que puedan ensamblarse en un cubo (1903). En este capítulo presentamos varios de estos temas que se engloban dentro de lo que se llama Geometría clásica, algunos antiguos, algunos más recientes).

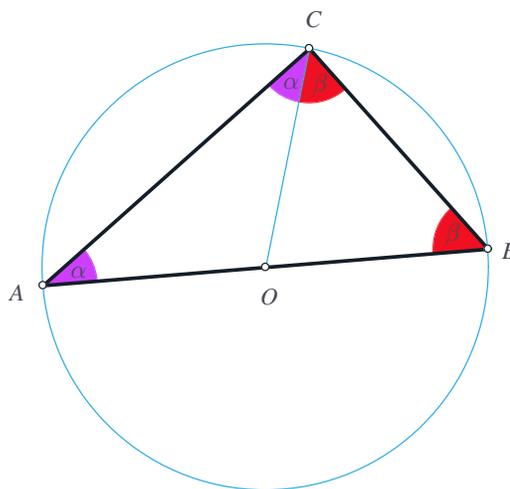
Es importante mencionar que la presentación se beneficia de la *geometría dinámica*, tecnología surgida a finales del siglo XX y que hoy en día es muy eficaz para reactivar el interés y la comprensión de la geometría clásica. Si el lector visualiza este texto en formato *pdf* desde una computadora o un dispositivo móvil conectados a internet, mediante un clic sobre muchas de las imágenes de este capítulo (y algunas del anterior), podrá acceder a las versiones interactivas con las que se prepararon. No solo eso, sino que podrá ensayar sus propias construcciones y redescubrir algunos de los resultados, encontrar nuevas maneras de construir o demostrar algo y, ¿por qué no?, descubrir algunos resultados desconocidos.

## 2.1. Propiedades del círculo

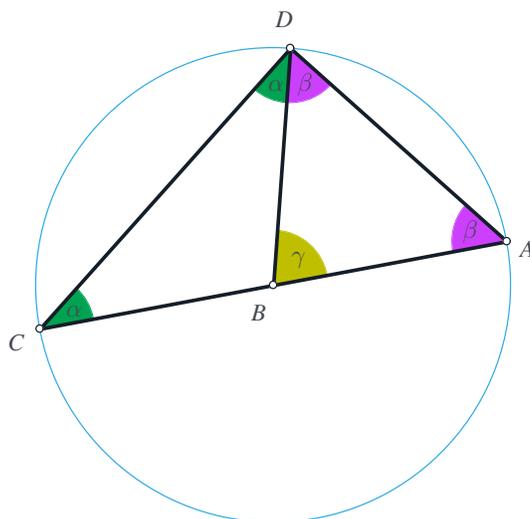
En esta sección demostraremos varios teoremas sobre círculos y ángulos.

*Teorema.* Si un triángulo tiene un lado en un diámetro de una circunferencia y el vértice opuesto a dicho lado sobre la circunferencia, el ángulo en dicho vértice será siempre recto.

*Demostración.* Consideremos un triángulo inscrito en una circunferencia y con uno de los lados (AB) como un diámetro de la circunferencia. Sea  $O$  el centro de la circunferencia. Trazamos el segmento  $OC$ , con lo que se forman los triángulos  $AOC$  y  $COB$ .  $AOC$  es isósceles pues  $AO$  y  $CO$ , al ser radios de la circunferencia, son iguales. Lo mismo se puede decir del triángulo  $COB$ . Como el triángulo  $AOC$  es isósceles,  $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$ . Llamemos a dicho ángulo  $\alpha$ . Igualmente a  $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$ , y lo llamaremos  $\beta$ . La suma de ángulos internos de un triángulo es  $180^\circ$ . Para nuestro triángulo,  $\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180^\circ$ . Es decir, dos ángulos  $\alpha$  más dos ángulos  $\beta$  dan un ángulo llano, por lo que un ángulo  $\alpha$  más un  $\beta$  debe dar un ángulo recto. Q.E.D.

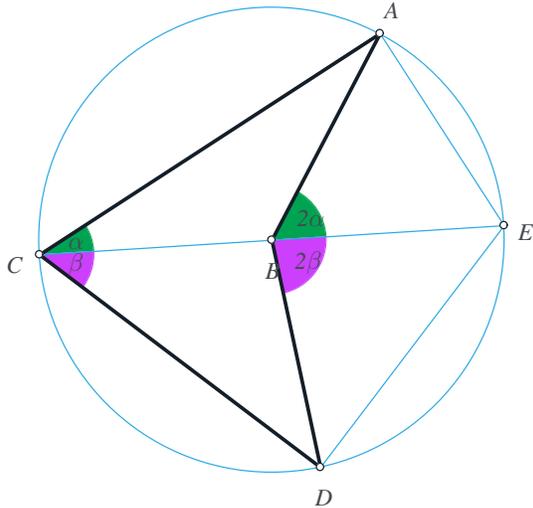


*Teorema.* El ángulo central subtendido por un arco desde un punto es el doble que el central subtendido por el mismo arco. Caso 1: el punto  $C$  y uno de los extremos  $A$  del arco  $AD$  son diametralmente opuestos.



*Demostración.* Tenemos un ángulo inscrito a una circunferencia  $\alpha = \sphericalangle ACD$  y el ángulo central correspondiente es  $\gamma = \sphericalangle ABD$ . El triángulo  $BDC$  es isósceles pues  $BC$  y  $BD$  son iguales al ser ambos radios de la circunferencia. Así, los ángulos de la base de dicho triángulo son ambos  $\alpha$ . Entonces, por un lado, el complemento de  $\sphericalangle DBC$  es  $\gamma$ , pero como la suma de los ángulos internos del triángulo  $BDC$  es un ángulo llano, el complemento de  $\sphericalangle DBC$  también es igual a  $2\alpha$ . Por tanto  $\gamma = 2\alpha$ . Q.E.D.

*Teorema.* El ángulo central subtendido por un arco desde un punto es el doble que el inscrito y subtendido por el mismo arco. Caso 2: el ángulo desde el punto incluye al centro. (En este caso buscamos la relación entre el ángulo  $\sphericalangle ABD$  y el  $\sphericalangle ACD$  cuando el diámetro de la circunferencia que pasa por  $C$  queda entre  $AC$  y  $DC$ .)

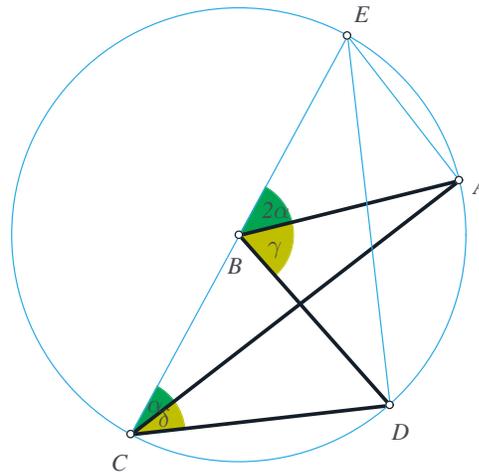


*Demostración.* Trazamos el diámetro en cuestión. Llamamos  $E$  al punto diametralmente opuesto a  $C$ . Trazamos el segmento auxiliar  $AE$ . Notamos que los triángulos  $\sphericalangle ABC$  y  $\sphericalangle ABE$  corresponden al caso inicial para el que ya se demostró que el ángulo central es el doble que el inscrito. Marcamos los ángulos central e inscrito como  $2\alpha$  y  $\alpha$ , respectivamente. Podemos hacer lo mismo agregando el segmento auxiliar  $DE$ . Así, los triángulos  $DBC$  y  $DBE$  se comportan igual. Marcamos el ángulo central y el inscrito ahora como  $2\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente. Así, el nuevo ángulo central  $\sphericalangle ABD$  es  $2\alpha + 2\beta$ , y el nuevo ángulo inscrito  $\sphericalangle ACD$  es  $\alpha + \beta$ , por lo que se sigue respetando que el ángulo central subtendido por un arco (en este caso el  $AD$ ) es el doble que el inscrito subtendido por el mismo arco. Q.E.D.

*Teorema.* El ángulo central subtendido por un arco desde un punto es el doble que el inscrito y subtendido por el mismo arco. Caso 3: el ángulo desde el punto no incluye al centro. (En este caso el diámetro queda fuera del ángulo inscrito y del central.)

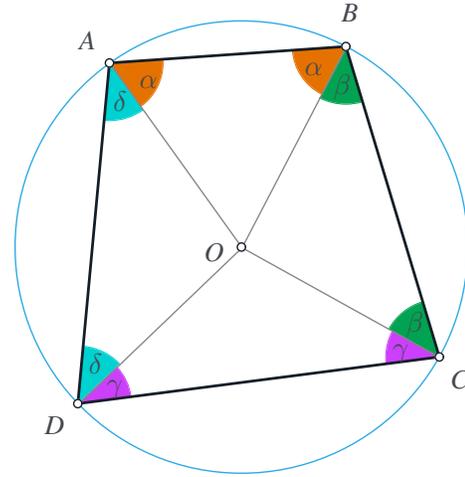
*Demostración.* Trazamos primero el diámetro que pasa por  $C$  y llamamos  $E$  al punto diametralmente opuesto a  $C$ . Trazamos el segmento  $AE$  auxiliar y notamos que los triángulos  $ABE$  y  $ACE$  son el central e inscrito para el caso inicial (cuando  $CE$  forma un diámetro). Así pues, podemos marcar el central como  $2\alpha$  y el inscrito como  $\alpha$ . Igualmente, si trazamos el segmento auxiliar  $DE$ , los triángulos  $DBE$  y  $DCE$  caen en el mismo caso, y  $\sphericalangle DBE = 2\sphericalangle DCE$ . No los marcamos para no ensuciar la figura, pero denominémoslos  $2\beta$  y  $\beta$ , respectivamente. Sea  $\gamma$  el ángulo central  $\sphericalangle ABD$  subtendido por el arco  $AD$ . Notamos que  $2\alpha + \gamma = 2\beta$ . Sea  $\delta$  el ángulo inscrito  $\sphericalangle ACD$  subtendido por  $AD$ . Notamos que  $\alpha + \delta = \beta$ . Así,  $\gamma = 2\beta - 2\alpha$  y  $\delta = \beta - \alpha$ . De ahí que  $\gamma = 2\delta$ . Q.E.D.

Esto completa el teorema para todos los casos.

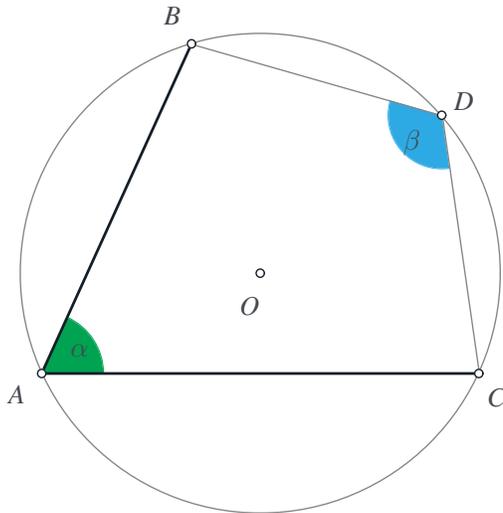


*Teorema.* Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico suman dos rectos.  
(Cuadrilátero cíclico aquel en el que todos sus vértices están en una circunferencia.)

*Demostración.* Unimos los puntos con el centro  $O$  del círculo, con lo que formamos cuatro triángulos internos que comparten el vértice  $O$ . Observamos el triángulo  $AOB$ . Notamos que es isósceles ya que dos de sus lados son iguales (los que corresponden a radios de la circunferencia). Por tanto los ángulos entre esos lados y el tercero son iguales. Los llamamos  $\alpha$  y los trazamos del mismo color. Análogamente, los otros triángulos comparten el vértice  $O$  y también son isósceles. Y, por lo mismo, sus ángulos correspondientes son iguales. Se trazan ahora todos esos ángulos. Sabemos que la suma de ángulos internos de un cuadrilátero es  $360^\circ$ . Así que  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$ . De donde  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$ . Q.E.D.



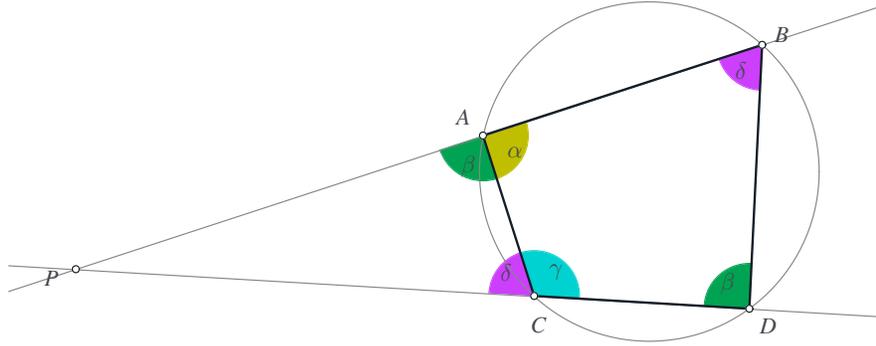
*Teorema.* Un ángulo inscrito en una circunferencia siempre es igual independientemente de cómo se mueva el punto que lo forma, siempre y cuando se mueva de un mismo lado de los puntos que flanquean los segmentos. Cuando rebasa esa cota su valor cambia a  $180^\circ$  menos el otro.



Consideremos 3 puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  en una circunferencia. Trazamos los segmentos  $AB$  y  $AC$  y llamamos  $\alpha$  al ángulo entre ellos. Agregamos un punto  $D$  sobre la circunferencia pero opuesto a  $A$ . Este punto se puede generar como la intersección de la mediatriz de  $B$  y  $C$  con la circunferencia, pero que es opuesta a  $A$ . Por el momento, no se muestra dicha construcción, sino sólo el punto  $D$ . Trazamos los segmentos  $BD$  y  $CD$  para completar el cuadrilátero cíclico, y trazamos el ángulo  $\beta$ . Por la propiedad de los cuadriláteros cíclicos,  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Si movemos  $A$  del mismo lado de  $B$  y  $C$ ,  $D$  se mantiene fijo y  $\beta$  es constante, por lo que  $\alpha$  también lo es. Q.E.D.

Nótese que esta propiedad también pudo haber sido demostrada mediante la propiedad del ángulo central e inscrito.

*Teorema.* Sea  $P$  un punto que no está en una circunferencia dada. Trácese dos rectas que pasan por  $P$  y que tocan a la circunferencia, la primera en los puntos  $A$  y  $B$  y la segunda en los puntos  $C$  y  $D$ . Entonces  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Si la segunda recta es tangente a la circunferencia y el punto de tangencia es  $C$ , entonces  $PA \cdot PB = PC^2$ . El producto constante  $PA \cdot PB$  se llama *la potencia del punto  $P$  respecto a la circunferencia*.

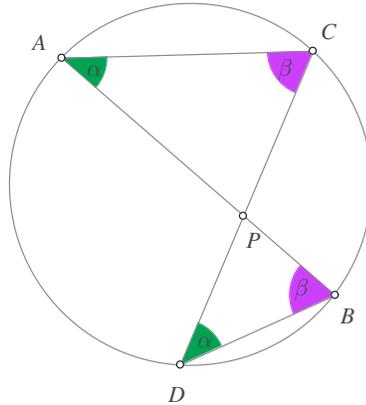


*Demostración para el caso en que el punto  $P$  está fuera de la circunferencia.*

Sean  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  como en la figura anterior. Por la propiedad de los cuadriláteros cíclicos sabemos que  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Por tanto el ángulo suplementario a  $\alpha$  es igual a  $\beta$  y lo pintamos del mismo color. Por el mismo argumento, el ángulo  $\delta$  es el suplementario de  $\gamma$ . Los triángulos  $PBD$  y  $PCA$  son semejantes pues comparten dos ángulos internos. Entonces,  $\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA}$ . Pero sabemos que esta igualdad es equivalente a  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ , que es lo que se quería demostrar.

*Demostración para el caso en que el punto  $P$  está dentro de la circunferencia.*

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los ángulos de la siguiente.



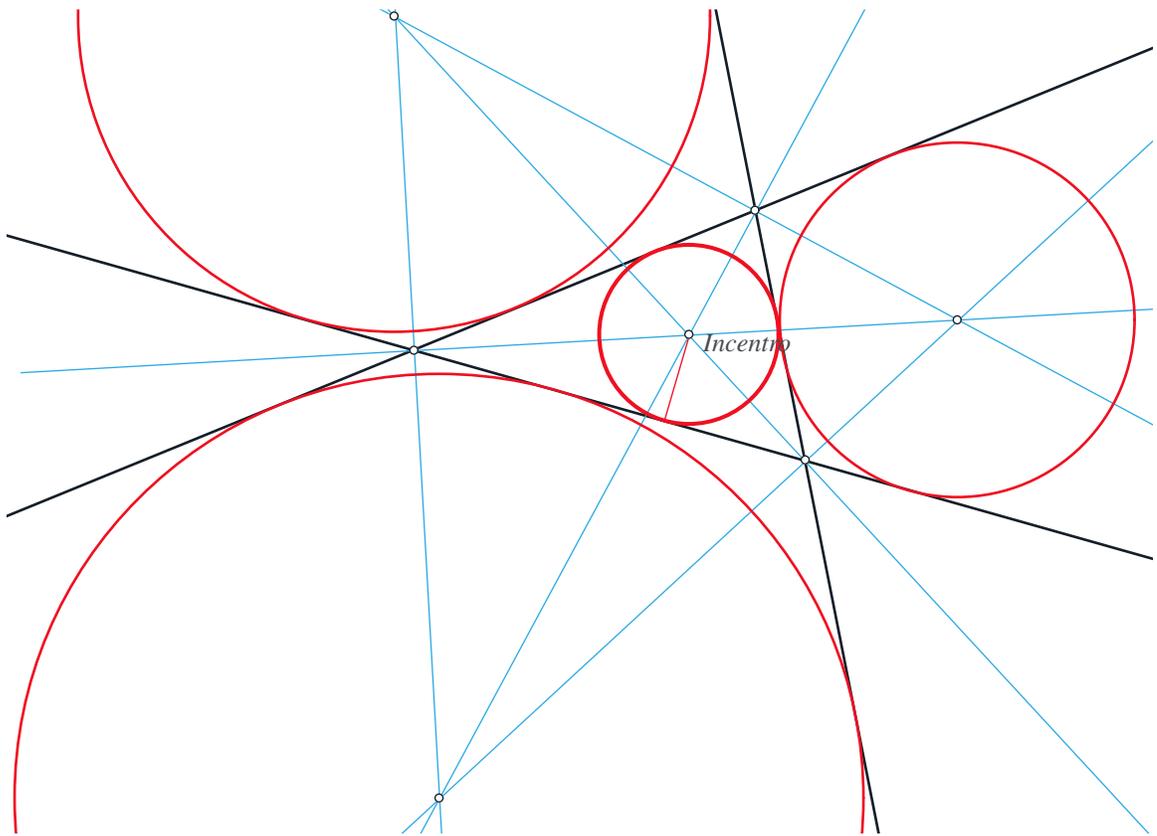
Resulta evidente que los triángulos  $ACP$  y  $DBP$  son semejantes, por lo tanto  $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$ , que es equivalente a  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . Q.E.D.

## 2.2. Propiedades del triángulo

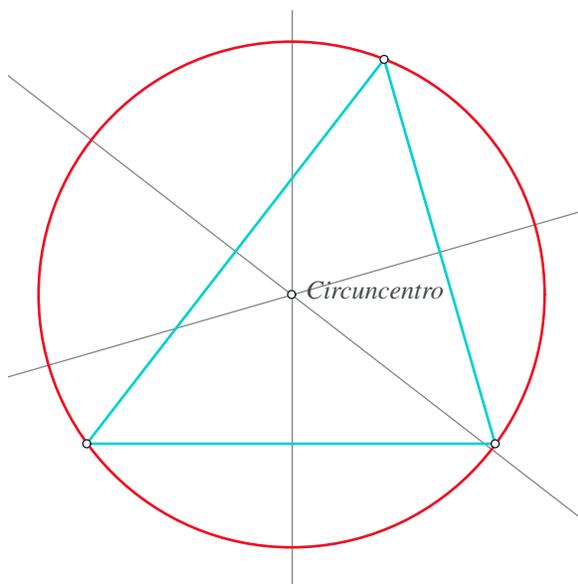
En esta sección enunciamos varios resultados relativos al triángulo. Demostraremos algunos de ellos y daremos alguna idea de cómo demostrar los otros. En estos últimos casos dejamos los detalles de las demostraciones como ejercicios para el lector.

1. Construcción de la circunferencia *inscrita* en un triángulo, es decir la que está dentro del triángulo y es tangente a sus lados; y de las circunferencias *excríticas*, que son las que son tangentes a las prolongaciones de los lados y quedan fuera del triángulo.

Los centros de estas circunferencias son los puntos en los que coinciden las bisectrices o sus perpendiculares (azules). Los radios son las distancias de los centros a las rectas dadas (ver puntos color naranja que son las proyecciones ortogonales de los centros a las rectas dadas).

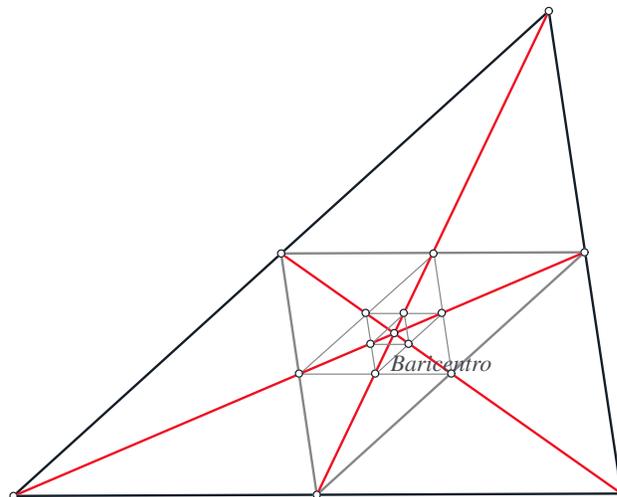


El incentro es el punto donde coinciden las bisectrices y es también el centro del círculo inscrito en un triángulo

2. Construcción del *circuncírculo*<sup>1</sup>

El punto en el que coinciden dos de las tres mediatrices (la mediatriz de dos puntos es la recta de los puntos que equidistan de ellos) de un triángulo está a la misma distancia de los tres vértices y por tanto la otra mediatriz pasa por él. Por tanto la circunferencia con centro en ese punto, que llama *circuncentro*, pasa por los tres vértices del triángulo y es la circunferencia circunscrita al triángulo.

3. El baricentro (es decir, el punto donde coinciden las medianas<sup>2</sup>) es el punto al que convergen los triángulos anidados que se forman tomando como vértices los puntos medios de los lados del anterior. La demostración de que las medianas concurren en un punto se deja como ejercicio.



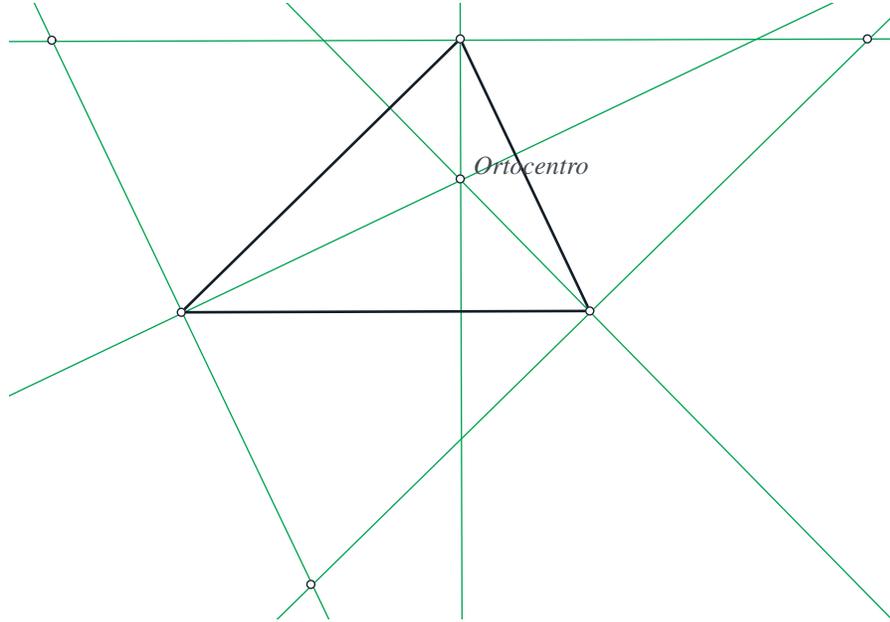
Las medianas de un triángulo coinciden en el baricentro

<sup>1</sup>El *circuncírculo* es la circunferencia circunscrita a un triángulo, es decir, la que pasa sus tres vértices.

<sup>2</sup>las *medianas* son las rectas que pasan por los vértices de un triángulo y por los puntos medios de sus lados opuestos.

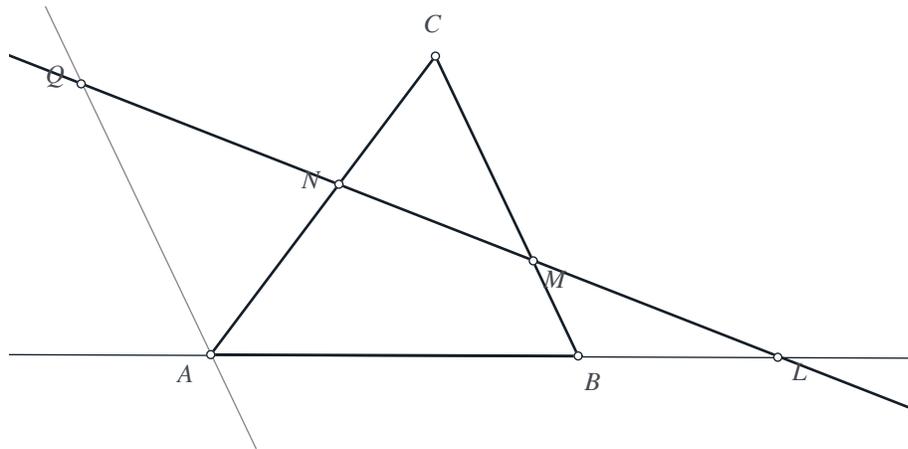
4. Las alturas de un triángulo coinciden en un punto que se llama el ortocentro del triángulo.

*Demostración.* Las alturas de un triángulo son las mediatrices del triángulo formado por las paralelas a cada uno de sus lados por los vértices opuestos a ellos. Por tanto son concurrentes. Q.E.D.



5. *Teorema de Menelao.* Si una recta corta a los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$  del triángulo  $ABC$  en  $L$ ,  $M$  y  $N$ , respectivamente, entonces<sup>3</sup>

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$



*Demostración.* Sea  $Q$  la intersección de la recta con la paralela a  $BC$  por  $A$ . Entonces, por semejanza

<sup>3</sup>Los segmentos se consideran con signo positivo si van en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo si van en el sentido de las manecillas del reloj. En el dibujo todos son positivos excepto  $LB$ , que es negativo.

de triángulos:

$$\frac{AL}{AQ} = \frac{BL}{BM}; \frac{AQ}{CM} = \frac{NA}{NC}$$

que equivalen a  $\frac{AL}{AQ} \cdot \frac{BM}{BL} = 1$  y  $\frac{AQ}{CM} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$ . Multiplicando ambas razones obtenemos:

$$\frac{AL}{AQ} \cdot \frac{BM}{BL} \cdot \frac{AQ}{CM} \cdot \frac{NC}{NA}$$

. Simplificando:

$$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$$

y

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = -1$$

QED.

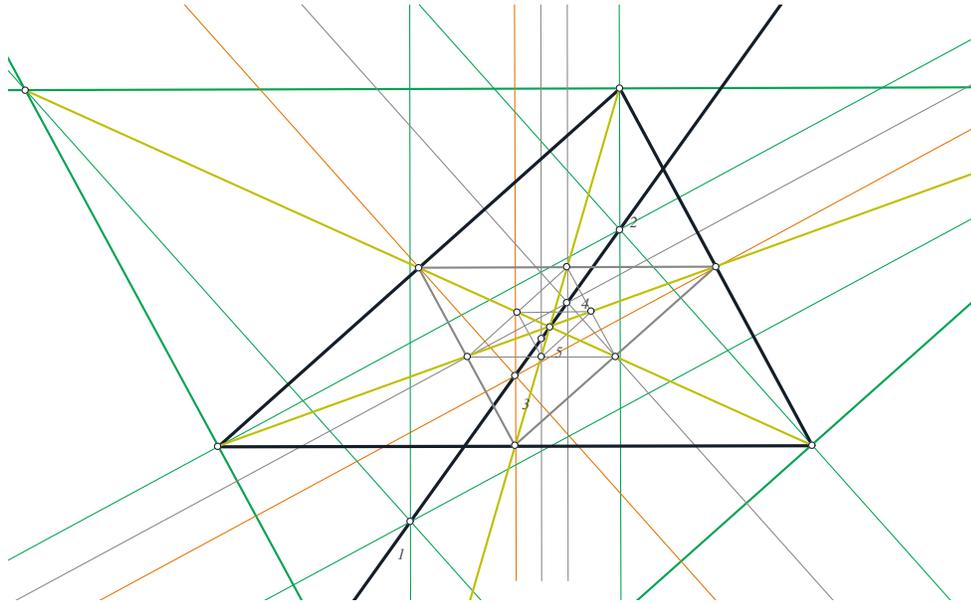
6. *Teorema de Ceva*. Si tres rectas que pasan por los vértices  $A, B, C$  de un triángulo cortan a los lados opuestos en los puntos  $L, M, N$  entonces

$$\frac{AL}{LB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} = 1$$

. La demostración de este teorema puede hacerse a partir del teorema de Menelao, cambiando uno de los puntos  $L, M$  o  $N$  por su armónico conjugado respecto a los vértices con los que es colineal. Se dejan los detalles como ejercicio.

7. La recta de Euler. El circuncentro, el ortocentro y el baricentro de un triángulo están alineados. La recta que los une se llama la recta de Euler.

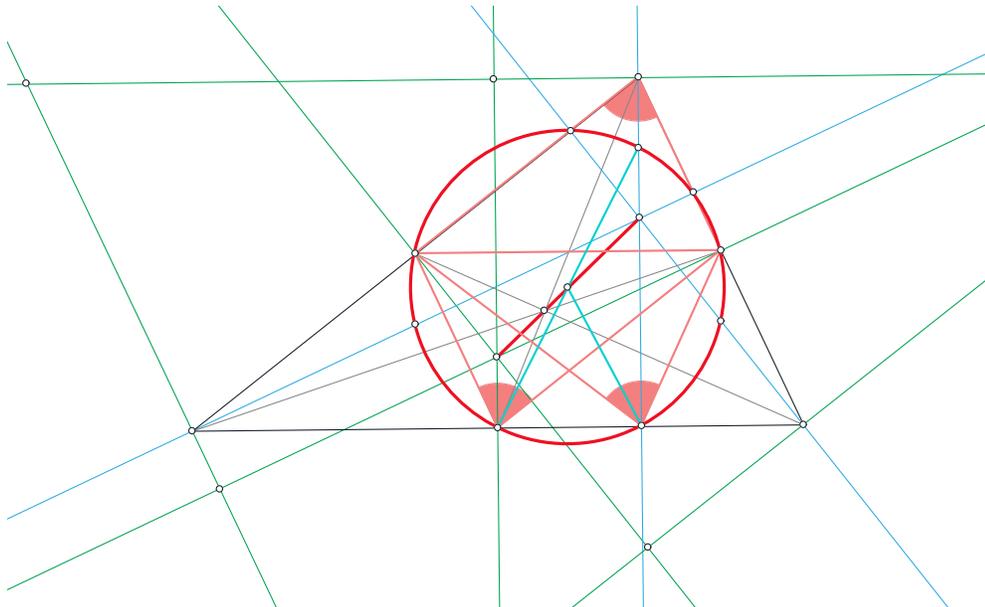
*Demostración*. Los ortocentros y los circuncentros de todos los triángulos anidados que se van formando tomando como vértices los puntos medios de los lados del anterior, están todos alineados. Por tanto el baricentro, que es el límite de todos ellos también debe estar sobre la misma recta.



La recta de Euler contiene al baricentro, al ortocentro y al circuncentro de todos los triángulos anidados.

8. El círculo de los 9 puntos. El llamado *círculo de los 9 puntos* es uno que pasa por los puntos medios de los lados, por los pies de las alturas y por los puntos medios entre los vértices y el ortocentro.

La recta de Euler (roja) une el circuncentro (verde) con el ortocentro (azul). En ella yace también el baricentro (gris). El punto medio entre el circuncentro y el ortocentro es centro de un círculo de los 9 puntos. La demostración se basa en que los tres ángulos marcados en la figura son iguales.



## 2.3. Construcciones con regla y compás

La geometría clásica o euclidiana intentaba realizar todas sus construcciones con regla y compás. Los antiguos griegos creían que todas las construcciones geométricas deberían realizarse exclusivamente con esos medios. Sin embargo hubo tres construcciones geométricas que, por más que lo intentaron, nunca pudieron resolver con regla y compás. Fueron éstas:

### PROBLEMAS QUE NO SE PUEDEN RESOLVER CON SOLO REGLA Y COMPÁS

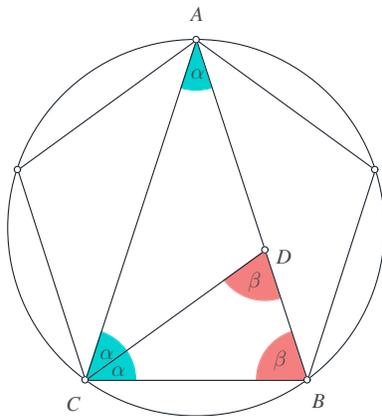
1. *Cuadratura del círculo*: Construir un cuadrado con la misma área de un círculo dado.
2. *Trisección de un ángulo*: Dado cualquier ángulo otro que sea su tercera parte.
3. *Duplicación del cubo*: Dado (el lado de) un cubo, construir (el lado de) otro cuyo volumen sea el doble que el del primero.

En el siglo XVIII se demostró que las tres son imposibles de realizar con sólo regla y compás. Esto llevó a desarrollos de gran trascendencia para el *Álgebra moderna*.

Un ejemplo interesante de construcción con regla y compás que no es precisamente trivial, pero que sí se puede hacer, es la del pentágono regular. Euclides realiza la construcción en el libro IV, Proposición 11, así que no utiliza la semejanza de triángulos, desarrollada hasta el libro VI, para justificarla. Sin embargo, dado que el pentágono regular está íntimamente relacionado con la *razón áurea*, resulta enriquecedor realizar una construcción en la que ésta aparezca de manera explícita, como la que exhibimos en esta sección. Antes definiremos y estudiaremos brevemente la *razón áurea*.

### La razón áurea

Hay varias maneras de definir la razón áurea  $\gamma$ . Aquí lo haremos como *la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular*. De acuerdo con la figura,  $\gamma = \frac{AB}{BC}$ .



Demostremos que  $\gamma$  satisface la ecuación

$$\gamma^2 = 1 + \gamma$$

De las propiedades de los ángulos inscritos en una circunferencia se deduce que  $\angle ABC = \angle BCA = 2\angle CAB$ . Sea D la intersección de la bisectriz de  $\angle BCA$  con  $AB$ . Es fácil ver que  $\angle CDB = \angle DBC = \beta$  y  $\angle CAD = \angle DCA = \alpha$ . Por tanto los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle CDB$  son semejantes y  $CD=DA$ ,  $\frac{CD}{DB} = \frac{AB}{BC} = \gamma$  y  $CD + DB = AB$ . Dividiendo la segunda igualdad por  $DB$  obtenemos

$$\gamma + 1 = \frac{AB}{DB} = \frac{AB}{BC} \frac{BC}{DB} = \gamma \frac{CD}{DB} = \gamma^2$$

Es fácil ver que la única solución positiva de esta ecuación cuadrática es  $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . A veces conviene expresar la ecuación para  $\gamma$  en la forma:  $\gamma = 1 + \frac{1}{\gamma}$ .

Otra definición de la razón áurea es con tres puntos alineados  $A, B, D$  que satisfacen:  $AB = AD + DB$  y  $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB}$ . Euclides define esta relación diciendo que  $AB$  es *cortado en extrema y media razón* por el punto  $D$ . Es decir, que el segmento completo  $AB$  es cortado por  $D$  en dos partes de manera que la razón del segmento total  $AB$  a la parte mayor  $AD$  es igual a la razón de la parte mayor  $AD$  a la menor  $DB$ . (Ver *Los elementos*, Definición VI.3.)

### Construcción del pentágono regular inscrito a una circunferencia

La construcción del pentágono regular es una de las hazañas importantes de las matemáticas griegas. Aparece como Proposición 11 del libro IV de *Los elementos* de EUCLIDES, antes del desarrollo de la *Teoría de las proporciones*, lo que quiere decir que EUCLIDES no utiliza en ella el concepto de razón. Sin embargo, dado que el pentágono regular está íntimamente relacionado con la razón áurea, resulta enriquecedor realizar una construcción en la que ésta aparezca de manera explícita.

Consideremos un círculo con centro en  $O$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que su radio es 1. Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos de la circunferencia tales que  $OP$  y  $OQ$  son perpendiculares. Sea  $M$  el punto medio de  $OQ$ . Sea  $R$  la intersección de la bisectriz de  $\angle OMP$  con  $OP$ . Afirmamos que las intersecciones  $S$  y  $T$  de la paralela a  $OQ$  por  $R$ , junto con  $P$  constituyen tres vértices consecutivos del pentágono regular que queremos construir. Los otros dos vértices pueden hallarse como intersecciones de las mediatrices de  $PS$  y  $PT$  con la circunferencia.

*Demostración.* Por VI.3. de Los elementos,  $\frac{RP}{OR} = \frac{MP}{MO}$  y por el Teorema de Pitágoras aplicado a  $\triangle MOP$ ,

$$\frac{RP}{OR} = \frac{\sqrt{1 + 1/4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Pero  $RP = 1 - OR$  y  $1 - OR = \sqrt{5}OR$ . Por lo tanto

$$1 = (1 + \sqrt{5})OR; OR = \frac{1}{2\gamma}$$

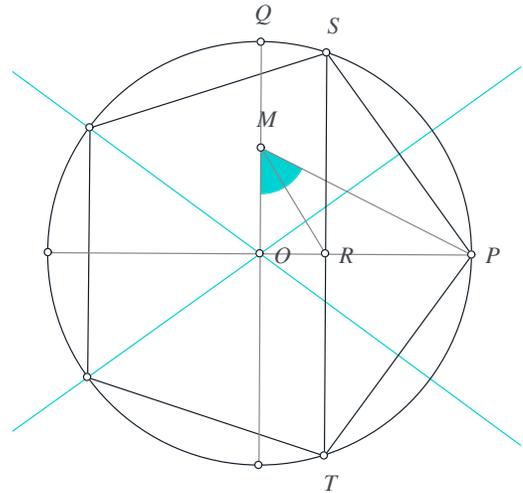
Usando el teorema de Pitágoras en  $\triangle PRS$ , obtenemos  $PS^2 = RS^2 + RP^2$ , y poniendo todo en términos de  $OR$ ,

$$PS^2 = (1 - OR^2) + (1 - OR)^2 = 2(1 - OR)$$

Calculemos ahora el cuadrado de la razón  $\frac{ST}{PS}$ :

$$\frac{ST^2}{PS^2} = \frac{4RS^2}{PS^2} = \frac{2(1 - OR^2)}{(1 - OR)} = 2(1 + OR) = 2 + \frac{1}{\gamma} = 1 + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = 1 + \gamma = \gamma^2$$

(ya que  $1 + \frac{1}{\gamma} = \gamma$  y  $1 + \gamma = \gamma^2$ ). Por tanto,  $\frac{ST}{PS} = \gamma$ . Esto demuestra que  $ST$  es la diagonal y  $PS$  el lado del polígono regular inscrito en la circunferencia. Q.E.D.



### Construcción del heptadecágono regular inscrito a una circunferencia

A continuación presentamos una imagen con la construcción con regla y compás del heptadecágono (polígono de 17 lados) regular realizada por Carl Friederich Gauss en 1796 a la edad de 19 años. Por algo le llamaban el *Príncipe de la matemáticas*. Fue la primera construcción con regla y compás nueva de un polígono regular que se hacía en 2000 años. Gauss no solo hizo esta construcción sino que determinó cuáles polígonos regulares se pueden construir con regla y compás y cuáles no.

Los únicos que se que se pueden construir con regla y compás son aquellos cuyo número se lados es

$$3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots, n, \dots$$

para  $n$  de la forma

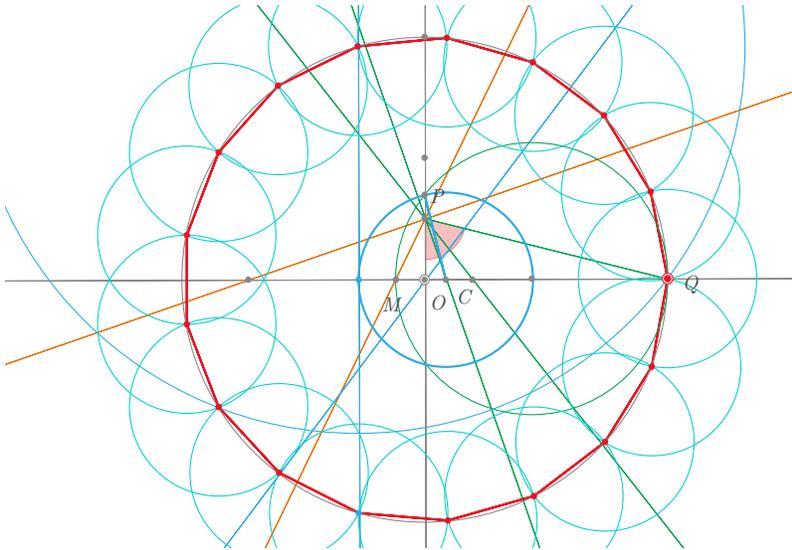
$$n = 2^k p_1 p_2 \dots p_j$$

donde las  $p_i$  son *primos de Fermat*, es decir números de la forma  $1 + 2^{2^m}$  que son primos. Los primeros primos de Fermat son:

$$5, 17, 257, 65537$$

En particular los números 9, 11, 13 y 14 no tienen la forma requerida, por lo que los polígonos regulares con esos números de lados no se pueden construir con regla y compás.

Brevemente, la construcción del heptadecágono regular procede tomando un punto  $P$  a una distancia de  $\frac{1}{4}$  del centro  $O$ , y otro punto  $Q$  que sea un extremo del diámetro perpendicular a  $OP$ .  $Q$  será uno de los vértices del heptadecágono. Se dividen en 4 el ángulo  $OPQ$  y así se define un punto  $C$  en ese mismo diámetro.

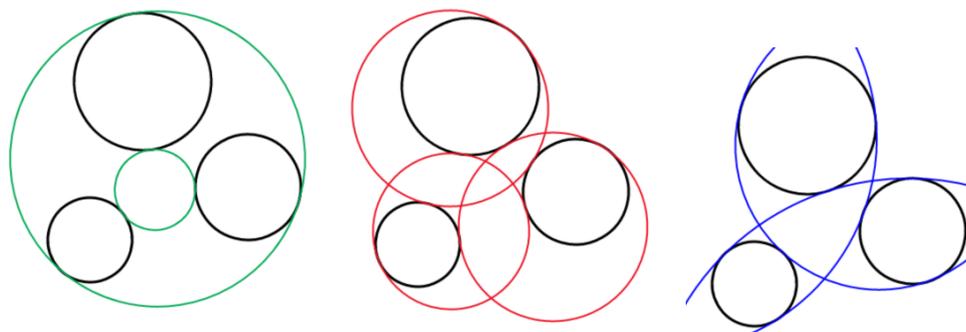


Se toma el punto  $M$ , sobre el mismo diámetro, que está a un ángulo de  $45^\circ$  de  $PC$  y se traza el círculo con centro en el punto medio entre  $M$  y  $Q$  y que pasa por  $M$  y  $Q$ . Se traza otro círculo con centro en el punto  $C$  que pase por la intersección de  $OP$  con el anterior. La perpendicular a  $OQ$  por su intersección con este último círculo cortará al círculo original en dos puntos del heptadecágono deseado. A partir de estos dos y de  $Q$  es fácil construir los otros vértices del heptadecágono.

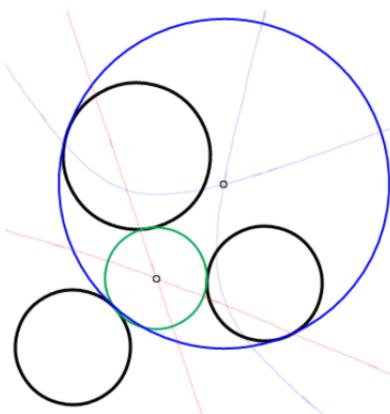
Omitimos la justificación de la construcción, que es bastante complicada.

## 2.4. Los problemas de Apolonio

Apolonio de Perga (262-190 a.e.c) fue uno de los más grandes matemáticos griegos. Su trabajo más importante fue un tratado sobre las secciones cónicas, parte de cuyo contenido se presenta en 2.5. Otra de sus contribuciones importantes fue un tratado sobre *las tangencias* que, entre otras cosas, contenía la solución del problema de encontrar un círculo tangente a otros tres círculos dados. Lamentablemente este libro se perdió. Sabemos de que el libro existió y tenemos idea de su contenido gracias a los comentarios del matemático alejandrino Pappus del siglo IV. En general hay 8 soluciones posibles, como muestra la siguiente figura en la que los círculos dados son los negros y los tangentes a ellos son 2 verdes, 3 rojos y 3 azules.

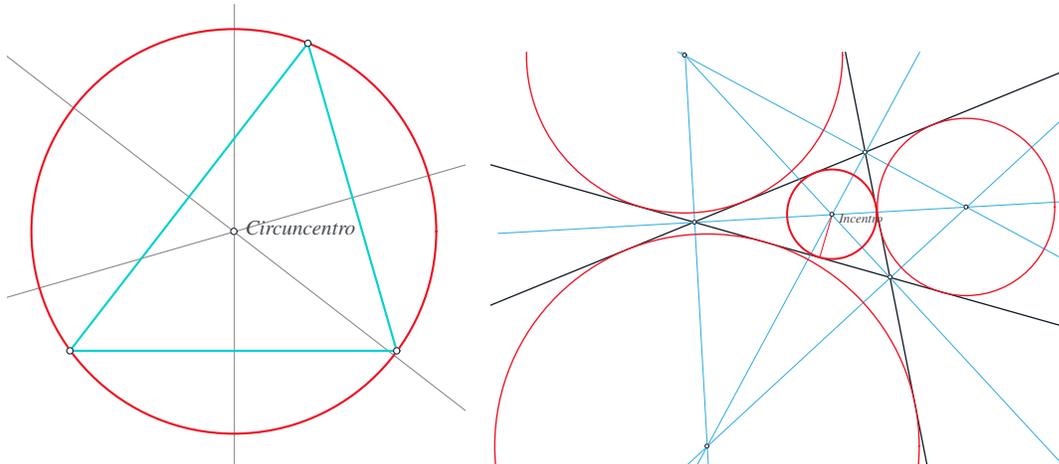


El problema es fácilmente soluble utilizando geometría analítica. Se trata de encontrar las intersecciones de unas hipérbolas definidas como los lugares geométricos de los puntos cuyas distancias a los centros de dos de los círculos, más o menos sus radios, son iguales. Las intersecciones de esas hipérbolas son los centros de las circunferencias buscadas. Los radios son la distancia a cualquiera de los centros más o menos el radio correspondiente.

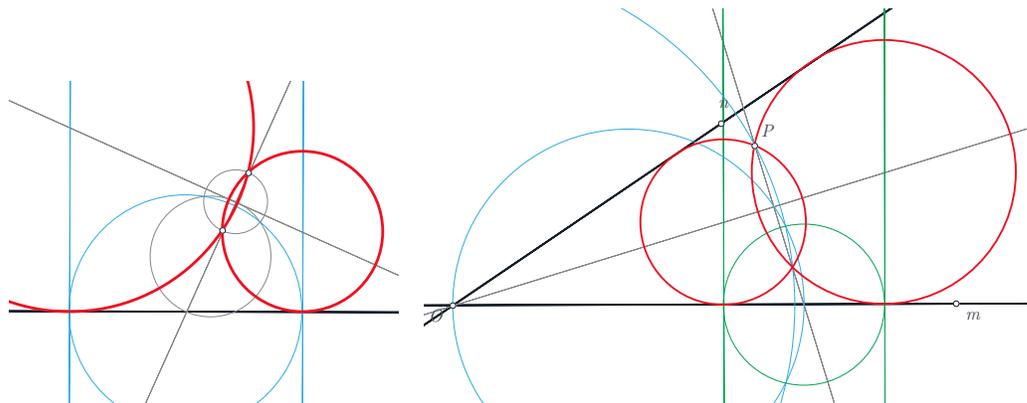


No sabemos si la solución de Apolonio utilizaba hipérbolas. Es posible. Tal vez fue resolver éste y otros problemas similares que eran difíciles de atacar con sólo regla y compás haya sido una de sus motivaciones para estudiar las secciones cónica. Lo interesante del problema es que sí se puede resolver con regla y compás, aunque el camino es complicado. François Viète (1540-1603) encontró una solución reduciendo el problema a otros más sencillos y combinándolas para obtener el resultado deseado. La idea de Viète dio lugar a lo que se conoce como *los 10 problemas de Apolonio*.

Los problemas se pueden plantear así: Para tres objetos cualesquiera que pueden ser puntos, rectas o círculos, encontrar los círculos que pasan por los puntos y son tangentes a las rectas y a los círculos. A cada uno de estos problemas se le asigna una combinación de las letras  $P$ ,  $L$ ,  $C$  para especificarlo, ordenadas siempre en el orden indicado. Así el problema de Apolonio  $PPP$  consiste en encontrar el círculo que pasa por tres puntos dados y el problema  $PLC$  consta de encontrar los círculos que pasan por un punto dado y son tangentes a una recta y a un círculo dados. El problema original de Apolonio se convierte así en el  $CCC$ . Algunos de estos problemas son muy sencillos de resolver. Por ejemplo, el  $PPP$  se resuelve encontrando el circuncentro de los tres puntos. El problema  $LLL$  tiene 4 soluciones, que son la circunferencia inscrita y las tres circunferencia excritas.

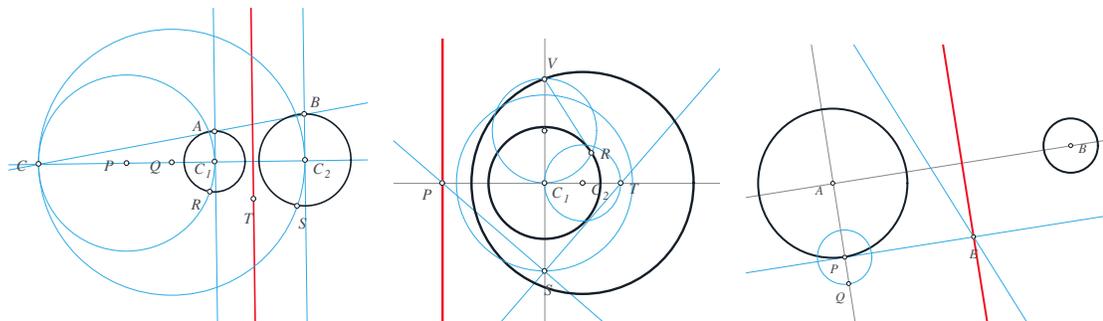
Soluciones a los problemas  $PPP$  y  $LLL$ 

Las siguientes figuras ilustran las ideas principales (con un clic en las imágenes se accede a la versión interactiva con explicaciones). Las demostraciones de que éstas construcciones logran el objetivo deseado se dejan como ejercicios para el lector.

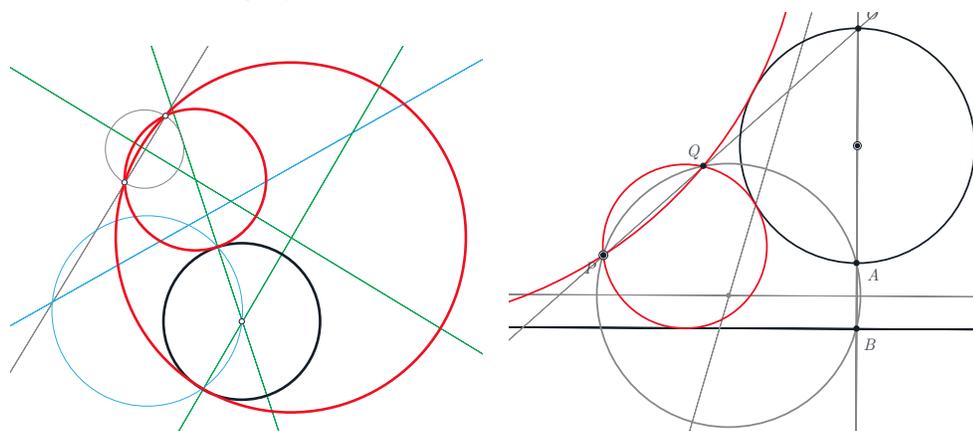
Soluciones a los problemas  $PPL$  y  $PLL$ 

Hay un par de ideas que no han sido descritas en este texto y que son indispensables para resolver los siguientes casos: el *eje radical de dos circunferencias* y la operación de *inversión respecto a un círculo*.

El *eje radical* de dos circunferencias es una recta cuyos puntos son los centros de las circunferencias ortogonales a ellas. La siguiente figura muestra distintas maneras de construir el *eje radical* (que consta de los puntos que tienen la misma potencia respecto a un círculo) con regla y compás. Las primeras dos son complementarias. La tercera es general, funciona en todos los casos.



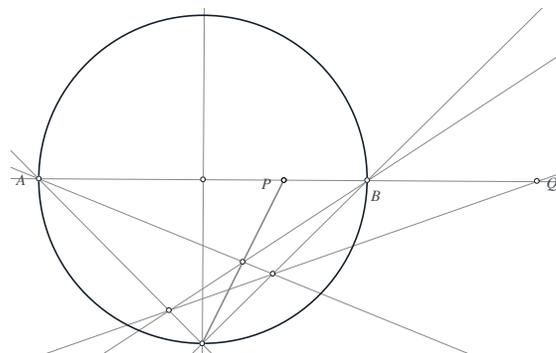
Armados con esta herramienta podemos enfrentar el problema de Apolonio *PPC*. El problema *PLC* es bastante complejo. En el fondo lo que hay que hacer es encontrar las intersecciones de dos parábolas cuyos ejes son ortogonales a la recta dada. La solución que ofrecemos hace precisamente eso utilizando solamente regla y compás.



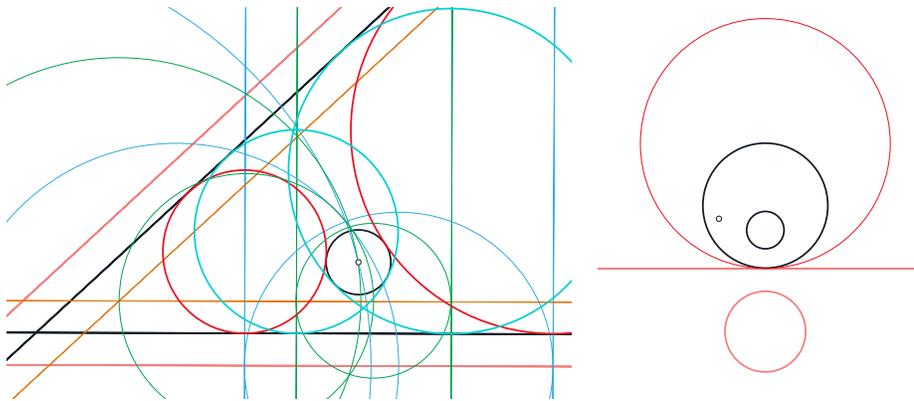
Soluciones a los problemas *PPC* y *PLC*

La solución de algunos de los siguientes problemas utiliza el concepto de *inversión*.

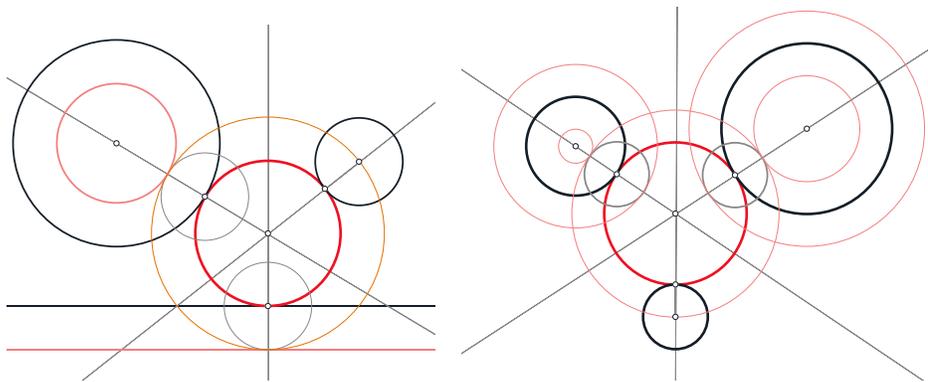
El *inverso* de un punto respecto a un círculo puede definirse como el armónico conjugado del punto respecto al diámetro que lo contiene. Lo interesante de esta transformación llamada inversión, es que transforma circunferencias en circunferencias, las que pasan por el centro, que las transforma en rectas. Además, aplicar dos veces la misma inversión regresa todos los puntos (excepto el centro) a su posición original.



Los siguiente problemas, el *LLC* y el *PCC* no se resuelven directamente sino que se reducen a otros ya resueltos utilizando esencialmente dos trucos: para el *LLC* se contrae la circunferencia a un punto recorriendo paralelamente las rectas por una distancia igual al radio, con lo que el problema se reduce al caso *PLL*, ya resuelto. Para el problema *PCC* se realizan una *inversión* respecto a una circunferencia adecuada que transforma una de las circunferencias dadas en una recta, con lo que se reduce al problema *PLC* ya resuelto.

Soluciones a los problemas *LLC* y *PCC*

Finalmente el problema *LCC* se resuelve reduciendo una de las circunferencia, la más pequeña, a un punto; la otra se reduce a una con el mismo centro y con el radio igual a la diferencia de los radios originales y la recta se traalada paralelamente una distancia igual al radio menor, con lo que el problema se reduce al caso *PLC*, ya resuelto. Finalmente el caso *CCC* se reduce al *PCC* reduciendo los radios de las tres circunferencias por el del más pequeño.

Soluciones a los problemas *LCC* y *CCC*

Esto completa la solución de los 10 problemas de Apolonio únicamente con regla y compás, más o menos como lo hizo François Viète en el siglo XVI.

La importancia de los problemas de Apolonio radica en que ayudaron a generar nuevas construcciones con regla y compás, como la del eje radical y la inversión, promoviendo avances importantes en la geometría.

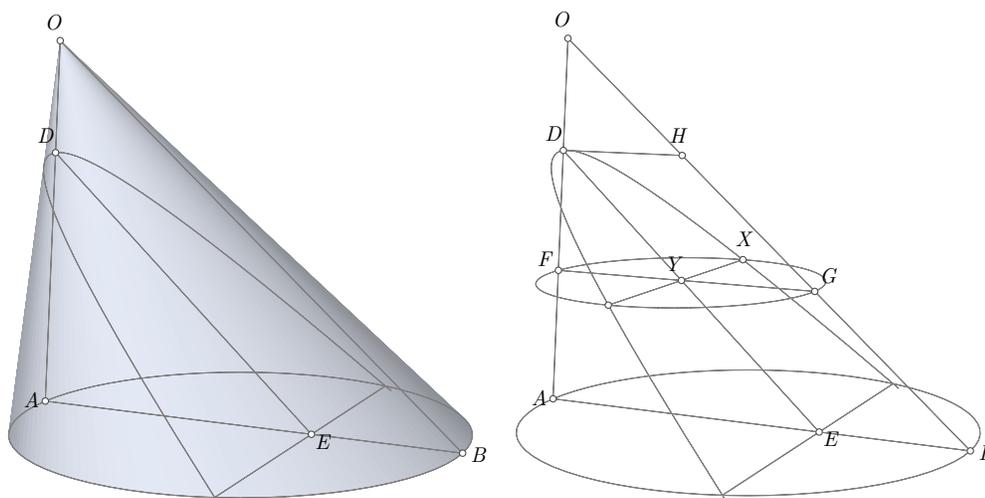
## 2.5. Las secciones cónicas según Apolonio

Las curvas cónicas pueden generarse cortando un cono circular con un plano. Estas curvas fueron estudiadas en la antigua Grecia, especialmente por uno de sus grandes matemáticos: APOLONIO DE PERGA (262-190 a.e.c.), tanto por sus interesantes propiedades de reflexión como por su procedencia, que las vincula íntimamente con el círculo, considerado por ellos como la figura perfecta. Casi dos mil años más tarde, resultaron de gran utilidad para comprender y describir el movimiento planetario (Leyes de Kepler).

Veamos algunos de los resultados más conocidos de APOLONIO.

### La parábola

A la curva que se forma como intersección de un cono circular y un plano que es paralelo a una de sus generatrices y no pasa por el vértice, Apolonio la llamó *parábola*. Veamos cómo trata APOLONIO a la parábola.



Sea  $O$  el vértice del cono. El plano de la parábola y el que contiene a la base del cono se cortan en una recta. Sea  $AB$  el diámetro de la base del cono que es perpendicular a ella. Sean  $D$  y  $E$  los puntos de intersección del plano de la parábola con  $OA$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces  $OB$  es paralela a  $DE$  y es precisamente la generatriz del cono a la que el plano de la parábola es paralelo.

Sea  $X$  un punto de la parábola. Consideremos el plano paralelo a la base del cono que pasa por  $X$ . Sean  $F$ ,  $G$  y  $Y$  sus intersecciones con  $OA$ ,  $DE$  y  $OB$ , respectivamente. Entonces  $F$ ,  $G$  y  $X$  están en una circunferencia de la que  $FG$  es un diámetro;  $Y$  está en  $FG$  y  $YX$  es perpendicular a  $FG$ . Del teorema en 2.1 sobre la potencia de un punto respecto a un círculo, obtenemos

$$YX^2 = FY \cdot YG. \quad (2.1)$$

Es claro que  $YG = DH = EB$  es constante, es decir, no depende de  $X$ . Por semejanza de triángulos vemos que  $FY = DY \cdot \frac{AB}{OB}$ . Por tanto,

$$YX^2 = DY \cdot \frac{AB}{OB} \cdot YG. \quad (2.2)$$

Si definimos  $q = \frac{AB}{OB} YG$ , que es una constante, la igualdad 2.2 se puede escribir como

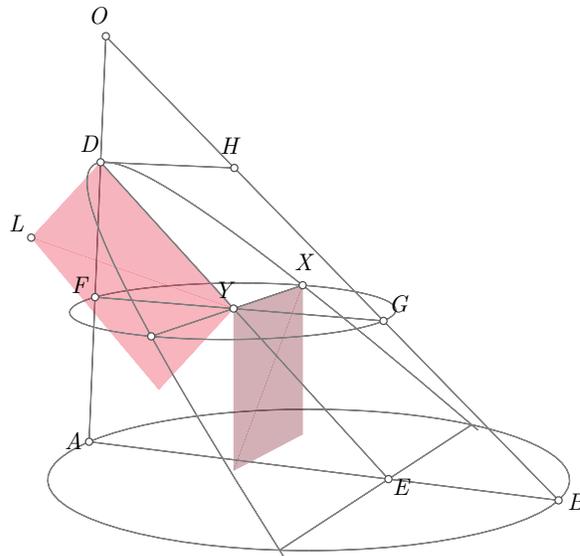
$$YX^2 = DY \cdot q \quad (2.3)$$

Finalmente, si definimos  $x = YX$  y  $y = DY$ , esta relación adquiere un aspecto muy conocido:

$$x^2 = qy,$$

el de la ecuación que identificamos como “de la parábola” en los cursos de geometría analítica.

Apolonio construye un rectángulo de lados  $DY$  y  $q$  (en la figura,  $DL = q$ ) e interpreta su resultado como la igualdad (de las áreas) del cuadrado de lado  $YX$  y el rectángulo de lados  $DY$  y  $DL$ .

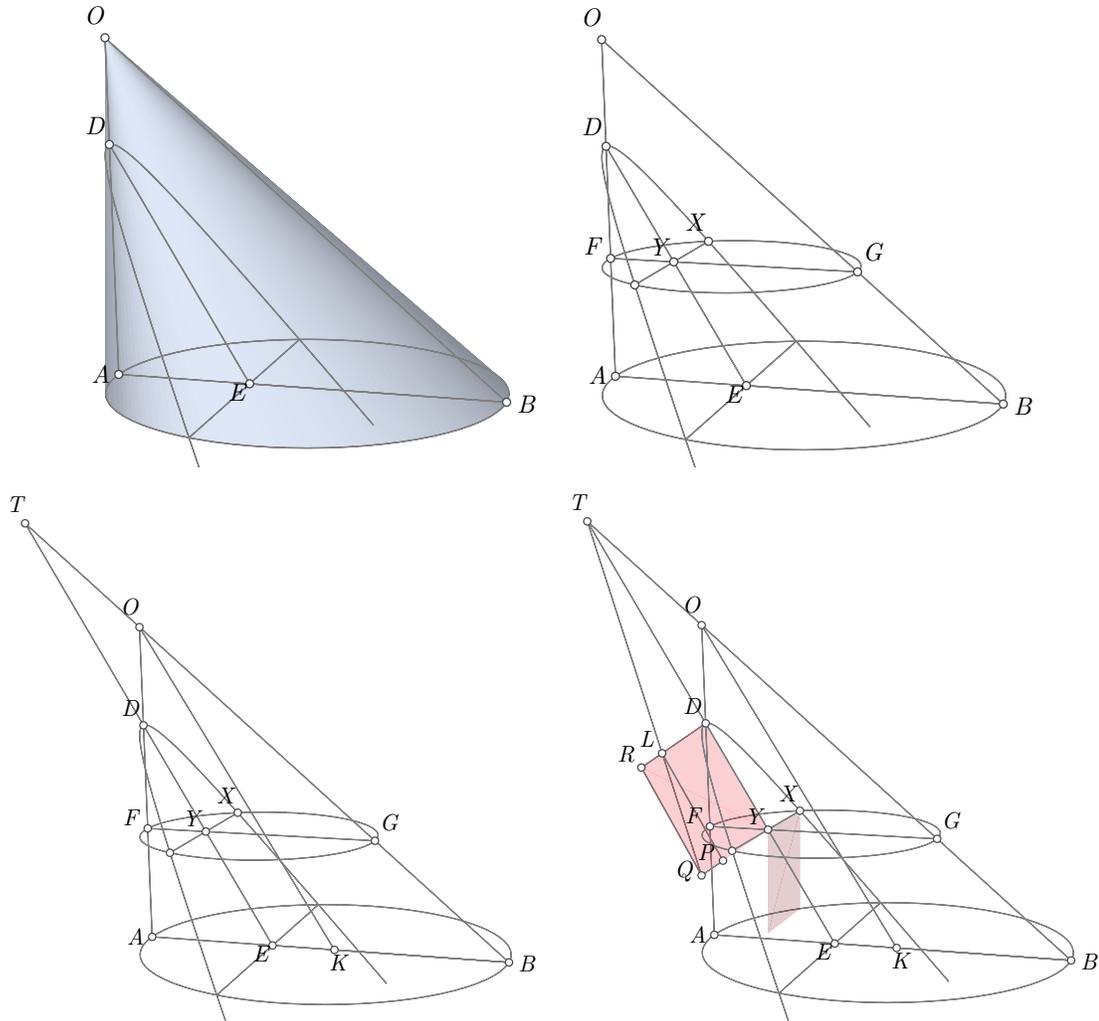


Para los antiguos griegos esto era necesario pues sólo podían interpretar la multiplicación de segmentos como rectángulos. Hoy en día este detalle, aunque resulte visualmente atractivo, nos parece innecesario porque aceptamos (sin cuestionarla mucho) la idea de que todo segmento tiene una longitud que se expresa como un número real. Pero en la antigua Grecia tal cosa no era posible pues, por un lado, sólo concebían los números fraccionarios (rationales) y, por otro, sabían que no siempre era posible asignar longitudes fraccionarias simultáneamente a dos segmentos, como por ejemplo, al lado y a la diagonal de un cuadrado (ver ??).

## La hipérbola

Consideremos un cono circular oblicuo con vértice  $O$  cuya base es una circunferencia. Sea  $AB$  un diámetro de la circunferencia. Cortemos el cono con un plano perpendicular a  $OAB$ . Sean  $D$  y  $E$

los puntos de intersección de ese plano con  $OA$  y  $AB$ , respectivamente. Supondremos que  $DE$  tiene mayor inclinación que  $OB$ , que es el caso en que el corte que produce a una hipérbola.



Consideremos un plano cualquiera que sea paralelo a la base del cono y cuya intersección con  $ED$  es el punto  $Y$ . Sean  $F$  y  $G$  las intersecciones de  $OA$  y  $OB$  con ese plano, respectivamente. Sea  $X$  la intersección del cono con de la perpendicular a  $FG$ , en ese plano, que pasa por  $Y$ . Sea  $T$  la intersección de  $DE$  con  $OB$  y sea  $K$  en  $AB$  tal que  $OK$  es paralela a  $DE$ . Sabemos que  $YX^2 = FY \cdot YG$ . Por semejanza de triángulos:  $\frac{FY}{DY} = \frac{AK}{OK}$  y  $\frac{YG}{YT} = \frac{KB}{OK}$ . Por tanto  $YX^2 = DY \cdot YT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2}$ . Si definimos  $DL = DT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2}$ , podemos escribir  $YX^2 = DY \cdot DL \cdot \frac{YT}{DT}$ . Como  $YT = DT + DY$ , esto nos da

$$YX^2 = DY \cdot \frac{DT + DY}{DT} \cdot DL = \left(DY + \frac{DY^2}{DT}\right) \cdot DL$$

Sustituyendo  $YX$  por  $x$  y  $DY$  por  $y$ , esta igualdad se puede escribir

$$x^2 = \left(y + \frac{y^2}{DT}\right) \cdot DL$$

que es la ecuación de una hipérbola en coordenadas oblicuas.

Apolonio en su demostración construye un rectángulo sobre  $DY$  cuyos lados son  $DY$  y  $DL = DT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2}$ . Sea  $P$  la intersección de  $TL$  con la paralela a  $DL$  por  $Y$  y sea  $R$  la intersección de  $DL$  con la paralela a  $PL$  por  $Q$ . Lo anteriormente demostrado nos dice que  $YX^2 = DR \cdot DY$ . Apolonio llamó “hipérbola.” a esta curva porque en este caso  $DR > DL$  (*hiper* sugiere que algo sobra, concretamente a  $DR$  le sobra algo respecto a  $DL$ ).

Apolonio dio mucha importancia a este hecho, quizás porque para los griegos la multiplicación de dos segmentos sólo se podía entender como (el área de) un rectángulo. Así pues, Apolonio describe la hipérbola con la igualdad de (las áreas de) un rectángulo y un cuadrado.

## La elipse

A la curva que se obtiene cuando se corta un cono circular con un plano que sólo toca a uno de los mantos del cono Apolonio la llamó elipse. El tratamiento que hace Apolonio de la elipse y casi idéntico al de la hipérbola, salvo por un signo.

Consideremos un cono circular oblicuo con vértice  $O$  cuya base es una circunferencia. Sea  $AB$  un diámetro de la circunferencia. Cortemos el cono con el plano perpendicular a  $OAB$  que pasa por  $DE$ . Supondremos que  $DE$  tiene menor inclinación que  $OB$ , que es el caso en que el corte que produce a una elipse.

Consideremos un plano cualquiera que sea paralelo a la base del cono y cuya intersección con  $ED$  es el punto  $Y$ . Sean  $F$  y  $G$  las intersecciones de  $OA$  y  $OB$  con ese plano, respectivamente. Sea  $X$  la intersección del cono con de la perpendicular a  $FG$ , en ese plano, que pasa por  $Y$ . Sea  $T$  la intersección de  $DE$  con  $OB$  y sea  $K$  en  $AB$  tal que  $OK$  es paralela a  $DE$ . Sabemos que  $YX^2 = FY \cdot YG$ . Por semejanza de triángulos:  $\frac{FY}{DY} = \frac{AK}{OK}$  y  $\frac{YG}{YT} = \frac{KB}{OK}$ . Por tanto  $YX^2 = DY \cdot YT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2}$ . Si definimos  $DL = DT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2} \cdot DL$ , podemos escribir  $YX^2 = DY \cdot \frac{YT}{DT}$ . Como  $YT = DT - DY$ , esto nos da

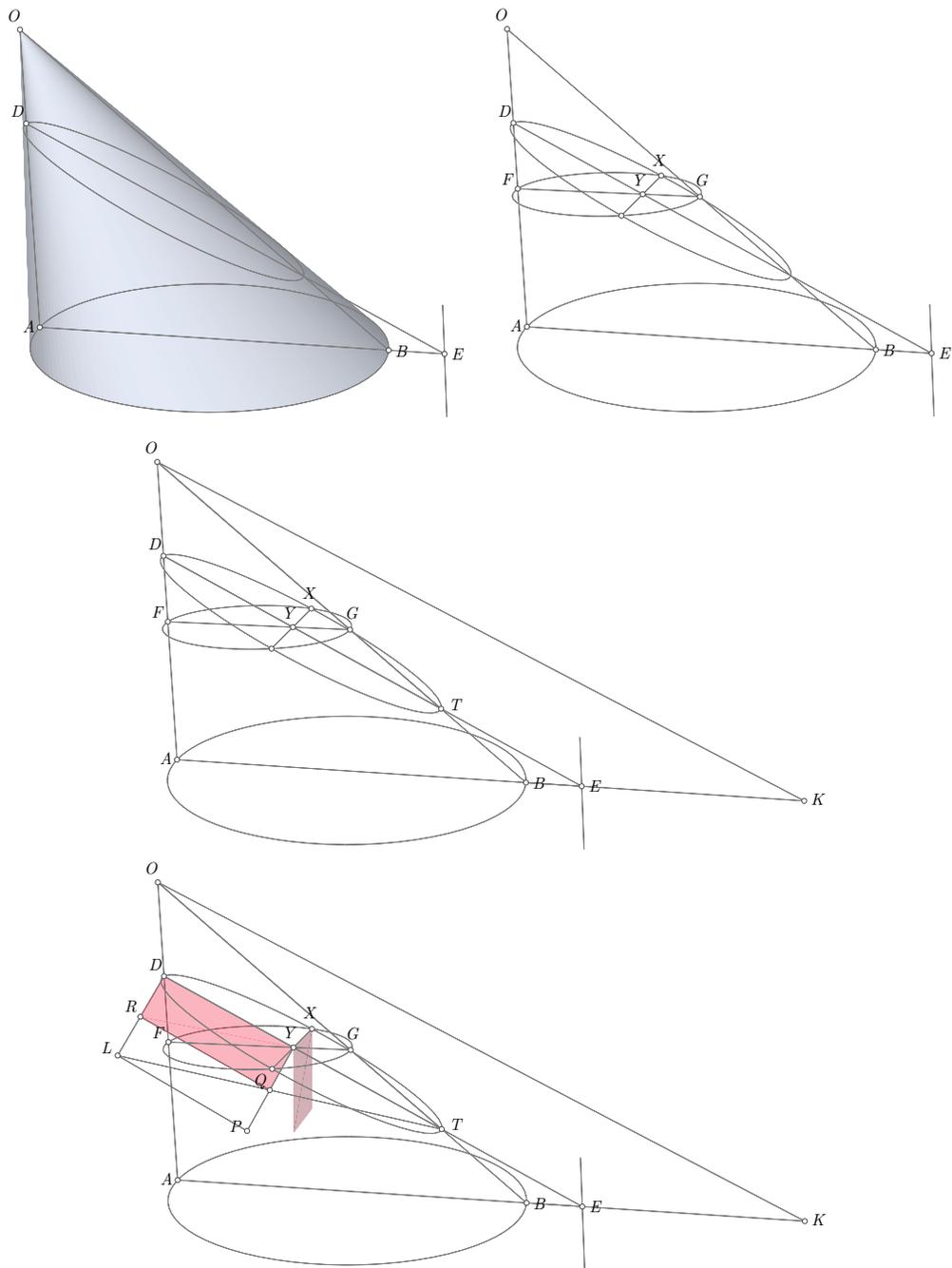
$$YX^2 = DY \cdot \frac{DT - DY}{DT} \cdot DL = \left(DY - \frac{DY^2}{DT}\right) \cdot DL$$

Sustituyendo  $YX$  por  $x$  y  $DY$  por  $y$ , esta igualdad se puede escribir

$$x^2 = \left(y - \frac{y^2}{DT}\right) \cdot DL$$

que es la ecuación de una elipse en coordenadas oblicuas.

Igual que en el caso de la hipérbola, Apolonio construye un rectángulo sobre  $DY$  cuyos lados son  $DY$  y  $DL = DT \cdot AK \cdot \frac{KB}{OK^2}$ .



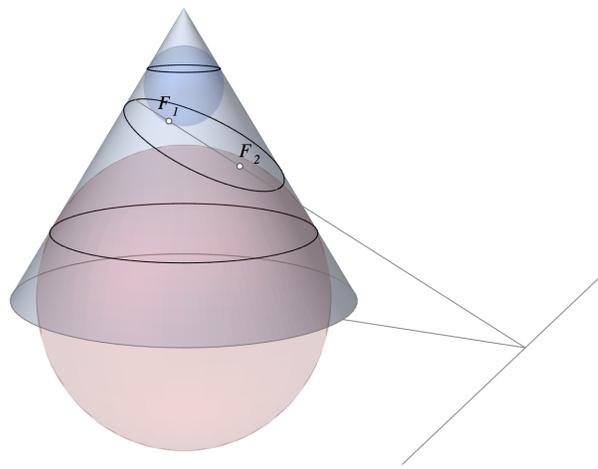
Sea  $P$  La intersección de  $TL$  con la paralela a  $DL$  por  $Y$  y sea  $R$  la intersección de  $DL$  con la paralela a  $PL$  por  $Q$ . Lo anteriormente demostrado nos dice que  $YX^2 = DR \cdot DY$ . Apolonio llamó “elipse” a esta curva porque en este caso  $DR < DL$  (a  $DR$  le falta algo para llegar a  $DL$ ).

Los resultados de Apolonio hablan esencialmente de *ecuaciones* que las secciones cónicas satisfacen. aunque ni el concepto ni el término de *ecuación* no se conocían en aquella época. Para los antiguos griegos, los resultados de Apolonio, definían relaciones geométricas entre algunos elementos de estas curvas, que a la postre, en el siglo XVII acabaron identificándose como ecuaciones. Además de este trabajo, Apolonio realiza un estudio detallado de otras propiedades de las secciones cónicas, en particular deduce sus propiedades de reflexión.

### Las esferas de Dandelin

Las esferas de Dandelin, inventadas 2000 años después del trabajo de Apolonio por el matemático francés GERMINAL PIERRE DANDELIN (1794-1847), muestran de manera gráfica y clara que, en el caso de los *conos circulares rectos*, es decir, aquellos cuyo eje es perpendicular a la base, la elipse tiene la propiedad de que la suma de las distancias de sus puntos a dos puntos llamados focos es constante y también de que la diferencia de las distancias de los puntos de una hipérbola a sus focos es constante.

Las *esferas de Dandelin* se definen para un plano que corta a un cono circular recto como aquellas que son tangentes tanto al cono como al plano. En los casos en que el corte producido por el plano en el cono es una elipse o una hipérbola, hay dos de estas esferas y sus puntos de tangencia con el cono son los focos de la sección cónica correspondiente. En el caso de la parábola hay una sola esfera de Dandelin y su punto de tangencia con el plano es el foco de la parábola.



La demostración es muy sencilla. En el caso de la elipse que se ilustra en la figura, desde cualquier punto de la curva, la suma de las distancias a los puntos  $F_1$  y  $F_2$  es igual a la distancia entre los círculos de tangencia de las esferas con el cono, o sea que es constante. En el caso de la hipérbola la distancia entre los círculos de tangencia es la diferencia entre las distancias a  $F_1$  y  $F_2$ .

A veces se dice que el método de las esferas de Dandelin sustituye al trabajo de Apolonio, pero esto no es cierto. Las esferas de Dandelin sólo funcionan en el caso de conos circulares *rectos*, mientras que el trabajo de Apolonio aplica a los cortes de planos para todos los conos circulares, sean o no rectos.

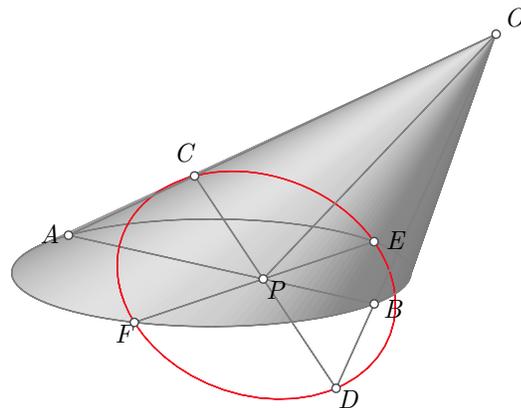
### 2.5.1. Polos y polares

Definimos la recta polar de un punto  $P$  dentro respecto a un círculo como la perpendicular al armónico conjugado de  $Q$  de  $P$  respecto al diámetro del círculo que pasa por  $P$ .

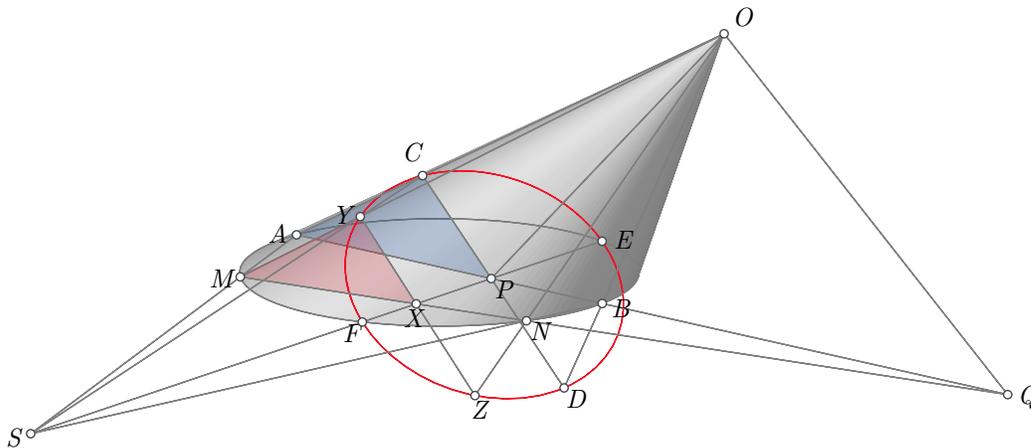
### 2.5.2. La perspectiva del círculo

Una de las cuestiones que llevó a los griegos a estudiar las curvas cónicas fue el deseo de comprender *la perspectiva del círculo*. ¿Qué es lo que el ojo ve cuando mira una circunferencia? A menos que la mire desde un punto en la perpendicular al plano que la contiene y que pasa por el centro de ella, no verá un círculo sino un óvalo. ¿Este óvalo es realmente una elipse? ¿Qué entendemos por elipse? La definición tradicional es que una elipse es la curva que se forma cuando un plano corta a un cono formando una curva acotada. Sin embargo esta definición no nos aporta una información vital: ¿qué simetrías tiene esta curva? El siguiente desarrollo nos lo aclara.

Consideremos un cono circular oblicuo. Sin pérdida de generalidad supondremos que su base es una circunferencia horizontal y su vértice un punto  $O$  que no está ni en la perpendicular al centro de la base ni en el plano que la contiene. Sean  $A$  y  $B$  las intersecciones de la circunferencia base del cono con el plano perpendicular a ella y que pasa por el vértice  $O$  y por el centro de la base. Sea  $P$  el punto de intersección de la bisectriz de  $AOB$  con  $AB$ . Sean  $F$  y  $E$  los puntos de intersección del plano ortogonal a  $OP$  por  $P$  con la base del cono. Y sean  $C$  y  $D$  las intersecciones de ese mismo plano con  $OA$  y  $OB$ , respectivamente. La curva  $CFDE$  es lo que el ojo ve al mirar la circunferencia desde  $O$ . Veremos que  $CFDE$  es una elipse.



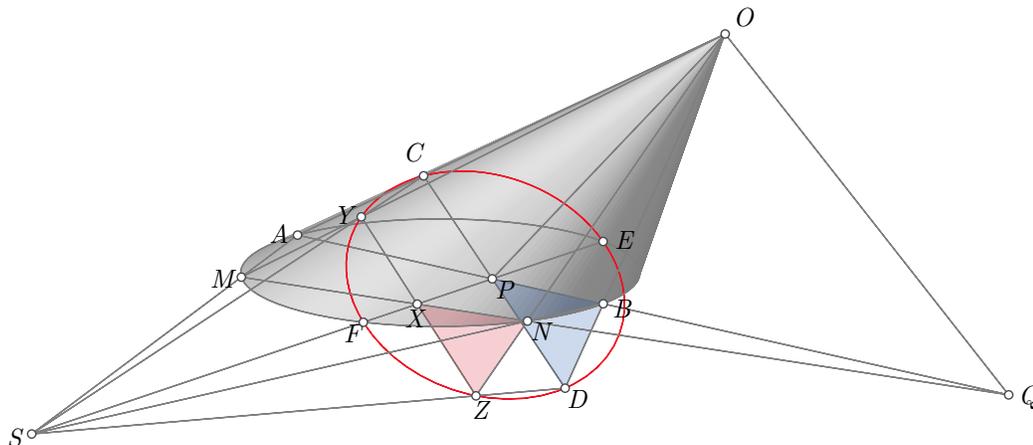
Sea  $Q$  el punto de intersección de  $AB$  con la paralela a  $CD$  por  $O$ . Sea  $X$  un punto de  $EF$  y sean  $M$  y  $N$  las intersecciones de  $QX$  con la base del cono.



Sean  $Y$  y  $Z$  las intersecciones del plano  $PCF$  con  $OM$  y  $ON$ , respectivamente. Observemos que

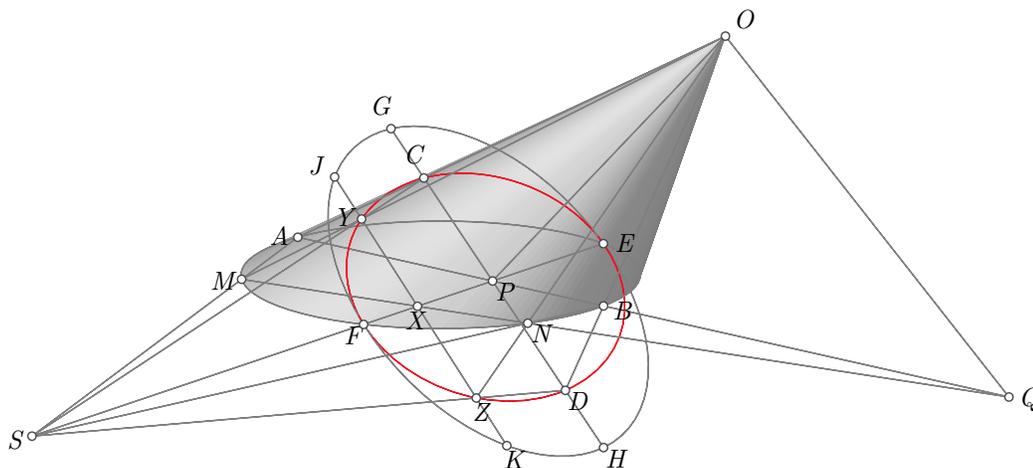
$YZ$  es paralela a  $CD$ . Vamos a demostrar que  $XY = XZ$ , y por lo tanto  $OEF$  es un plano de simetría de nuestro cono oblicuo.

$EF$  es la polar (ver Sección ??) de  $Q$  respecto a la base del cono. Por tanto  $AM$  y  $BN$  intersectan a  $EF$  en un mismo punto  $S$ . Los triángulos  $MXY$  y  $APC$  están en perspectiva axial porque  $AC$  y  $MY$  se intersectan en  $O$ ,  $AP$  y  $MX$  en  $Q$  y  $PC$  y  $XY$  son paralelos. Por el inverso del Teorema de Desargues, también están en perspectiva polar y por tanto  $C$  y  $Y$  están alineados con  $S$ .



Análogamente,  $D$  y  $Z$  están alineados con  $S$  porque  $XNZ$  y  $PBD$  están en perspectiva axial. Como  $SPC$  y  $SPD$  son triángulos congruentes y  $YZ$  es paralelo a  $CD$ , también  $SXY$  y  $SXZ$  son congruentes y por tanto  $XY = XZ$ .

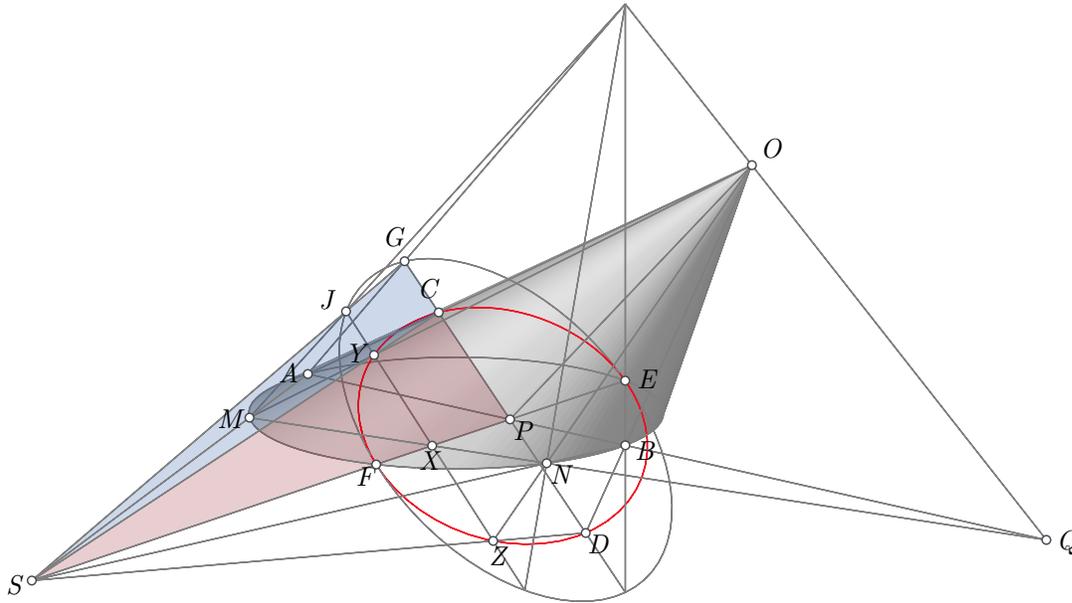
Ahora probaremos que la curva  $ECFD$  es una contracción de la circunferencia con centro en  $P$  y radio  $PF$ , que yace en el plano ortogonal a  $OP$ .



Sean  $G$  y  $H$  las intersecciones de  $PC$  con la nueva circunferencia. Sean  $J$  y  $K$  las intersecciones de

$XY$  con esa misma circunferencia. Sea  $R$  el vértice del cono que contiene a las dos circunferencias: la base del cono y  $EGF$ .  $R$  es la intersección de  $AG$  con  $HB$  y está alineado con  $O$  y  $Q$ .

De hecho  $OQ$  es la polar de  $EF$  respecto a la esfera que contiene a las dos circunferencias. Por tanto,  $MXH$  y  $APG$  están en perspectiva axial y polar. En particular, los puntos  $S$ ,  $H$  y  $G$  están alineados.



Como  $SXY$  y  $SPC$  son triángulos semejante y también lo son  $SXJ$  y  $SPG$ , resulta que  $\frac{XY}{XJ} = \frac{PC}{PG}$ . Esto demuestra que la curva  $ECFD$  es una contracción de la circunferencia  $EGFH$  en la dirección  $PC$ , por el factor  $\frac{PC}{PG}$ . Esto es lo que coincide con nuestra intuición de lo que debe ser una elipse: la contracción de una circunferencia.



## Capítulo 3

# Geometría y Medición

## Estrategias para cuantificar el espacio

La mayor parte de las aplicaciones de la geometría a la vida productiva se realizan al intentar calcular tamaños, distancias, áreas o volúmenes de objetos del mundo material cuya forma puede describirse en términos de figuras geométricas. En estos casos resulta imprescindible poder asignarles valores numéricos. De esto se ocupa la geometría cuando se combina con la *medición*.

En este capítulo exploramos la relación entre la geometría clásica y la necesidad de medir cosas que se pueden identificar con algunas partes de figuras geométricas. Primero se investigan las relaciones entre los conceptos geométricos de longitud, área y volumen con sus medidas numéricas y más adelante se presentan algunos casos de cálculos específico junto con los métodos que para realizarlos se han desarrollado a través de los siglos.

Cuando las nociones de medida se intentan aplicar a figuras geométricas formadas por curvas que no están acotadas por líneas rectas, o por cuerpos que no están acotados por superficies planas, la medición comienza a necesitar de procesos infinitos. Los esfuerzos de Eudoxo de Cnido (390 - 337 aec) y Arquímedes de Siracusa (287 - 212 aec) en esta dirección representan los primeros avances en lo que dos milenios más tarde, culminaría con la creación del *cálculo*, gracias al trabajo de matemáticos de los siglos XVII y XVIII como Isaac Newton (1643 - 1727), Gottfried Leibniz (1646 - 1716), Jakob Bernoulli (1654 - 1705), Johann Bernoulli (1667 - 1748) y Leonhard Euler (1707 - 1783).

### 3.1. El uso de los números para cuantificar la realidad

Las necesidades del comercio, el cobro de impuestos, la construcción y muchas otras actividades que realizaban los miembros de las diversas culturas de la antigüedad requirieron no sólo la creación de los números sino también formas de cuantificar, asignando valores numéricos, a ciertos aspectos de la realidad como tamaño, peso, duración, sin lo cual su utilidad era escasa. Este tipo de actividad ha sido probablemente la mayor fuente de conceptos e ideas matemáticas desde la antigüedad hasta

nuestros días. Esta fue, sin duda, una de las primeras actividades humanas que requirió la aplicación de un pensamiento matemático avanzado.

Los registros que tenemos en tabletas y papiros muestran un interés en realizar cálculos que permitieran asignar valores numéricos a ciertas *abstracciones de utilidad práctica*. En particular exhiben el conocimiento de algunos procedimientos y fórmulas para calcular *áreas* y *volúmenes*, a veces de manera exacta y a veces sólo aproximada. Por ejemplo, hay en ellas estimaciones de lo que hoy llamamos *el número  $\pi$* , que eran útiles en fórmulas o procedimientos que se usaban para calcular *áreas* de terrenos y *volúmenes* de pirámides y contenedores. No hay evidencias de que se hubiera llegado a esas estimaciones, fórmulas y procedimientos mediante razonamientos deductivos, lo cual apunta a un pensamiento matemático muy primitivo. Esta actividad matemática surge en la antigüedad como una *tecnología* asociada a la cuantificación, es decir, a la asignación de valores numéricos a ciertas abstracciones de interés práctico. Los métodos de cálculo se desarrollan para obtener unos valores a partir de otros aprovechando las propiedades de los números y sus operaciones, las cuales aparecen como algo natural en esos contextos. La notación numérica tan distinta en las diversas culturas atestigua que estamos ante desarrollos independientes que obedecieron a necesidades prácticas similares y dieron lugar a sistemas equivalentes para denotar a los números y realizar operaciones con ellos. Podríamos decir que se trata de una concepción de las matemáticas como una tecnología para cuantificar abstracciones de utilidad práctica. Aún no aparece, al menos de manera explícita, la deducción.

Con el tiempo, esta actividad se fue haciendo cada vez más racional, justificando de manera rigurosa cada fórmula y procedimiento que se inventaba, de manera que acabó integrándose por completo a la actividad matemática deductiva inaugurada por los antiguos griegos con la geometría, aunque sigue dando mayor importancia a la utilidad práctica que al aspecto teórico.

## Los métodos de cálculo de los babilonios y los egipcios

Hemos visto que los antiguos babilonios y egipcios ya tenían sorprendentes conocimientos prácticos de matemáticas y que incluso habían desarrollado formas de enseñarlos a través de la escritura en tabletas de barro y papiros, respectivamente. Tales conocimientos se transmitían a través de ejemplos concretos, algunos de los cuales ya se describieron en la Sección 1.1. El siguiente ejemplo, que aparece en una de las tabletas babilonias, ilustra la capacidad que tenían para describir algoritmos de cálculo y realizar operaciones con su extraordinaria notación numérica. El ejemplo enseña cómo calcular la *longitud* de uno de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa y el otro cateto se conocen. Se trata de una viga que primero se apoya verticalmente en un muro y luego su parte inferior es separada de la pared, de manera que la superior descende una cierta distancia. Para reconocer el significado del contenido de la tableta hay que recordar que los babilonios usaban el sistema sexagesimal y que en su notación  $a; b, c$  representa al número  $a + b\frac{1}{60} + c\frac{1}{60^2}$ . El ejemplo se ve así:

Una viga 0;30	tiene la longitud $30 \frac{1}{60} = \frac{1}{2}$
De arriba bajó 0;6	eso equivale a $6 \frac{1}{60}$
Abajo, cuánto se alejó?	
0;30 elévalo al cuadrado, 0;15 lo ves	$(30 \frac{1}{60})^2 = 900 \frac{1}{60^2} = \frac{15}{60}$
0;6 de 0;30 réstalo, 0;24 lo ves	$30 \frac{1}{60} - 6 \frac{1}{60} = 24 \frac{1}{60}$
0;24 elévalo al cuadrado, 0;9,36 lo ves	$(24 \frac{1}{60})^2 = \frac{576}{3600} = 9 \frac{1}{60} + 36 \frac{1}{60^2}$
0;9;36 de 0;15 réstalo, 0;5,24 lo ves	$15 \frac{1}{60} - (9 \frac{1}{60} + 36 \frac{1}{60^2}) = 5 \frac{1}{60} + 24 \frac{1}{60^2}$
0;5,24 tiene qué como raíz? 0;18 lo es	$(18 \frac{1}{60})^2 = 324 \frac{1}{60^2} = 5 \frac{1}{60} + 24 \frac{1}{60^2}$
0;18 se alejó.	

En las fuentes antiguas, como las tablillas de arcilla que se encontraron en Babilonia, no hay ningún indicio de una *justificación* lógica de por qué esta serie de instrucciones funciona *siempre*, es decir aún si se toman otros números de los que se dan en el ejemplo.

Es interesante ver que en las fuentes egipcias y babilonias se encontraron dos métodos diferentes de calcular el volumen de un *tronco*, es decir una pirámide cuadrada a la cual se le quitó la punta con un corte paralelo a la base.

Si se traducen estos dos métodos a nuestro lenguaje algebraico, resultan las siguientes dos fórmulas:

$$V = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)h \quad \text{Babilona (ca. 1900 a.e.c.)}$$

$$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h \quad \text{Egipto (ca. 1850 a.e.c.)}$$

En ambas  $a$  y  $b$  son los lados de las dos bases y  $h$  es la altura. Está claro que las fórmulas no pueden ser ambas correctas.

**Ejercicio.** Sugerimos al lector determinar rigurosamente si alguna de las dos fórmulas es correcta; en qué casos, si los hay, alguna de ellas puede ser correcta y, si alguna no es correcta, encontrar qué tan buenas o malas aproximaciones produce. Este ejercicio le ayudará a apreciar el nivel matemático de la cultura egipcia.

Como veremos en este capítulo, cuantificar conceptos como longitud, área, volumen, peso y tiempo, es decir aquello que no es *discreto*, sino *continuo*, no fue fácil. Una de las razones por las que se encontraron dificultades para lograrlo es que la humanidad no tenía, en lenguaje natural, una noción suficientemente amplia de *número*. Carecía de lo que hoy llamamos *números reales*, que son los que se necesitan para cuantificar lo que es continuo. En cierto sentido, este capítulo es una historia del desarrollo paralelo de las ideas del *continuo* y de los *números reales*.

Recordemos que la cultura clásica griega, que es de la que parten estas ideas, encontró muy temprano en su historia que había longitudes inconmensurables, es decir, que los números fraccionarios, que son los que habían llegado a manejar las civilizaciones más antiguas como la babilonia y la egipcia, eran insuficientes para cuantificar lo continuo. La respuesta inicial ante este problema, como veremos en las primeras secciones del capítulo, fue desarrollar los conceptos de manera geométrica, evitando tanto como era posible su cuantificación. De hecho, *Los elementos* de Euclides logran una presentación muy completa de los conceptos de longitud, área y volumen sin asignarles valores numéricos.

## 3.2. Longitud, área y volumen

### Introducción

El volumen de un cuerpo depende de su tamaño y de su forma. Por ejemplo, un cubo tiene mayor volumen que una esfera cuyo diámetro es igual al lado del cubo. Esto lo sabemos porque la esfera cabe dentro del cubo y no lo llena. Tenemos una idea intuitiva de lo que llamamos *volumen* y sabemos que, independientemente de cómo lo midamos, debe tener ciertas propiedades. Concretamente:

- (a) Si un cuerpo  $A$  cabe en otro cuerpo  $B$ , el volumen de  $A$  es menor que el de  $B$ .
- (b) Si  $A$  y  $B$  son cuerpos ajenos, el volumen de la unión de  $A$  y  $B$  es la suma de los volúmenes de  $A$  y  $B$ .

Al hacer estas afirmaciones suponemos inconscientemente que el volumen de un cuerpo es un número. (a) dice que uno de esos números es menor que otro y (b) habla de sumar dos de esos números.

Lo mismo que con el volumen ocurre con las longitudes de segmentos y las áreas de figuras planas.

Sin embargo Euclides, en su libro *Los elementos*, hace un tratado muy completo de longitudes, áreas y volúmenes sin asignar valores numéricos a tales conceptos. De hecho ni siquiera introduce palabras equivalentes a longitud, área y volumen.

¿Cómo es eso posible?

Simplemente crea un concepto de igualdad diciendo que dos segmentos son *iguales* si se pueden superponer exactamente, es decir, si uno de ellos se puede mover rígidamente (mediante traslaciones y giros) hasta superponerlo exactamente sobre el otro (en el lenguaje moderno: si son congruentes).

En el caso de las figuras planas dice que dos de ellas son iguales si una se puede cortar en partes que puedan acomodarse, mediante movimientos rígidos (sin deformarlas), hasta cubrir exactamente la otra.

La educación matemática actual tiene una fuerte tendencia a tratar los conceptos de longitud, área y volumen en términos estrictamente numéricos, lo cual propicia un ocultamiento de algunos aspectos geométricos muy profundos de estos conceptos y redundante en una presentación superficial del tema.

Usemos el Teorema de Pitágoras para ejemplificar este hecho. El teorema de Pitágoras dice, según Euclides, que

***En un triángulo rectángulo  
los cuadrados contruidos sobre los catetos  
son iguales al cuadrado construido sobre la hipotenusa***

En este enunciado los *cuadrados* son figuras geométricas. Lo que quiere decir es que hay una manera de cortar esos dos *cuadrados* cuyos lados son los catetos y acomodar las partes de manera que cubran exactamente el *cuadrado* cuyo lado es la hipotenusa. El enunciado habla de figuras geométricas y de operaciones geométricas consistentes en cortes y movimientos rígidos de los pedazos. En ningún momento habla de números asignados a esos cuadrados ni de sumarlos para compararlos con el

número asignado al otro.

En cambio, el enunciado que se usa en general en la educación matemática actual es:

***En un triángulo rectángulo,  
la suma de los cuadrados de los catetos  
es igual al cuadrado de la hipotenusa***

Los *cuadrados* que se mencionan en este enunciado son *números* que se obtienen al elevar al cuadrado otros números (multiplicándolos por sí mismos) que son las longitudes de los catetos. Y la *suma* se entiende como una operación aritmética, suma de números, y no como una operación geométrica.

Sin duda la creación de la Geometría Analítica y en general la aritmetización de la geometría fue un gran logro de la humanidad. Pero al reemplazar la enseñanza de la geometría clásica con su forma aritmetizada se ha perdido profundidad, se han empobrecido los conceptos y ha quedado un estudio que privilegia el cálculo por encima de la comprensión conceptual.

Es perfectamente posible desarrollar los conceptos matemáticos de longitud, área y volumen sin necesidad de asignarles valores numéricos. Para ello es necesario tratarlos como propiedades de los objetos geométricos, que se relacionan unas con otras. Por ejemplo, se pueden comparar y agregar y, cuando uno de ellos está contenido en otro, se puede tomar su diferencia.

En las próximas secciones nos apartamos del tratamiento numérico con la intención de recuperar, al menos en espíritu, el enfoque euclidiano, y exhibir con claridad los aspectos geométricos de la medición. El tratamiento numérico irá apareciendo poco a poco, de manera parecida a como ocurrió históricamente.

### 3.2.1. Los conceptos de longitud, área y volumen

En el antiguo Egipto, se calculaba el volumen de pirámides y otros cuerpos geométricos, tanto para estimar la cantidad de grano que podían guardar en sus trojes, como la cantidad de material y tiempo que iba a requerir una construcción.

Desarrollaron el concepto de volumen como una generalización del de área, y dejaron claro que el volumen de un prisma es el producto de la superficie de la base por la altura. Esto no se limita a prismas rectos sino que aplica a los oblicuos. Este hecho es una generalización, en tres dimensiones, de la relación ya conocida entre en un paralelogramo y el rectángulo con la misma base y la misma altura.

Los egipcios supieron calcular el volumen de las pirámides, tomando la tercera parte del área de la base por la altura. Se desconoce si tenían argumentos racionales para deducir esta fórmula, pero la usaron incluso para calcular el volumen de pirámides truncadas.

Observaron la analogía entre

$$\text{Area} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

para el cálculo del área de un triángulo y

$$\text{Volumen} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

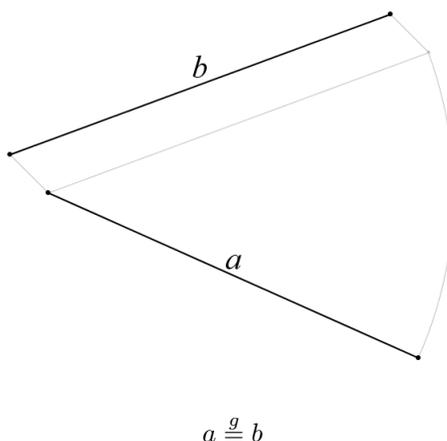
en el cálculo del volumen de una pirámide.

Como veremos más adelante, la primera demostración conocida de esta fórmula la dio Eudoxo de Cnido (390 - 337 aec). Pero para llegar a esto, conviene antes hacer una presentación conceptual de los conceptos de longitud, área y volumen que nos acerque al pensamiento griego de aquella época en relación a estos conceptos.

## Longitud de segmentos

Partiremos de las nociones de *segmento recto*, que llamaremos simplemente *segmento* y de *transformación rígida*, entendida como aquella que no cambia ni el tamaño ni la forma de las cosas. Cada segmento queda determinado por dos puntos que se denominan los extremos del segmento. Los segmentos pueden estar sobre una línea recta, en un plano o en el espacio. Un segmento determina una única línea recta, la que determinan los puntos extremos del segmento, según los dos primeros postulados de Euclides.

Decimos que *dos segmentos  $a$  y  $b$  tienen la misma longitud* si se puede aplicar una transformación rígida a uno de ellos de manera que lo superponga exactamente sobre el otro. Para ello basta que la transformación rígida lleve los dos extremos del primer segmento a los dos extremos del segundo. Cuando dos segmentos  $a$  y  $b$  tienen la misma longitud, podemos escribir  $a \stackrel{g}{=} b$ .<sup>1</sup>

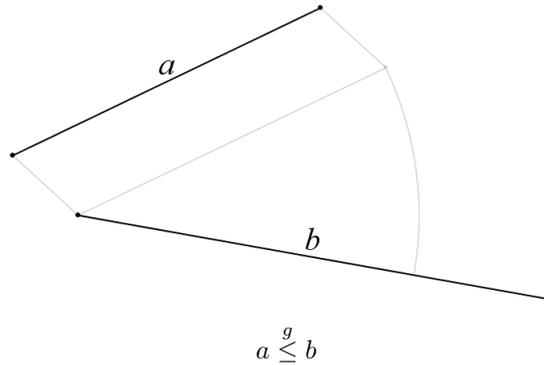


Es fácil demostrar que  $\stackrel{g}{=}$  es una *relación de equivalencia*, es decir, que:

- para todo segmento  $a$ ,  $a \stackrel{g}{=} a$
- si  $a$  y  $b$  son dos segmentos tales que  $a \stackrel{g}{=} b$  entonces  $b \stackrel{g}{=} a$
- si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres segmentos tales que  $a \stackrel{g}{=} b$  y  $b \stackrel{g}{=} c$ , entonces  $a \stackrel{g}{=} c$ .

También podemos comparar las longitudes de dos segmentos  $a$  y  $b$ . Decimos que la longitud de  $a$  es menor que la de  $b$  si es posible hallar una transformación rígida que lleve a  $a$  a estar contenido en  $b$  sin que los dos extremos de  $a$  coincidan con los de  $b$ . Cuando la longitud del segmento  $a$  es menor que la del segmento  $b$  podemos escribir  $a \stackrel{g}{\leq} b$

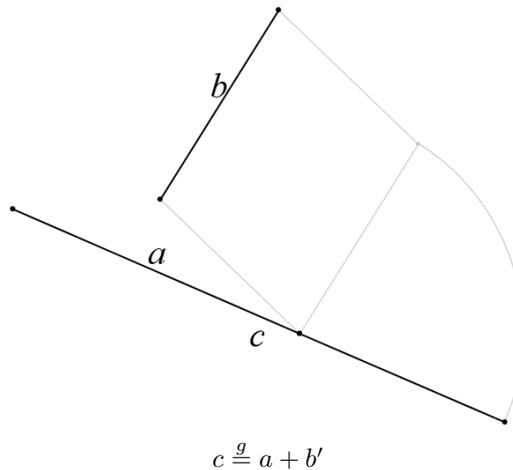
<sup>1</sup>La letra  $g$  sobre los signos de igualdad y desigualdad indicará en esta sección que no se trata de relaciones numéricas sino geométricas



Es fácil ver que  $\lesssim$  es una relación transitiva, es decir, que si  $a \lesssim b$  y  $b \lesssim c$  entonces  $a \lesssim c$ .

Bajo ciertas circunstancias dos segmentos se pueden sumar. Concretamente, si dos segmentos  $a$  y  $b$  se encuentran sobre una misma línea recta y son ajenos excepto por un extremo de  $a$  coincide con uno de  $b$ , entonces el segmento  $c$  determinado por los dos extremos libres (o sea los que no coinciden), se puede llamar *la suma* de  $a$  y  $b$ , y se puede escribir:  $a + b \stackrel{g}{=} c$ .

En general no es posible sumar segmentos. Sin embargo, si  $a$  y  $b$  son dos segmentos cualesquiera, se puede construir un segmento  $b'$  sobre la línea recta determinada por  $a$  tal que  $b' \stackrel{g}{=} b$  que tenga la misma longitud que  $b$  y quede en posición de poderse sumar con  $a$ . Tal construcción se puede hacer con regla y compás como se indica en la siguiente figura.



Podemos definir una “función” *Long* que asigne a cada segmento un ente abstracto que podemos llamar *longitud*, entendida no como un número sino como

*la clase de equivalencia de todos los segmentos  $a'$  tales que  $a' \stackrel{g}{=} a$*

Con esta definición queda claro que la longitud  $Long(a)$  de un segmento  $a$  **no es un número** pero podemos hablar de ella absoluta precisión, como veremos a continuación.

Todos los segmento que constan de un sólo punto, es decir, cuyos extremos coinciden, tiene la misma longitud. En efecto, uno de estos segmentos puede hacerse coincidir exactamente con cualquier otro

de ellos mediante una traslación. A estos segmentos los llamamos *segmentos nulos*. La longitud de los segmentos nulos es única y la consideramos como el *cero aditivo* de las longitudes.

Hemos establecido una manera de hablar de las longitudes de los segmentos sin necesidad de asignarles valores numéricos. Podemos comparar las longitudes de dos segmentos, saber si son iguales o si una es menor que la otra y hasta podemos sumar las longitudes de dos segmentos. Todo ello sin asignarles valores numéricos.

A continuación enunciamos las propiedades más importantes de la longitud de segmentos. Dejamos al lector los detalles de las demostraciones, algunas de las cuales utilizan propiedades de las transformaciones rígidas que aún no hemos especificado y que están íntimamente relacionadas con los axiomas referentes a la homogeneidad del espacio.

### Propiedades de la longitud de segmentos

Sean  $a, b, c, \dots$  segmentos cualesquiera.

**Simetría:** Si  $Long(a) = Long(b)$ , entonces  $Long(b) = Long(a)$ .

**Transitividad:** Si  $Long(a) = Long(b)$  y  $Long(b) = Long(c)$ , entonces  $Long(a) = Long(c)$ .

**Conmutabilidad:**  $Long(a) + Long(b) = Long(b) + Long(a)$ .

**Cero aditivo:** Si  $o$  es un segmento nulo (que es vacío o bien consta de un solo punto) entonces  $Long(a) + Long(o) = Long(a)$  para cualquier segmento  $a$ .

**Tricotomía:** Sucede una y sólo una de estas tres posibilidades:

- (1)  $Long(a) < Long(b)$
- (2)  $Long(b) < Long(a)$
- (3)  $Long(a) = Long(b)$ .

**Transitividad de la desigualdad:** Si  $Long(a) < Long(b)$  y  $Long(b) < Long(c)$ , entonces  $Long(a) < Long(c)$ .

**Propiedad arquimediana:** Dados dos segmentos  $a$  y  $b$  existe un entero  $n$  tal que  $Long(a) < nLong(b)$ .

### Notas

1) Podemos extender la definición de  $nLong(a)$  al caso  $n = 0$  definiendo  $0Long(a) = Long(o)$  donde  $o$  es cualquier segmento nulo.

2) Se puede definir la resta o diferencia  $Long(b) - Long(a)$  de longitudes, pero sólo en el caso en que  $Long(a) < Long(b)$ .

3) En *Los elementos*, Euclides hace esencialmente lo mismo que hemos hecho aquí, pero sin hablar de longitud, sino que dice que *dos segmentos son iguales* si uno se puede superponer sobre el otro. Euclides y sus contemporáneos no distinguieron entre el segmento y su longitud. Hablaban de ambas cosas como si fueran la misma. En nuestra presentación, en cambio, dos segmentos son iguales únicamente si ocupan el mismo sitio, es decir, si tienen los mismos extremos. Si no, pueden tener la misma longitud, pero no ser iguales.

Armados ya con el concepto abstracto, no numérico, de la longitud de un segmento, podremos desarrollar en las siguientes secciones los de área y volumen, y más adelante el de longitud de una curva.

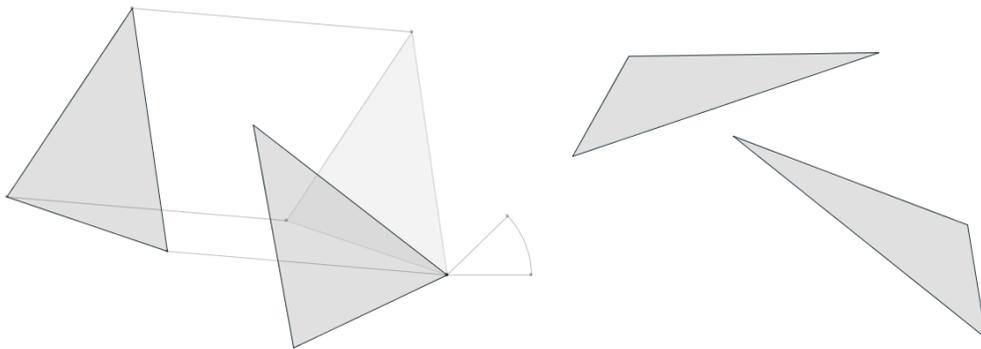
Es interesante observar que el concepto no numérico de longitud, que es esencialmente el que usa la geometría euclidiana y que hemos formalizado con la función  $Long$ , puede dar lugar al concepto numérico de longitud que se usa en la actualidad con sólo asumir la existencia de los números reales, como veremos en el siguiente párrafo.

Dado un segmento  $a$  podemos definir  $2Long(a)$  como  $Long(a + a')$  para un segmento  $a'$  tal que  $a' \cong a$  que se encuentre en posición de ser sumado con  $a$ , es decir, que sea ajeno con  $a$ , excepto por un extremo de cada uno de ellos. Podemos extender esta definición y dar significado a  $nLong(a)$  para cualquier entero positivo  $n$ . Igualmente se puede extender la definición a  $qLong(a)$  para cualquier número racional  $q = m/n$  y finalmente, por continuidad, a  $rLong(a)$  para cualquier número real  $r$ . Si se adopta un segmento cualquiera  $u$  como “unidad”, se puede demostrar, usando el axioma de Arquímedes, que para cada segmento  $a$ , existe un único número real  $r$  para el cual  $Long(a) = rLong(u)$ . Así es posible definir una función que asigne a cada segmento  $a$  el número real tal que  $Long(a) = rLong(u)$ . Ésta es la función que se usa en la actualidad para hablar de longitudes de segmentos. Lo que hemos intentado mostrar en esta sección es que es posible hablar de longitud sin usar números, y eso es esencialmente lo que hacían los antiguos griegos cuando hablaban de igualdad de segmentos. Lo mismo ocurriría cuando hablaban de igualdad de figuras y cuerpos, queriendo significar la igualdad de sus áreas o sus volúmenes, como veremos a continuación.

## Área de figuras planas

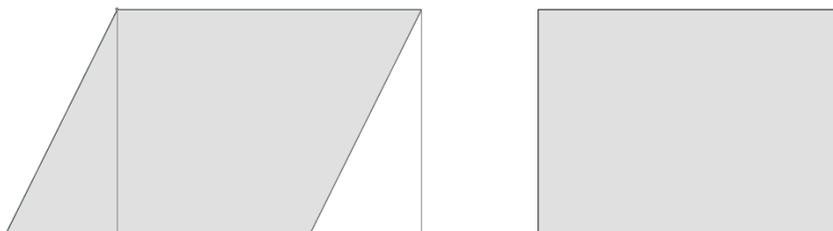
Decimos que dos figuras planas tienen la misma área si:

(a) podemos superponer exactamente una sobre la otra mediante traslaciones, rotaciones o reflexiones respecto a una recta.



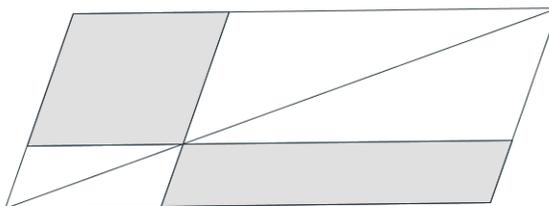
Ejemplos de triángulos con áreas iguales, según (a)

(b) podemos partir una de ellas y mover los pedazos hasta cubrir exactamente la otra



Ejemplo de dos paralelogramos con áreas iguales, según (b)

(c) podemos formarlas a partir de figuras con la misma área quitando de ellas partes que también tienen la misma área.



Ejemplo de dos paralelogramos con áreas iguales, según (c)

**Nota:** Las reflexiones de una figura plana respecto a un eje pueden considerarse rotaciones en el espacio tridimensional. Sin embargo cuando más adelante hablemos de cuerpos en el espacio, las reflexiones respecto a un plano no podrán considerarse rotaciones, a menos que éstas fueran en un espacio de 4 dimensiones. Por ello resulta más conveniente pensar en las reflexiones respecto a un eje como transformaciones en el plano que conservan el área.

**Nota:** Las traslaciones, rotaciones y reflexiones se llaman *transformaciones rígidas o de congruencia* y forman un grupo no conmutativo respecto a la operación de composición.

Si  $A$  y  $B$  tiene la misma área, según los criterios (a), (b) y (c), entonces escribimos:

$$A \stackrel{g}{=} B$$

El criterio (b) nos plantea un problema que es importante resolver de entrada. ¿Qué significa partir una figura? Tomemos el ejemplo de un triángulo que partimos mediante un corte recto que pasa por uno de sus vértices y por el punto medio del segmento opuesto. El segmento que determina el corte ¿en cual de las dos partes queda? ¿En una, en la otra, en ambas o en ninguna? Esta duda se relaciona también con la de si una figura polígona plana incluye o no su orilla. Lo primero que hay que aclarar es que estos problemas surgen porque pensamos en las figuras planas como subconjuntos del plano formados por puntos y, dada una figura, que concebimos como un conjunto de puntos, cada punto del plano debe estar en ella o en su complemento.

La comparación y la suma de áreas puede tratarse de manera análoga a como se hizo con las longitudes.

Decimos que el área de  $A$  es menor o igual que la de  $B$  si es posible hallar una partición de  $A$  tal que sus pedazos puedan meterse (mediante transformaciones de congruencia) dentro de  $B$ . Cuando

el área de  $A$  es menor o igual que la de  $B$  podemos escribir:

$$A \stackrel{g}{\leq} B$$

De momento nos limitaremos al estudio de figuras poligonales. La orilla o frontera de una figura poligonal es un polígono (segmentos “encadenados”) cerrado.

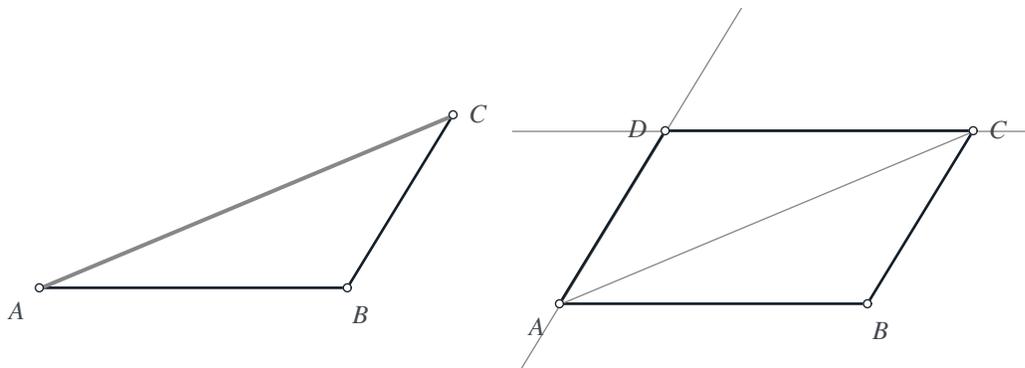
De la misma manera en que se hizo en la sección anterior para la función *Long* aplicada a segmentos, en esta sección podemos definir la función *Area*( $A$ ) para una figura poligonal como la *clase de equivalencia* de todas las figuras poligonales  $A'$  tales que  $A' \stackrel{g}{=} A$ . Así, si  $A$  y  $B$  son dos figuras planas ajenas, la figura  $C$  que consta de ambas tiene área igual a la suma de las áreas de  $A$  y  $B$ . Es decir:

$$Area(A) + Area(B) = Area(C)$$

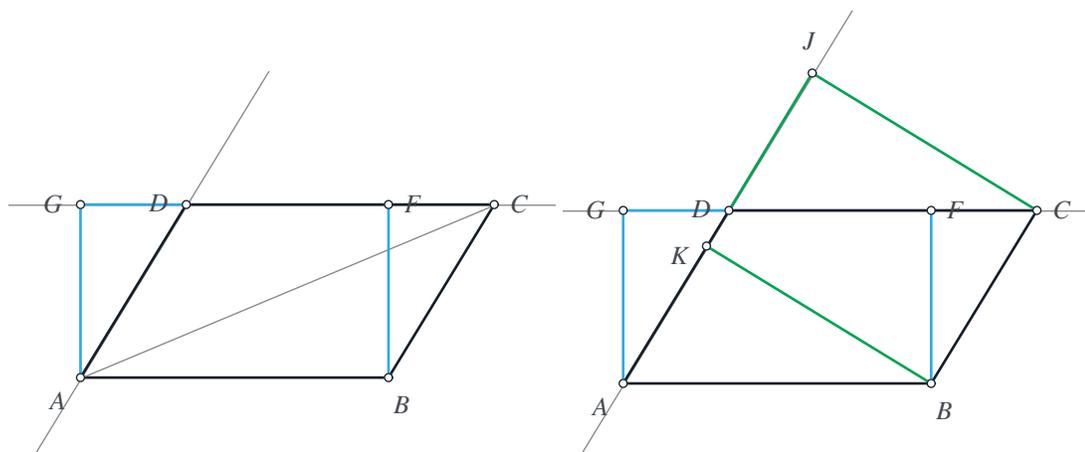
**Nota:** Igual que con los segmentos, es posible definir para las figuras poligonales una función numérica si se asume la existencia de los números reales y se adopta alguna figura poligonal como “la unidad”. En el caso de las áreas es costumbre usar como unidad un cuadrado cuyo lado es congruente con la unidad adoptada para medir longitudes.

### Área del triángulo

¿Cuál es el área del triángulo  $ABC$ ? Podemos decir que es “la mitad” de la del paralelogramo  $ABCD$ . ¿Pero cuál es el área del paralelogramo  $ABCD$ ?



Si  $F$  es la intersección de  $CD$  con su perpendicular por  $B$ , decimos que el área del paralelogramo  $ABCD$  es  $AB \cdot BF$ . Lo justificamos porque si cortamos el rectángulo  $BCF$  y lo trasladamos a la posición  $ADG$ , como se indica en la figura, obtenemos un rectángulo de lados  $AB$  y  $BF$ , al cual asignamos  $AB \cdot BF$  como área, por definición.



Pero igualmente podemos construir el rectángulo  $BCJK$  y decir que el área del paralelogramo es  $BC \cdot BK$ . ¿Cuál es la buena? ¿Son iguales las áreas de  $ABFG$  y  $BCJK$ ? Los triángulos  $BCF$  y  $ABK$  son congruentes y esto implica que  $\frac{BF}{BC} = \frac{BK}{AB}$ , que es equivalente a  $AB \cdot BF = BC \cdot BK$ .<sup>2</sup>

Vemos que para tener una medida de área para triángulos y paralelogramos es necesario usar la ley de las proporciones de los triángulos semejantes. Pero también podríamos demostrar esta ley postulando la existencia de una medida del área de las figuras poligonales, la cual asigna como área a un rectángulo el producto de sus lados y asigna el mismo valor a dos figuras cuando una de ellas puede obtenerse de la otra cortando una parte y pegándola en otro sitio.

Esta situación, en la que podemos formular la teoría de áreas a partir de la semejanza de triángulos o la teoría de los triángulos semejantes a partir de la teoría de áreas, es típica de los modelos matemáticos de la física. Otro ejemplo, muy apreciado por los físicos, es la equivalencia de las formulaciones de la mecánica clásica a partir de las leyes de Newton o a partir de las leyes de conservación o a partir del principio de mínima acción.

## Áreas de polígonos

Todo rectángulo puede transformarse en un cuadrado mediante cortes y traslaciones sin superposición. Este hecho, que demostraremos en la siguiente escena, permite demostrar que toda figura

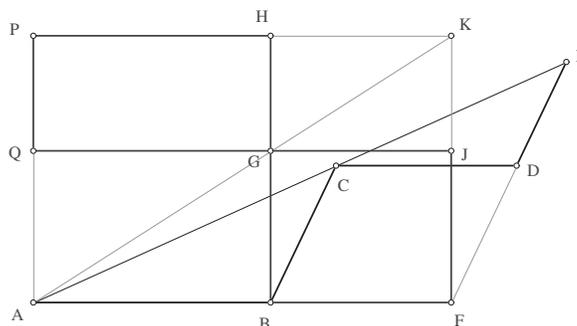
<sup>2</sup>

Recordemos la discusión presentada en la sección 1.2 relacionada con esta figura, en la que se exhibe la equivalencia entre la semejanza de triángulos y el concepto de área para rectángulos, lo cual ayuda a justificar la equivalencia de las igualdades:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BC}{DE}$$

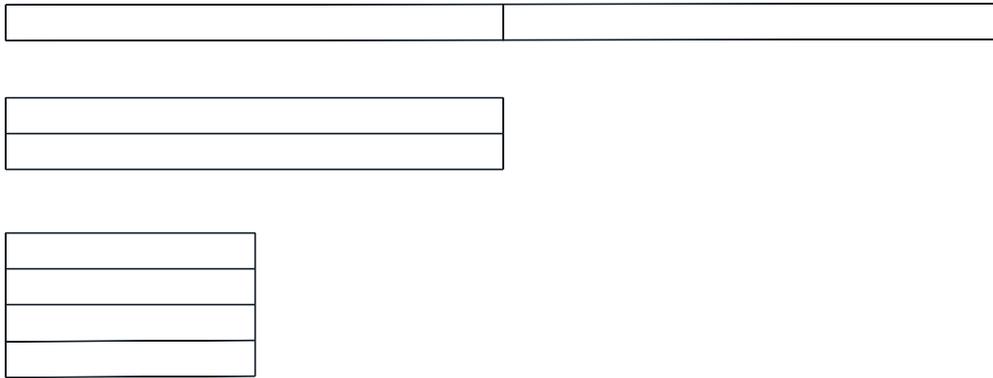
y

$$AB \cdot DE = BC \cdot CD$$

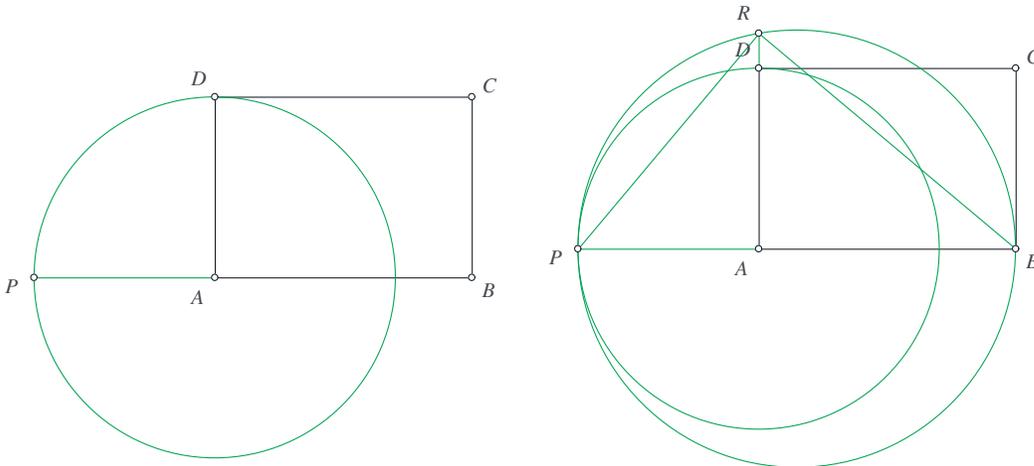


poligonal se puede transformar, mediante cortes y traslaciones sin superposición, en un cuadrado, con lo cual se le puede asignar como medida de su área la del cuadrado. Esto permite completar fácilmente la teoría de áreas de figuras poligonales planas.

La ilustración prueba este lema: Todo rectángulo se puede transformar, mediante cortes y traslaciones sin superposición, en otro cuyo lado más largo no sea mayor que el doble del otro. Si un rectángulo, como el de la figura, tiene un lado más largo que el doble del otro, podemos partirlo a la mitad por su lado más largo, tantas veces como sea necesario hasta llegar a uno en el que el lado más largo no sea mayor que el doble del otro. (En este paso se usa el axioma de Arquímedes o de continuidad.)

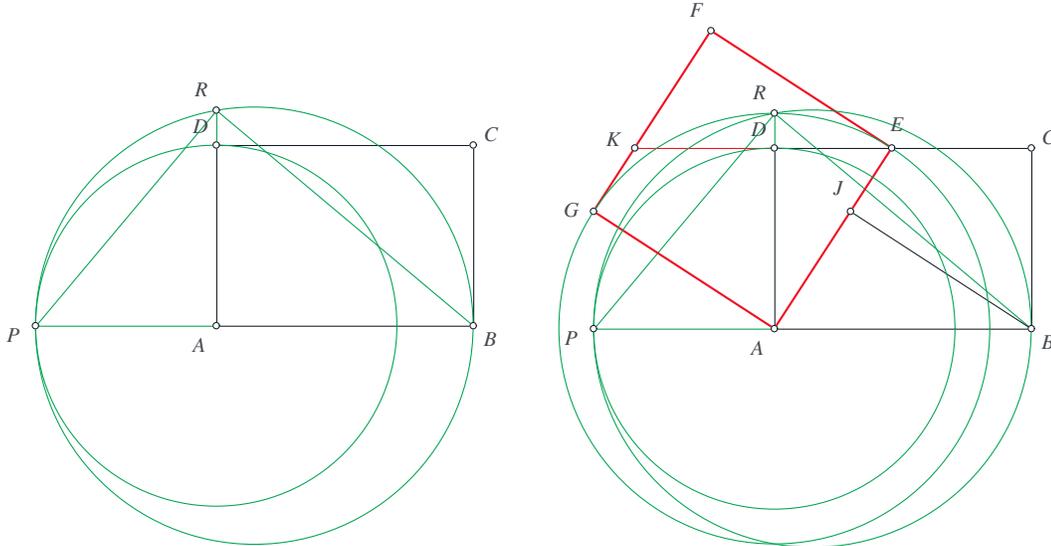


Pero con esta operación no podemos transformar un rectángulo arbitrario en un cuadrado. Para lograr esto hace falta un corte particular, como se muestra en las siguientes figuras.



Probaremos que un rectángulo cuyo lado más largo no es mayor que el doble del otro, se puede transformar en un cuadrado mediante cortes y traslaciones sin superposición. Sea  $ABCD$  un rectángulo cuyo lado más largo es  $AB$  y éste es menor que el doble de  $BC$ . Sea  $P$  la intersección de  $AB$  con la circunferencia de centro  $A$  y radio  $BC = AD$ . Entonces  $PA = BC$ .

Sea  $R$  la intersección de  $AD$  con la circunferencia de diámetro  $PB$ . El ángulo  $PRB$  es recto (esto se demuestra en la unidad sobre el círculo) y los triángulos  $PAR$  y  $RAB$  son semejantes. Por lo tanto  $\frac{PA}{AR} = \frac{AR}{AB}$ , que equivale a  $PA \cdot AB = AR^2$ . Y como  $PA = BC$ , se tiene que  $AB \cdot BC = AR^2$ .



Sea  $E$  la intersección de  $DC$  con la circunferencia de centro  $A$  y radio  $AR$ . Entonces  $AE = AR$  y el cuadrado de lado  $AE$  tiene la misma área que el rectángulo  $ABCD$ . Pero además  $ABCD$  se puede transformar en el cuadrado  $AEFG$ . Para ello definimos  $J$  como la proyección de  $B$  sobre  $AE$  y  $K$  como la intersección de  $CD$  con  $FG$ . Trasladando el triángulo  $ABJ$  a la posición  $KEF$  y el cuadrilátero  $JBCE$  a la posición  $GADK$  se convierte  $ABCD$  en  $AEFG$ .

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de que una figura poligonal se puede transformar en un cuadrado mediante cortes y traslaciones sin superposición. Para ello se sugiere considerar las siguientes proposiciones:

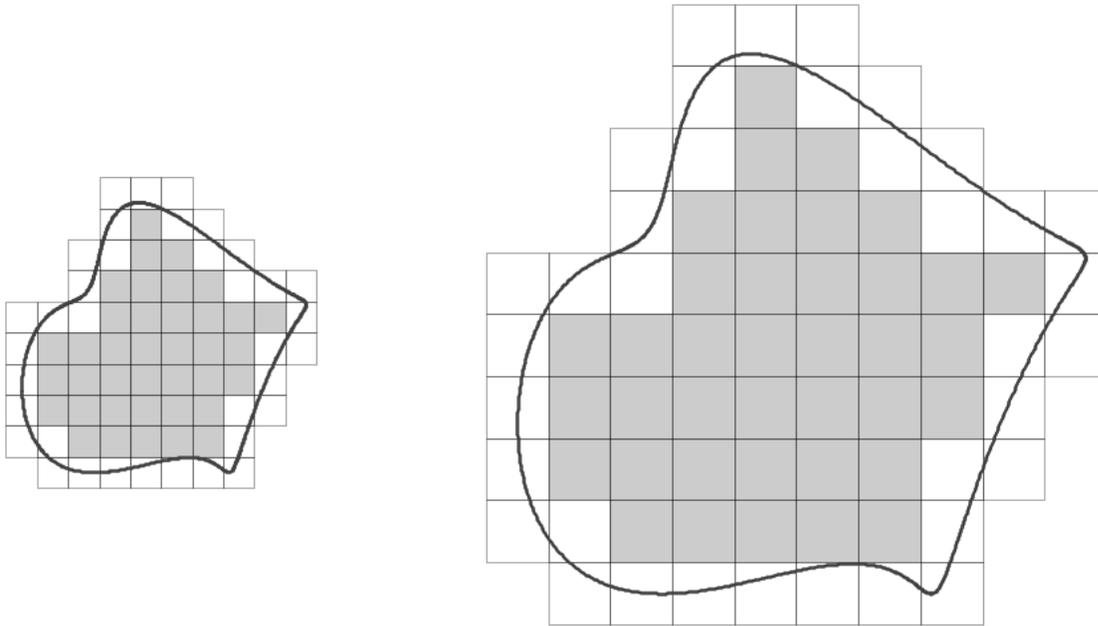
- 1) Toda figura poligonal se puede partir en triángulos.
- 2) Todo triángulo se puede transformar en un rectángulo.
- 3) Un cuadrado se puede transformar en un rectángulo con un lado dado.

### 3.3. El método de exhaustión

#### Áreas de otras figuras

Para obtener el área de una figura plana que no es poligonal, es decir, que su frontera puede incluir partes curvas, hace falta recurrir al método de exhaustión de Eudoxio que, a grandes rasgos, se puede describir así: el área de una figura plana se puede encontrar como el “límite” de las áreas de una sucesión de figuras poligonales contenidas en ella, si cualquier punto del interior de la figura cae en alguna de las figuras de la sucesión.

El resultado más importante con respecto a las áreas las figuras planas que no son poligonales, y que es fácil de demostrar siguiendo la idea sugerida en la siguiente figura,



es que si dos figuras planas  $F_1$  y  $F_2$  son semejantes y la razón de homotecia de (las dimensiones lineales de)  $F_2$  a (las de)  $F_1$  es 2, entonces

$$Area(F_2) = 4Area(F_1)$$

Este resultado puede hallarse en el libro XII de *Los elementos* de Euclides. Ambos cálculos se presentan más adelante en este mismo capítulo.

La demostración es una aplicación simple de la idea descrita en el método de exhaustión. Los resultados más importantes que se obtuvieron en la antigua Grecia utilizando el método de exhaustión son la *cuadratura de la parábola* y el cálculo del *área del círculo* y ambos deben su realización a Arquímedes.

## Volumen

El volumen de un cuerpo se define de manera análoga al área de una figura plana.

Aquí hay que demostrar algunos teoremas sobre volúmenes de prismas. Por ejemplo:

- (a) Si las áreas de las bases de dos prismas son iguales y las alturas también son iguales, entonces los dos prismas tienen el mismo volumen.
- (b) Si dos prismas tienen alturas iguales y el área de la base de uno de ellos es el doble que la del otro, entonces el volumen del primero es el doble que el del segundo.
- (c) Si un prisma cuya base es un paralelogramo se corta en dos prismas triangulares mediante un

plano que pasa por una diagonal de la base y es paralelo a las aristas del prisma que no son de las bases, entonces los prismas resultantes tienen igual volumen y éste, por lo tanto, es la mitad del volumen del prisma original.

El resultado más importante que usaremos, y es fácil de demostrar siguiendo la idea equivalente al caso del área, es que:

(d) Si dos cuerpos  $C_1$  y  $C_2$  son semejantes y la razón de homotecia de (las dimensiones lineales de)  $C_2$  a (las de)  $C_1$  es 2, entonces

$$Vol(C_2) = 8Vol(C_1).$$

Armados con estos resultados se puede enfrentar uno de los problemas más importantes del cálculo de volúmenes de poliedros: el volumen de una pirámide, que puede reducirse al de un tetraedro. La conocida fórmula

$$\text{Volumen} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3} \quad (3.1)$$

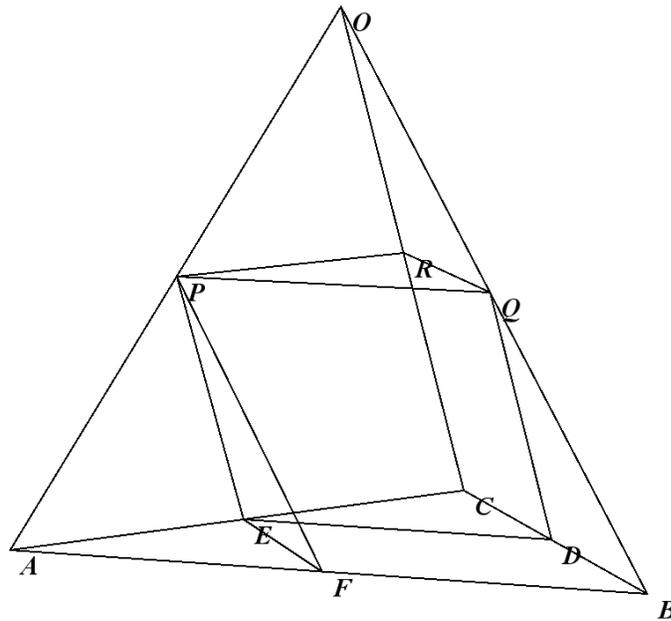
es análoga a la del área del triángulo:  $\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$ , pero es bastante más difícil de obtener. Sabemos que los egipcios la conocían, pero no hay ninguna prueba de que tuvieran alguna demostración de ella. A continuación presentamos su demostración, que se debe a Eudoxo de Cnido (390 - 337 aec) y aparece en el libro XII de Los elementos de Euclides, donde además se generaliza a las pirámides y al cono.

### El volumen de un tetraedro

Sea  $ABCO$  un tetraedro.

Sean  $D, E, F$  los puntos medios de  $BC, CA$  y  $AB$ , respectivamente.

Sean  $P, Q, R$  los puntos medios de  $OA, OB$  y  $OC$ , respectivamente.



Sea  $V$  el volumen del prisma con base triangular  $ABC$  y lado  $OA$ . Sea  $T$  el volumen del tetraedro  $ABCO$ . Demostraremos que  $T = \frac{V}{3}$

El tetraedro puede partirse en cuatro cuerpos: dos tetraedros  $AFFP$  y  $PQRO$ , semejantes al original con razón de homotecia  $\frac{1}{2}$ ; y dos prismas triangulares cuyas bases son  $DBQ$  y  $EDC$ .

El volumen de cada uno de los tetraedros  $AFFP$  y  $PQRO$  es  $\frac{T}{8}$  y el de cada uno de los prismas triangulares de bases  $DBQ$  y  $EDC$  es  $\frac{V}{8}$ . Por tanto:

$$T = 2\frac{T}{8} + 2\frac{V}{8}$$

de donde resulta que

$$T = \frac{V}{3}$$

Es importante reconocer que uno de los hechos más importantes que se utilizan en esta demostración es que el volumen de un cuerpo cuyas dimensiones lineales son el doble de las de otro, tiene un volumen igual a ocho veces el del segundo (que probablemente aprendieron los griegos en relación con el famoso problema de duplicar el cubo) y esto se demuestra usando el método de exhaustión.

**Nota:** En realidad Eudoxio demostró la fórmula  $V = \frac{abc}{6}$  para un tetraedro rectangular utilizando el método de exhaustión y un *proceso recursivo*. Es la demostración que puede hallarse en *Los elementos* de Euclides. La que presentamos aquí no requiere del proceso recursivo pero sí del método de exhaustión. Sin embargo, el proceso recursivo que utilizó Eudoxo probablemente inspiró a Arquímedes para resolver el problema de la cuadratura de la parábola, como se ve más adelante.

A partir de este resultado no es difícil demostrar la fórmula 3.1:

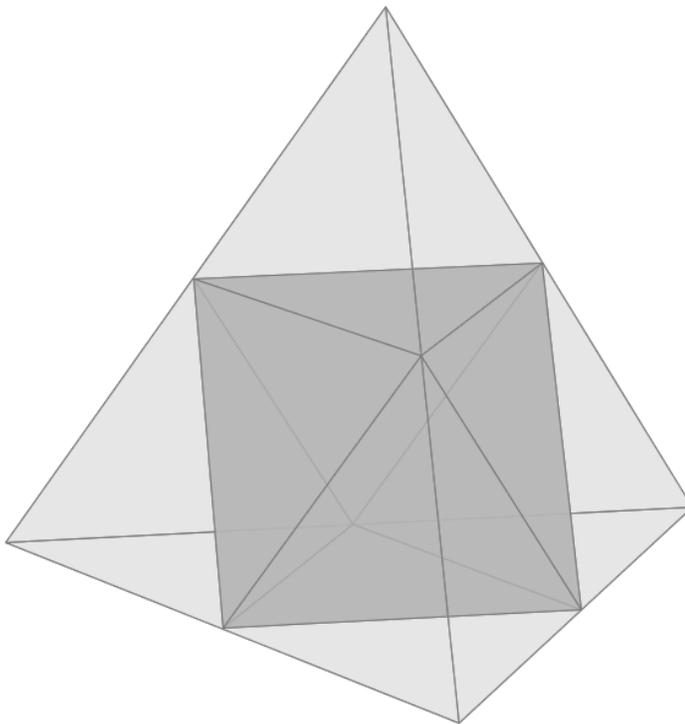
$$\text{Volumen} = \frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

para el volumen de cualquier pirámide con base poligonal.

**Ejercicio.** Demostrar la fórmula 3.1 para el volumen de una pirámide y calcular los volúmenes de un tetraedro, un octaedro y un icosaedro regulares, descomponiendo estos poliedros en pirámides y hallando en cada caso las áreas de sus bases y sus alturas.

### Volúmenes de poliedros

**Ejemplo.** El volumen del octaedro inscrito en un tetraedro, con lados la mitad de los del tetraedro, tiene la mitad de volumen porque resulta de quitarle al tetraedro cuatro tetraedros iguales, cada uno con la octava parte de volumen del original.



Este resultado es válido tanto si el tetraedro inicial es regular como si es irregular. Lamentablemente, este procedimiento para obtener volúmenes de poliedros no es muy general. A diferencia del caso plano, no siempre es posible descomponer un poliedro en partes que puedan recomponerse en un cubo. Este resultado apenas se demostró en el siglo XX. Fue el tercer problema de los que planteó David Hilbert en el congreso de matemáticos del año 1900.

### El tercer problema de Hilbert

En el año 1900 David Hilbert presentó a la comunidad matemática 23 problemas que aún no se habían podido resolver para esa fecha. Uno de ellos, el tercero, era la pregunta de si con los poliedros sucedería lo mismo que con los polígonos en el sentido de que toda figura poligonal se puede partir en otras las cuales puedan recomponerse en un cuadrado. Es decir, ¿es cierto que todo cuerpo en el espacio formado por poliedros se puede partir en otros que puedan recomponerse en un cubo?

La formulación original del problema era ésta:

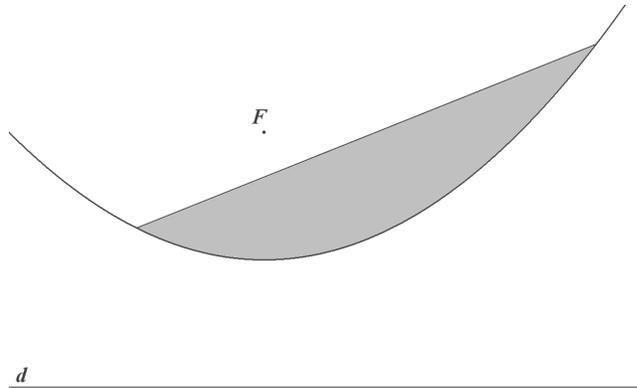
*Tercer problema de Hilbert.* Dados dos poliedros de igual volumen, ¿es posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas que puedan ser ensambladas de modo que quede armado el segundo?

Éste fue el primero de los 23 problemas que se resolvió. En 1903 MAX DEHN (1878-1952) encontró un invariante ante seccionamientos de poliedros que no es el mismo, por ejemplo, para un tetraedro regular que para un cubo. Por tanto, por mucho que partamos el tetraedro, sus partes tendrán siempre el mismo valor del invariante esas partes no podrán juntarse para formar un cubo.

El invariante de Dehn es lo que se llama el *producto tensorial* de las longitudes de las aristas por el ángulo definido por las caras que se unen en cada arista.

## 3.4. La cuadratura de la parábola

Sin duda la aplicación estelar del método de exhaustión de Eudoxio la realizó Arquímedes al calcular el área de un sector de parábola. Un *sector de parábola* es la región acotada por una parábola y una recta que la corta en dos puntos.



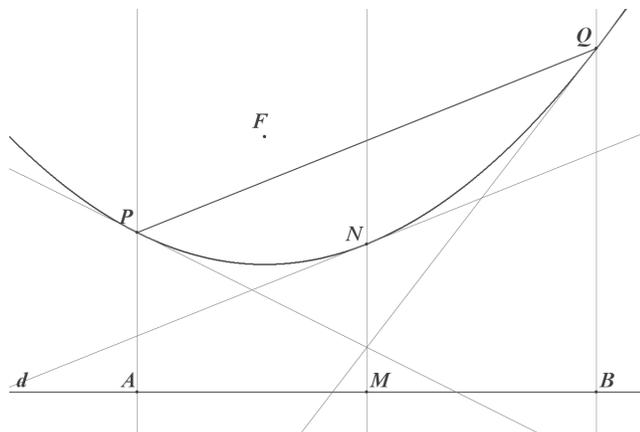
El resultado de Arquímedes puede expresarse de manera muy simple y general:

*El área de un sector de parábola es  $\frac{2}{3}$  del mínimo paralelogramo que lo contiene.*

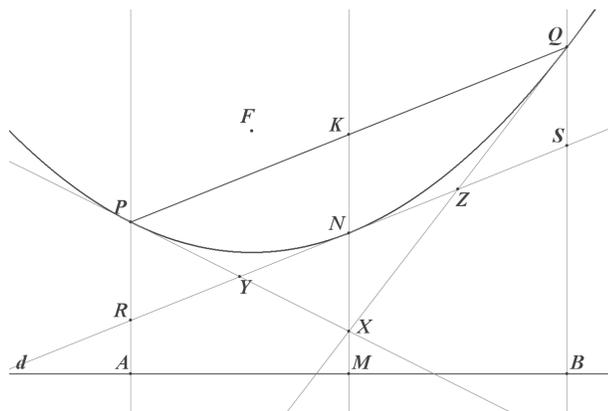
Arquímedes produjo al menos dos demostraciones de este resultado. Aquí nos ocuparemos únicamente de la que se apoya en el método de exhaustión. Esta demostración se basa en una propiedad de la parábola que describimos a continuación. Sea  $F$  el foco de una parábola y sea  $d$  su directriz. Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos sobre la parábola y sea  $N$  el punto sobre la parábola cuya proyección

ortogonal  $M$  sobre la directriz  $d$  es el punto medio de las proyecciones ortogonales  $A$  y  $B$  sobre  $d$  de  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Entonces:

*La tangente a la parábola en  $N$  es paralela a  $PQ$*



Para demostrar esta propiedad definimos  $X$  como el punto de intersección de las tangentes a la parábola en  $P$  y  $Q$ . Sabemos que  $X$  está sobre  $MN$  porque su distancia a  $A$  es la misma que a  $B$ , ya que las tangentes a las parábolas en  $P$  y  $Q$  son las mediatrices de  $FA$  y  $FB$ , respectivamente. Esta última es una propiedad básica de las tangentes a una parábola que se el lector no, conviene que la demuestre como **ejercicio**.

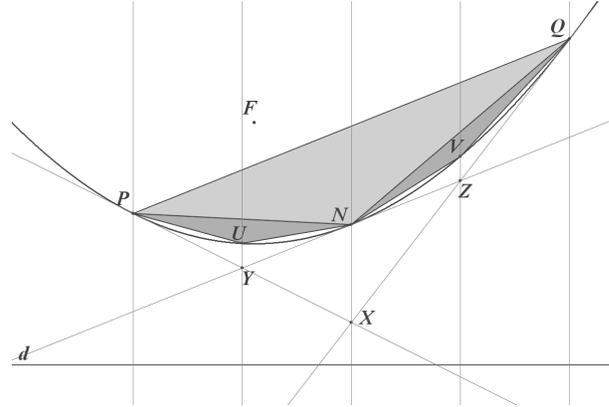


Utilizando el mismo argumento puede verse que el punto  $Y$ , definido como la intersección de las tangentes a la parábola en  $P$  y  $N$ , también se encuentra a la mitad entre las paralelas  $AP$  y  $MN$ . Por tanto los triángulos  $PRY$  y  $XNY$  son congruentes y  $PR = NX$  – donde  $R$  y  $S$  son los puntos de intersección de la tangente a la parábola en  $N$  con  $AP$  y  $BQ$ , respectivamente. Análogamente,  $NX = QS$ . Por lo tanto  $PR = QS$ . Esto completa la demostración de que la tangente en  $P$  es paralela a  $PQ$ .

De hecho, como  $PR = KN = QS$ , donde  $K$  es el punto medio de  $PQ$ , resulta que  $N$  es el punto medio de  $KX$  y por lo tanto el área del triángulo  $PNQ$  es la mitad de la del triángulo  $PXQ$ . También es claro que el área del triángulo  $PNQ$  es la mitad de la del paralelogramo  $PRSQ$ .

Arquímedes demostró que el área del sector de parábola  $PNQ$  es igual a  $\frac{4}{3}$  del área del triángulo  $PNQ$ , o lo que es igual,  $\frac{2}{3}$  del área del paralelogramo  $PRSQ$ .

La demostración de Arquímedes procede por exhaustión, agregando primero el triángulo  $PNQ$  y luego dos triángulos  $PUN$  y  $NVQ$  donde  $U$  y  $V$  son los puntos sobre la parábola que están también sobre las perpendiculares a  $d$  en los puntos medios de  $AM$  y  $MB$ , respectivamente. Y así se continúa dividiendo cada uno de los sectores de parábola en dos, y agregando sus triángulos inscritos.



El área  $a_0$  del triángulo  $PNQ$  se puede calcular explícitamente:

$$a_0 = \frac{AB \cdot KN}{2}$$

Las áreas de los dos triángulos  $PUN$  y  $NVQ$ , sumadas, tienen el valor:

$$a_1 = 2 \frac{\frac{AB}{2} \cdot \frac{NK}{4}}{2} = \frac{AB \cdot NK}{8} = \frac{a_0}{4}$$

Procediendo por iteración, los cuatro triángulos siguientes tienen un área conjunta:

$$a_2 = 4 \frac{\frac{AB}{4} \cdot \frac{NK}{4^2}}{2} = \frac{AB \cdot NK}{2 \cdot 4^2} = \frac{a_0}{4^2}$$

En general:

$$a_n = 2n \frac{\frac{AB}{2^n} \cdot \frac{NK}{4^n}}{2} = \frac{AB \cdot NK}{2 \cdot 4^n} = \frac{a_0}{4^n}$$

Así, agragndo todos estos términos, llegamos a una serie infinita para expresar el área  $s$  del sector de parábola  $PNQ$ :

$$s = a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots\right) a_0 = t \cdot a_0$$

donde

$$t = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \dots$$

Para calcular esta suma infinita observamos que

$$t = 1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{4} t$$

Por tanto, despejando  $t$  de esta sencilla ecuación, obtenemos  $t = \frac{4}{3}$ .

Sustituyendo en  $s = t \cdot a_0$  obtenemos:

$$s = \frac{4}{3}a_0 = \frac{4}{3} \frac{AB \cdot NK}{2} = \frac{2}{3}AB \cdot NK$$

que es lo que queríamos demostrar.

### 3.5. El número $\pi$ a través de los siglos

Una de las contribuciones más notables de Arquímedes al pensamiento matemático fue su manera de estimar el valor del número  $\pi$ , o más precisamente, de calcular el perímetro de la circunferencia. Para hacer justicia a este trabajo vamos a presentarlo enmarcado en un relato detallado de las distintas maneras en que se ha enfrentado este problema antes y después de Arquímedes, desde las primeras fórmulas usadas en Babilonia y Egipto hasta los trabajos que probaron que  $\pi$  no es un número racional y los métodos que se usan en la actualidad para estimar con muchísima precisión su valor. En toda esta historia la intervención de Arquímedes es fundamental y marca un hito en la historia del pensamiento matemático porque muestra cómo realizar estimaciones tan precisas como uno necesite, de cantidades que no pueden calcularse con total exactitud. En el fondo el trabajo de Arquímedes respecto al número  $\pi$  marca el nacimiento de lo que hoy llamamos Análisis Matemático.

#### El número $\pi$ en la antigüedad

Las culturas antiguas sabían que el perímetro de una circunferencia es un poco mayor que el triple de su diámetro y que el área de un círculo es algo mayor que tres veces la del cuadrado de lado igual al radio. Está más o menos claro que sabían que esas razones eran constantes, pero no que supieran que son iguales. De hecho las estimaciones que usaban para una y otra no siempre eran las mismas.

Los babilonios usaban unas veces 3 y otras  $3\frac{1}{8} = 3.125$ . No está claro si uno de estos valores era para la razón de los perímetros y el otro para la de las áreas o si usaban 3 en los ejercicios escolares y  $3\frac{1}{8}$  cuando querían mayor precisión. No se sabe cómo obtuvieron esas aproximaciones. Nada hay que indique un intento para justificarlas. Es probable que las obtuvieran experimentalmente (por ejemplo rodeando una columna cilíndrica con una cuerda o midiendo las marcas que deja una protuberancia en el perímetro de una rueda).

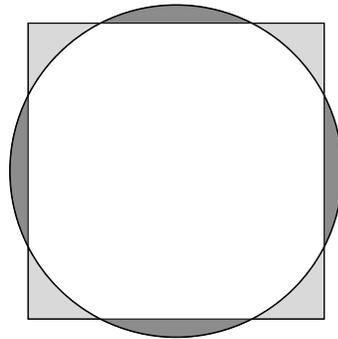
El número  $\pi$  entendido como *la razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia* o como *la razón entre el área de un círculo y el cuadrado de su radio*, no aparece en las primeras civilizaciones, pero en cambio casi todas ellas conocían fórmulas para calcular, de manera aproximada, los perímetros y las áreas de los círculos. Un ejemplo es la fórmula

$$A = (8/9d)^2$$

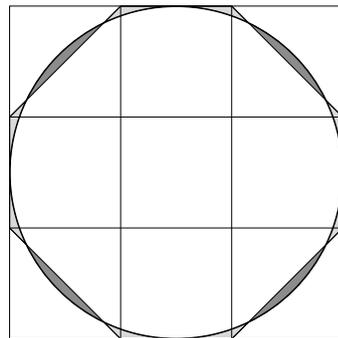
que usaban los egipcios para el área de un círculo de diámetro  $d$ . Como puede apreciarse por su aspecto, esta fórmula es más bien una “cuadratura del círculo” (solo aproximada, por supuesto), es decir, exhibe un cuadrado (de lado  $8/9 d$ ) cuya área es más o menos igual a la del círculo. Esta

fórmula es una muestra clara de lo que interesaba a los egipcios: tener un método simple de calcular, de manera aproximada, el área de un círculo. Muchos otros ejemplos de los ítems encontrados en los papiros egipcios que datan de más de 1500 años A.C. Muestran que su interés era tener procedimientos o fórmulas para calcular algo. Se desconoce si el procedimiento era producto de un razonamiento o fue encontrado de manera empírica y su justificación residía únicamente en que funcionaba bien en la práctica. Justificar procedimientos de cálculo por su utilidad y no por su racionalidad, ha subsistido hasta nuestros días y constituye una de las maneras no ortodoxa de hacer matemáticas y que muchos justifican por los beneficios prácticos que aporta.

En su afán por justificar racionalmente las fórmulas de la antigüedad, los historiadores de las matemáticas han inventado a veces argumentos factibles que hubieran podido haber usado quienes las inventaron. Por ejemplo, la figura muestra un círculo con diámetro  $d$  y un cuadrado con lado  $\frac{8}{9}d$ . A simple vista puede apreciarse que la diferencia entre sus áreas es pequeña. El exceso en las esquinas del cuadrado parece compensarse con los sectores del círculo que le sobresalen. De acuerdo con esto, el área del círculo ( $\pi r^2$  donde  $r = \frac{d}{2}$ ) es “casi” igual a  $(\frac{8}{9}d)^2$ . Tomando  $d = 2$  (o sea  $r = 1$ ) obtenemos una estimación para  $\pi$  de  $(\frac{8}{9}2)^2 = 256/81$ , que en decimales nos da  $\pi \simeq 3.16$ .



El razonamiento es éste: si se parte el cuadrado circunscrito al círculo de diámetro  $d$  en nueve cuadrados, cada uno de lado  $\frac{1}{3}d$ , como muestra la figura.



Salta a la vista que el octágono irregular en la figura debe tener un área muy parecida a la del círculo. Los 8 excesos alrededor de sus vértices parecen compensarse con los 4 de la circunferencia sobre los lados diagonales del hexágono. El área del octágono es igual a 7 veces la de los cuadrados

de lado  $\frac{d}{3}$ , o sea

$$7\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2$$

que es un valor muy cercano a  $\frac{64}{81}d^2$ . Pero  $\frac{64}{81}$  tiene la ventaja de ser el cuadrado exacto de  $\frac{8}{9}$  y proporciona una *cuadratura* aproximada del círculo que ayuda a simplificar los cálculos.

Que la razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos parecía ser conocimiento común en Babilonia y Egipto. La primera demostración documentada de que la razón del área del círculo al cuadrado de su radio es constante corresponde a Euclides en el libro XII de sus Elementos. Sin embargo Euclides no proporciona el valor de dicha razón. Y es que esta constante fundamental de la naturaleza que denotamos por  $\pi$  es difícil de calcular, además de que la notación numérica de los griegos no fomentaba el análisis numérico <sup>3</sup>.

### El tratamiento de Arquímedes del número $\pi$

La primera estimación razonada de  $\pi$ , con cotas bien definidas, la realizó Arquímedes (Siracusa, Sicilia 287 – 212 a.e.c.). Arquímedes fue a la vez físico, ingeniero, inventor, astrónomo y, sobre todo, matemático. Se le considera uno de los científicos más importante de la antigüedad clásica. Pero por lo que más se le admira es por sus trabajos matemáticos, que son los únicos que él mismo consideró suficientemente importantes como para escribirlos y legarlos a la posteridad.



«Domenico-Fetti Archimedes 1620» de Domenico Fetti.

Arquímedes murió durante el sitio de Siracusa (214–212 a.e.c.), ejecutado por un soldado romano. Se dice que el soldado le ordenó levantarse y seguirlo, pero Arquímedes se mantuvo absorto en sus pensamientos dibujando en la arena, lo cual irritó al soldado que, enfadado, le asestó un golpe de espada, a pesar de que tenía órdenes de no hacerle daño.

<sup>3</sup>Los primeros en usar la letra  $\pi$  para denotar esta constante fueron los matemáticos ingleses Oughtred (1647), ISAAC BARROW (1664) y DAVID GREGORY (1697).



«Cara de la medalla Fields, Archimedes» de Stefan Zachow.

Sus ideas, sus métodos y el rigor de sus demostraciones siguen siendo hoy motivo de asombro y admiración, la cual ha quedado patente en el hecho de que la medalla Fields, que es el premio más importante de las matemáticas, lleva su efigie.

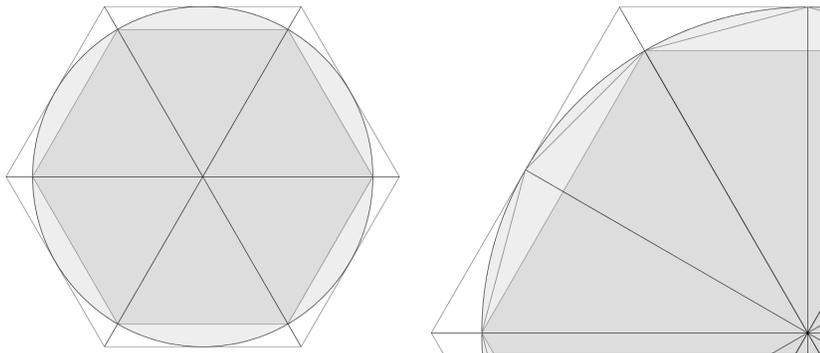
Si  $p_n$  y  $P_n$  representan los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de  $6 \cdot 2^n$  lados, entonces, según Arquímedes

$$\frac{p_n}{2} < \pi < \frac{P_n}{2}$$

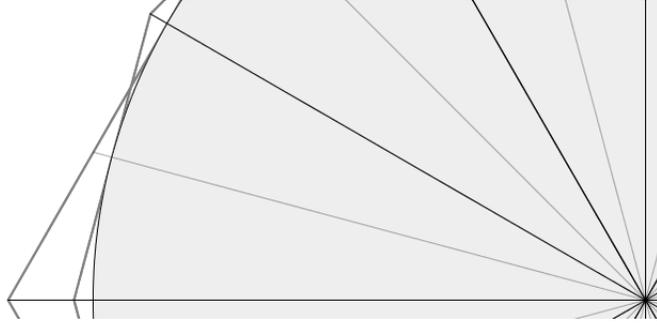
Esto nos dice que el número  $\pi$  se encuentra en todos los intervalos

$$\left[ \frac{p_n}{2}, \frac{P_n}{2} \right]$$

Además Arquímedes da argumentos geométricos para demostrar que  $\{p_n\}$  es creciente y  $\{P_n\}$  es decreciente. Lo primero es bastante evidente porque dos segmentos consecutivos del polígono inscrito de  $6 \cdot 2^{n+1}$  lados une los extremos de un solo lado del de  $6 \cdot 2^n$  lados.



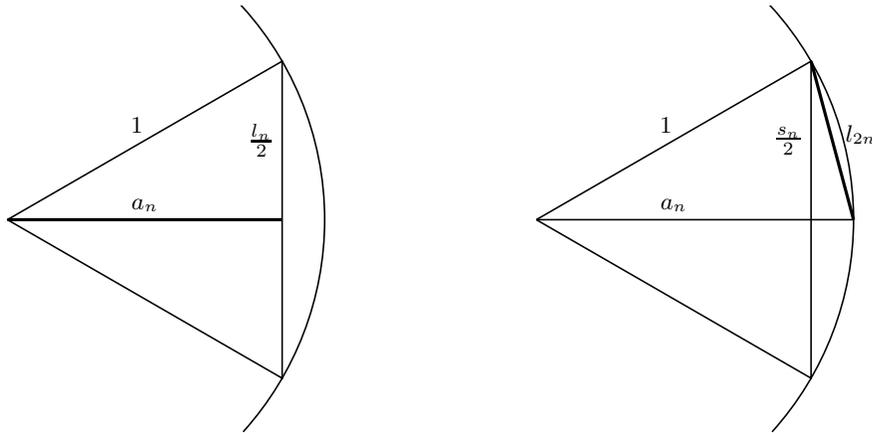
Para lo segundo basta observar que en la siguiente figura



el lado del polígono anterior puede partirse en dos partes, una de ellas igual al lado del polígono siguiente y la otra claramente mayor por poder convertirse en el lado opuesto a un ángulo obtuso en un triángulo en el que uno de los lados adyacentes al ángulo obtuso es precisamente el lado del polígono anterior.

Si probáramos que la longitud de esos intervalos tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, obtendríamos una manera de estimar el valor de  $\pi$  con tanta precisión como quisiéramos. Para ellos bastaría tomar polígonos con un número de lados  $n$  suficientemente grande. Para lograr esto Arquímedes calculó explícitamente esos perímetros para los polígonos regulares inscritos y circunscritos de  $6 \cdot 2^n$  lados y demostró que su diferencia tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

Sea  $l_n$  el lado del polígono inscrito de  $6 \cdot 2^n$  lados y  $a_n$  el apotema correspondiente. Entonces, usando el Teorema de Pitágoras, obtenemos



$$a_n = \sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} \quad (3.2)$$

$$l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (1 - a_n)^2} \quad (3.3)$$

El lado  $L_n$  del polígono circunscrito de  $6 \cdot 2^n$  lados puede hallarse por triángulos semejantes a partir de  $l_n$  y  $a_n$ :

$$L_n = \frac{l_n}{a_n} \quad (3.4)$$

Sumando la mitad de los lados de los polígonos, Arquímedes obtiene estas cotas para  $\pi$  que permiten estimar su valor con la precisión que uno quiera

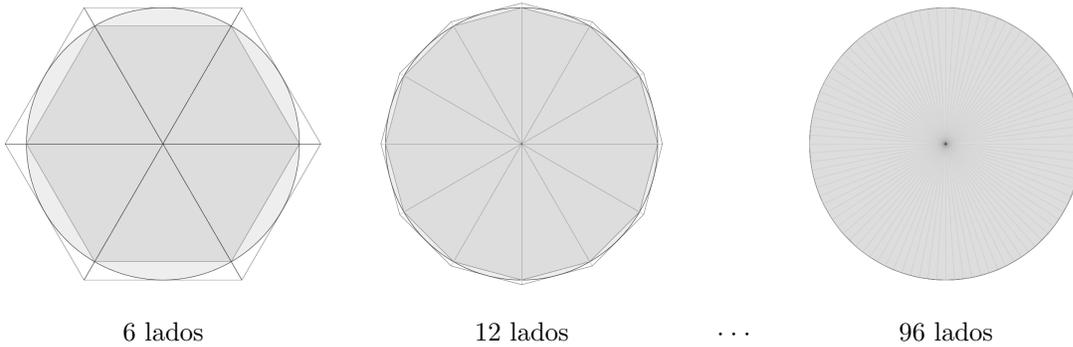
$$\frac{p_n}{2} = 3 \cdot 2^n \cdot l_n < \pi < 3 \cdot 2^n \cdot L_n = \frac{P_n}{2}$$

ya que la diferencia entre estos valores es

$$3 \cdot 2^n (L_n - l_n) = 3 \cdot 2^n \cdot L_n (1 - a_n)$$

que tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito porque  $3 \cdot 2^n \cdot L_n$  está acotado (por ejemplo por  $3 \cdot 2^1 \cdot L_1$  que es el semi-perímetro del hexágono circunscrito) y obviamente  $a_n$  tiende a 1 cuando  $n$  tiende a infinito.

Las fórmulas recursivas (3.2) y (3.3) involucran raíces cuadradas, que son difíciles de calcular manualmente, y aún con los excelentes algoritmos de nuestro sistema de decimal, hoy no haríamos estos cálculos sin contar con una calculadora. Las raíces cuadradas de números racionales suelen ser irracionales y sólo podemos expresarlas de manera aproximada en nuestro sistema decimal.



A pesar de estas dificultades, Arquímedes, con algoritmos aritméticos menos eficientes que los nuestros, logró obtener buenas cotas racionales para el número  $\pi$ . Usando los polígonos inscrito y circunscrito de 96 lados obtuvo

$$3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70} = 3 + \frac{10}{70}$$

Estas cotas dan 2 cifras decimales de precisión

$$3.1408 < \pi < 3.1429 \quad (3.5)$$

Con una calculadora hoy podemos obtener

$$3.1410 < \pi < 3.1428 \quad (3.6)$$

Observemos que el promedio pesado con  $\frac{2}{3}$  de la cota inferior y  $\frac{1}{3}$  de la superior es 3.1416, que es una excelente aproximación para  $\pi$  con cuatro cifras decimales de precisión. Esto no es una casualidad, como veremos más adelante.

El método de Arquímedes fue aplicado por Ptolomeo alrededor del año 100, hasta alcanzar un polígono de  $1536 = 6 \cdot 2^8$  lados, obteniendo la estimación  $\pi \simeq 317/120 \simeq 3.1416$  que es el valor que usamos todavía en las escuelas.

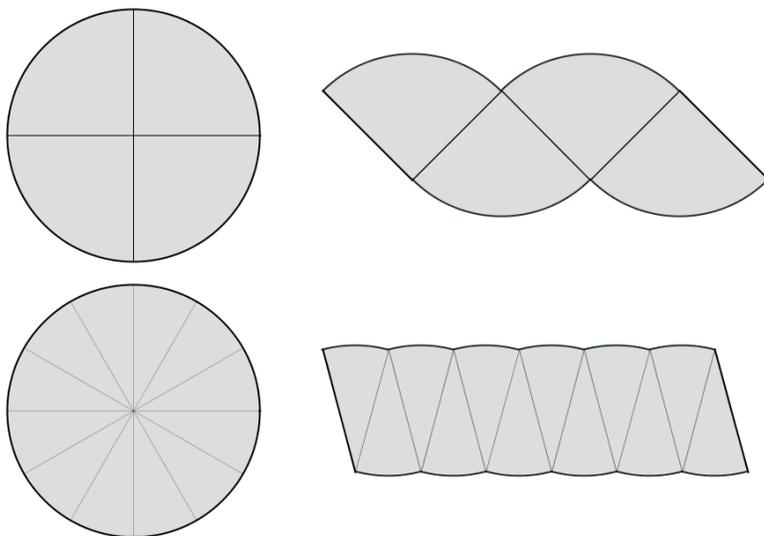
Algunos siglos más tarde y de manera independiente, los chinos usaron el mismo método para obtener una aproximación aún más precisa  $\pi \simeq 355/113$ , que en decimales corresponde a  $\pi \simeq 3.141592$  y es exacta en seis cifras decimales. Este resultado constituye una hazaña extraordinaria de cálculo, dadas las limitaciones aritméticas de aquella época, y se puede considerar que dio a los chinos el récord mundial durante mil años. No fue sino hasta finales de la edad media europea que el uso de los números arábigos permitió mejorar los métodos aritméticos y obtener mejores estimaciones de  $\pi$ . Como veremos más adelante, Arquímedes pudo haber obtenido la misma aproximación que los chinos y con casi las mismas operaciones aritméticas con que logró la suya, que fue mucho más modesta.

### El área del círculo

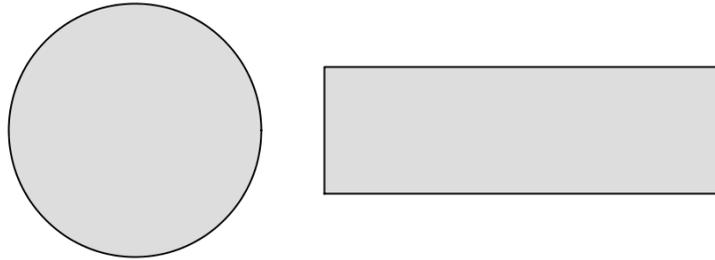
Euclides demostró que la razón entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro es constante y también que la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su radio es constante. Sin embargo no demostró que ambas constantes son iguales. Quien logra demostrarlo es, para no variar, Arquímedes. Lo hace unos 50 años después de que Euclides escribiera sus *Elementos*. Este resultado es el que nos permite escribir las fórmulas  $p = 2\pi r$  para el perímetro de la circunferencia y  $A = \pi r^2$  para el área del círculo de radio  $r$ .

Las siguientes figuras ilustran el método que usó Arquímedes para obtener el área de un círculo en términos del número  $\pi$ , que de hecho consiste precisamente en encontrar la relación entre el área, el perímetro y el radio:

$$A = \frac{p \cdot r}{2}.$$



Lo que hizo fue dividir el círculo en un número par de sectores y acomodar la mitad de ellos alineados y paralelos, tocándose por un punto, y la otra mitad de la misma manera, pero invertidos, encajados exactamente en los primeros. Luego fue aumentando el número de sectores y observó que la figura que se obtiene, y que por construcción siempre tiene la misma área que el círculo, se va convirtiendo en un rectángulo cuyo lado es la mitad del perímetro y cuya altura es el radio.



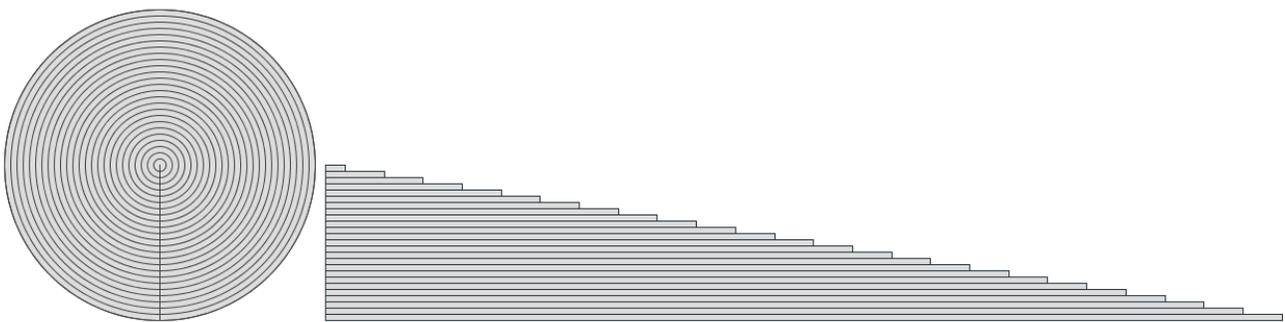
Así, resulta claro que el área del círculo es la mitad del perímetro por el radio. Dado que el perímetro, por definición del número  $\pi$ , es  $2\pi r$ , esto demuestra que el área del círculo es  $\pi r^2$ . Cabe mencionar que JOHANNES KEPLER (1571 - 1630) utilizó una idea similar para demostrar que el volumen  $V$  y la superficie  $S$  de una esfera de radio  $r$  guardan la relación

$$V = \frac{S \cdot r}{3}.$$

Sugerimos al lector demostrar esta fórmula mediante la idea de partir la superficie de la esfera en muchos pequeños triángulos e interpretarlos como las bases de pirámides con un vértice en el centro de la esfera y cuyas alturas se aproximan al radio de la esfera a medida que los lados de los triángulos tienden a cero.

Otra manera de demostrar la fórmula para el área del círculo de radio  $r$  es partiéndolo en muchos anillos concéntricos del mismo espesor y desenrollarlos, sin estirarlos ni encogerlos, hasta dejarlos rectos y horizontales. Se forma así una figura muy cercana al triángulo de base  $2\pi r$  y altura  $r$ , cuya área es, por supuesto,  $\pi r^2$ . Cuantos más anillos se usen, mejor es la aproximación.

Así se consigue ontiene demostración de que el área del círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ .



Este argumento aparece en un texto medieval del matemático y astrónomo judío-catalán Abraham Bar Hiyya (o Abraham Iudaeus Savasorda) (Barcelona, siglo XII, 1065-1070 – 1136 ó 1145), precursor de la escuela de Toledo.



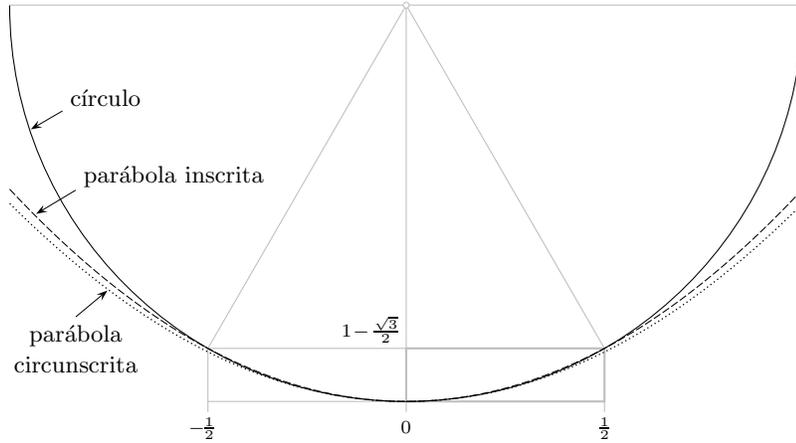
«Sefer tzuret, abraham bar»

Photo of Exhibit at the Diaspora Museum, Tel Aviv - en:Beit Hatefutsot.

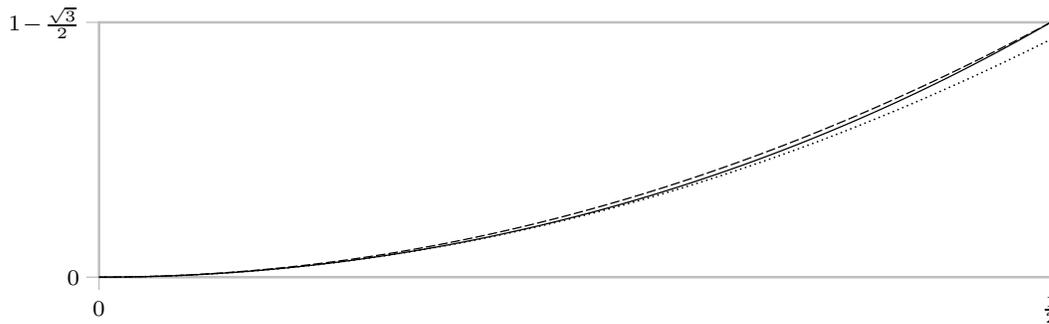
Ya que  $\pi$  puede obtenerse como la razón del área del círculo al cuadrado de su radio, resulta que es igual al área del círculo unitario (el de radio 1). Así calcularemos  $\pi$  de aquí en adelante.

## El número $\pi$ como el área del círculo unitario

Usando la misma idea de Arquímedes de los polígonos de  $6 \cdot 2^n$  lados, pero ahora buscando cotas para sus áreas en lugar de sus perímetros, se llega a estimaciones similares a las que se obtienen con perímetros. Pero usar áreas tiene ventajas. Nos permite aprovechar otro de los importantes resultados de Arquímedes: *la cuadratura de la parábola* (ver 3.4), es decir, que el área de un sector de parábola es igual a  $\frac{2}{3}$  de la del paralelogramo o rectángulo más pequeño que la contiene. El promedio pesado con  $\frac{2}{3}$  de la cota inferior más  $\frac{1}{3}$  de la exterior, que como antes vimos da una estimación muy buena de  $\pi$ , nos sugiere usar parábolas para obtener mejores resultados.



Consideremos dos parábolas con sus ejes sobre la mediatriz del triángulo formado por el centro del círculo y los extremos de uno de los hexágonos inscritos, ambas con vértice en la intersección de la mediatriz con la circunferencia. Sea la primera de ellas la que corta a la circunferencia en los extremos del lado elegido del hexágono y sea la segunda la que tiene el foco en el punto medio del radio que coincide con la mediatriz. Se puede demostrar que la segunda es exterior al círculo y la primera es interior, entre los extremos del lado del hexágono. Las tres curvas coinciden en el vértice de las parábolas.



Se puede obtener una cota inferior para el área del círculo unitario como 6 veces el área del triángulo de base 1 y apotema  $a = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  más  $\frac{2}{3}$  del rectángulo de base 1 y altura  $1 - a$ . O sea que

$$\pi > 6 \left( \frac{a}{2} + \frac{2}{3}(1 - a) \right) = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) > 3.141104 \quad (3.7)$$

Si colocamos el origen en el vértice de las parábolas y hacemos coincidir el eje  $y$  con los ejes de las parábolas de manera que el centro del círculo quede en el punto  $(0, 1)$ , la ecuación de nuestra parábola exterior resulta ser  $y = \frac{x^2}{2}$ . Sumando las áreas del triángulo y el rectángulo y restando la que está bajo la parábola, obtenemos

$$\pi < 6 \left( \frac{a}{2} + (1 - a) - \frac{1}{3} \left( \frac{0.5^2}{2} \right) \right) = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{0.5^2}{2} \right) \right) < 3.142603 \quad (3.8)$$

Reuniendo (3.7) y (3.8) llegamos a

$$3.141104 < \pi < 3.142603$$

Esta estimación es ligeramente mejor que la de Arquímedes correspondiente al polígono de 96 lados, pero ésta se obtuvo con muchas menos operaciones aritméticas y, entre ellas, sólo una raíz cuadrada, la de 3.

La misma idea se puede aplicar a los polígonos de  $6 \cdot 2^n$  lados aprovechando las fórmulas recursivas (3.2) y (3.3) para  $a_n$  y  $l_n$  que se usaron en el método de Arquímedes. Con esos valores las cotas para  $\pi$  son

$$6 \cdot 2^n \left( \frac{a_n}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l_n^2}{2} \right) < \pi < 6 \cdot 2^n \left( \frac{a_n}{2} + (1 - a_n) - \frac{1}{3} \cdot \frac{l_n^2}{2} \right)$$

En el caso  $n = 4$ , que corresponde al polígono de 96 lados, esto da 7 dígitos de precisión

$$3.14159264 < \pi < 3.14159267$$

que son 5 más que los 2 que dio el método de Arquímedes.

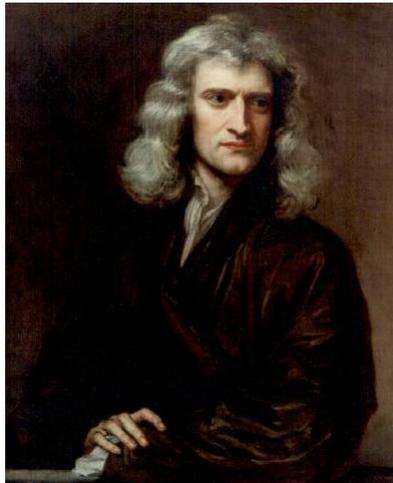
Resulta bastante extraño que Arquímedes no haya usado esta idea, siendo que él mismo obtuvo la cuadratura de la parábola. Tal vez su trabajo sobre la cuadratura de la parábola haya sido posterior al del cálculo de  $\pi$ .

Aunque este camino nos permite calcular muchos decimales de  $\pi$ , tiene el gran inconveniente de las raíces cuadradas, que nos obligan a realizar operaciones complejas con resultados inexactos.

Si se hacen promedios pesados con  $\frac{3}{5}$  de las cotas inferiores y  $\frac{2}{5}$  de las superiores, se obtienen aproximaciones con un 50% más de cifras decimales correctas. Esto sugiere que podría haber métodos aún mejores. Uno de ellos lo descubrió Isaac Newton. En la siguiente sección lo redescubriremos nosotros mismos usando argumentos geométricos y del cálculo diferencial e integral.

### Cálculo de $\pi$ según Newton

El gran científico Sir Isaac Newton (1643 - 1727) encontró un método para calcular  $\pi$  que es mucho más eficiente que cualquiera de los que le precedieron.



«Sir Isaac Newton (1643-1727)» de Sir Godfrey Kneller  
 - <http://www.phys.uu.nl/vgent/astrology/images/newton1689.jpg>.  
 Disponible bajo la licencia Dominio público via Wikimedia Commons -  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir\\_Isaac\\_Newton\\_\(1643-1727\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg)  
[#/media/File:Sir\\_Isaac\\_Newton\\_\(1643-1727\).jpg](#)

Su resultado puede escribirse así

$$\pi = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} \quad (3.9)$$

Esta fórmula expresa  $\pi$  en términos de una serie rápidamente convergente de números racionales en la que cada término tiene una expresión explícita. De ella podemos obtener un algoritmo recursivo muy sencillo para cada término de la serie a partir del que le precede. Efectivamente, definiendo

$$c_n = \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2}$$

la fórmula (3.9) se puede escribir así

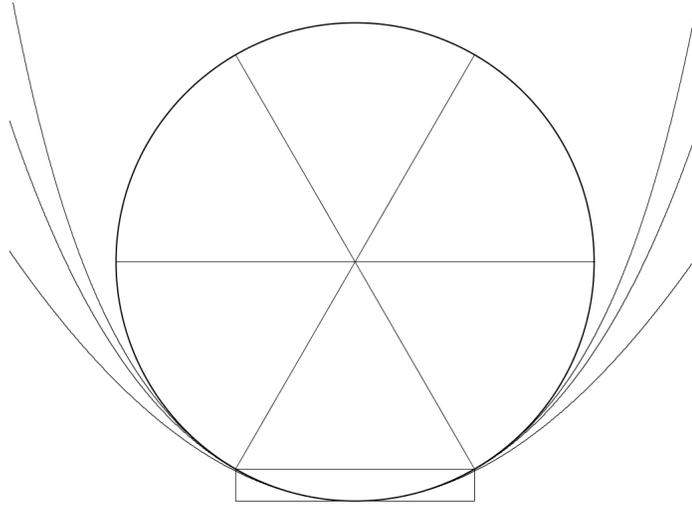
$$\pi = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2n+1} \quad (3.10)$$

donde  $c_0 = 1$  y, para  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$c_n = c_{n-1} \frac{(2n-1)(2n)}{16n^2} = c_{n-1} \frac{(2n-1)}{8n} \quad (3.11)$$

La serie (3.10) brinda una manera sencilla y muy rápida de obtener buenas aproximaciones de  $\pi$ . De hecho, con este método se pueden obtener 16 decimales de  $\pi$  con sólo 22 términos. Manualmente este cálculo puede hacerse en una hora, en minutos usando una calculadora y en fracciones de segundo con una computadora.

Para obtener este resultado calcularemos  $\pi$  como el área del círculo unitario y usaremos el hexágono inscrito y la aproximación a una función mediante una serie de potencias, concepto que surgió apenas en el siglo XVII gracias, entre otros, al propio Newton.



Aproximando  $1 - \sqrt{1 - x^2}$  por  $\sum_{n=0}^N a_n x^n$ ,  $N = 1, 2, 3, \dots$

El área puede calcularse así

$$\pi = 6(T + R - 2C) \quad (3.12)$$

donde:

$T$  es el área del triángulo equilátero de lado 1:  $T = \frac{\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}}{2}$ ,

$R$  es el área del rectángulo de base 1 y altura  $1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}$  y

$C$  es el área bajo la gráfica<sup>4</sup> de la función  $1 - \sqrt{1 - x^2}$  entre 0 y  $\frac{1}{2}$ .

Entonces

$$T = \frac{1}{2} - \frac{1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2}}{2} \quad R = 1 - \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} \quad C = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 - \sqrt{1 - x^2} dx$$

Definiendo  $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ , estas fórmulas pueden escribirse así

$$T = \frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{2} \quad R = f(\frac{1}{2}) \quad C = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

Sustituyendo en (3.12) obtenemos

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{2} + f(\frac{1}{2}) - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx\right)$$

que se simplifica a

$$\pi = 3\left(1 + f\left(\frac{1}{2}\right) - 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx\right) \quad (3.13)$$

La función  $f(x)$  se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} \quad (3.14)$$

<sup>4</sup>El origen se colocó una unidad abajo del centro para que la gráfica coincida con la circunferencia.

donde los coeficientes  $a_n$ , que más adelante obtendremos usando la serie binomial, son positivos. Sustituyendo (3.14) en (3.13)

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} - 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} dx \right)$$

Calculando la integral término a término

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

Reuniendo las dos sumas y sacando como factores comunes a  $a_n \left( \frac{1}{2} \right)^{2n}$

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \left( 1 - 4 \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} \right) \right)$$

Lo cual podemos reescribir así

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^{2n}} \left( 1 - \frac{2}{2n+1} \right) \right)$$

Usando  $2n+1$  como denominador común, podemos simplificar y escribir

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2n-1}{4^n \cdot (2n+1)} \right) \quad (3.15)$$

Para obtener los coeficientes  $a_n$  desarrollamos  $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$  en serie binomial

$$f(x) = 1 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{3!}x^6 + \dots$$

Simplificando

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{3!}x^6 + \dots$$

De lo cual se puede ver que  $a_1 = \frac{1}{2}$  y, para  $n > 1$

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n! \cdot (2n-1)}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$  obtenemos

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n) \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2n-1)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2n-1)}$$

y finalmente

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n-1)} \quad (3.16)$$

para  $n = 1, 2, \dots$ . Sustituyendo (3.16) en (3.15)

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n-1)} \cdot \frac{(2n-1)}{4^n \cdot (2n+1)} \right)$$

Lo cual puede escribirse finalmente como

$$\pi = 3 \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)} \right) \quad (3.17)$$

Como la fórmula para los coeficientes en (3.17) es válida para  $n = 0$  y da 1, esto nos lleva a (3.9), que es lo que queríamos demostrar.

### Cálculos de $\pi$ con muchos decimales

Utilizando (3.10) y (3.11) en una computadora con aritmética de alta precisión se puede obtener la siguiente aproximación de  $\pi$  con 600 cifras decimales de precisión.

$\pi = 3.$

141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944  
 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513282 306647  
 093844 609550 582231 725359 408128 481117 450284 102701 938521 105559  
 644622 948954 930381 964428 810975 665933 446128 475648 233786 783165  
 271201 909145 648566 923460 348610 454326 648213 393607 260249 141273  
 724587 006606 315588 174881 520920 962829 254091 715364 367892 590360  
 011330 530548 820466 521384 146951 941511 609433 057270 365759 591953  
 092186 117381 932611 793105 118548 074462 379962 749567 351885 752724  
 891227 938183 011949 129833 673362 440656 643086 021394 946395 224737  
 190702 179860 943702 770539 217176 293176 752384 674818 467669 405132

El cálculo tarda unos 25 segundos.

Para obtener 1,200 decimales se requieren unos 3 minutos, para 7,200 decimales, 4 horas y para 12,000 decimales, 22 horas.

Actualmente se conocen métodos aún más eficientes con los que se han llegado a calcular miles de millones de cifras decimales de  $\pi$ . Esos cálculos tardan meses en realizarse. Hace mucho tiempo había interés en esto porque no se sabía si  $\pi$  era racional y se intentaba descubrir un patrón que se repitiera, en la esperanza de descubrir la fracción que lo representaba exactamente. Pero desde que se descubrió que  $\pi$  no puede ser un número racional (siguiente sección), este tipo de esfuerzos perdió relevancia porque para la mayoría de los cálculos que hay que realizar, basta conocer unos 16 decimales de  $\pi$ , que es lo que ofrece la aritmética de una computadora personal. Para cálculos más delicados, un centenar de decimales serían más que suficientes. Así que en realidad el cálculo de  $\pi$  con miles o millones de cifras decimales no tienen ninguna utilidad práctica, se trata de un mero desafío. Algunos investigadores tienen interés en estudiar la distribución estadística de los dígitos en una expansión larga de  $\pi$ , por ejemplo, en saber si todos aparecen con la misma probabilidad. Con la riqueza de las matemáticas es imposible saber si ese tipo de investigaciones dará alguna vez un resultado interesante.

### La irracionalidad de $\pi$

Durante siglos los matemáticos se preguntaron si  $\pi$  sería o no racional. Si lo fuera habría una periodicidad en sus decimales. Esto fomentó el interés de obtener muchos decimales de  $\pi$ . A medida que se calculaban más y más se iban buscando patrones que se repitieran. Pero nunca se encontró uno. En el siglo XVIII, el matemático suizo JOHANN HEINRICH LAMBERT dio la primera demostración de que nunca se encontraría tal patrón porque  $\pi$  es un número irracional. A continuación presentamos una demostración de la irracionalidad de  $\pi$  publicada por IVAN NIVEN de Purdue University en 1946, la cual requiere únicamente de conceptos elementales de cálculo.

La demostración procede por contradicción. Supongamos que  $\pi = \frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos. Definamos

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

y

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

donde  $n$  es un entero positivo cualquiera. Entonces  $n!f(x)$  es un polinomio con coeficientes enteros de grado no mayores que  $n$ , así que  $f(x)$  y sus derivadas  $f^{(i)}(x)$  toman valores enteros en  $x = 0$  y en  $x = \frac{a}{b} = \pi$ . Por cálculo elemental sabemos que

$$\frac{d}{dx} [F'(x) \operatorname{sen}(x) - F(x) \operatorname{cos}(x)] = [F''(x) + F(x)] \operatorname{sen}(x) = f(x) \operatorname{sen}(x)$$

y por tanto

$$\int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(x) dx = [F'(x) \operatorname{sen}(x) - F(x) \operatorname{cos}(x)]_0^\pi = F(\pi) + F(0) \quad (3.18)$$

$F(\pi) + F(0)$  es un entero porque  $f^{(i)}(\pi)$  y  $f^{(i)}(0)$  son enteros para todo  $i$ . Pero para  $0 < x < \pi$

$$0 < f(x) \operatorname{sen}(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$$

así que el valor de la integral (3.18) es un entero positivo y sin embargo es menor que  $\pi \frac{(\pi a)^n}{n!}$  para todo entero positivo  $n$ . Pero  $\frac{c^n}{n!}$  tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto es imposible que  $\pi$  sea racional.

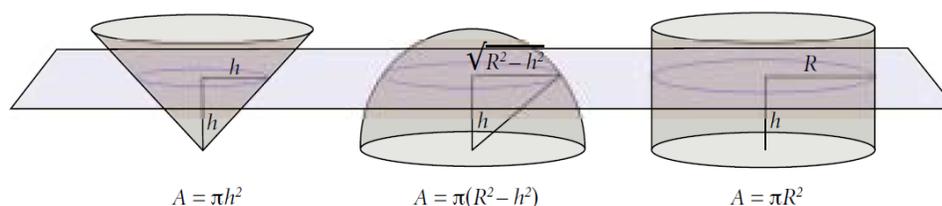
Ahora se sabe que el número  $\pi$  no solo no es racional sino que tampoco es algebraico, es decir, que no es solución de alguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Los números reales que no son algebraicos se llaman trascendentes. La primera demostración de que  $\pi$  es un número trascendente la dio CARL LOUIS FERDINAND VON LINDEMANN en 1882.

El enorme interés que se puede apreciar a través de lo expuesto en esta sección por comprender al número  $\pi$  y los grandes esfuerzos realizados por estimar con gran precisión su valor, se deben a la enorme importancia que ha tenido para el desarrollo de las matemáticas. No sólo el perímetro y el área del círculo están íntimamente relacionados con el número  $\pi$  sino también el volumen y la superficie de la esfera guardan una íntima relación con este número, como demostró el mismo Arquímedes.

### 3.6. El volumen y la superficie de la esfera

Arquímedes obtuvo el volumen y la superficie de una esfera y demostró que el volumen de la esfera es igual a  $2/3$  del volumen del mínimo cilindro que la contiene. También demostró que la superficie de la esfera es igual a  $2/3$  de la superficie de ese mismo cilindro. Estaba tan orgulloso de este resultado que pidió se inscribiera en su tumba. Gracias a que aparente se cumplió su deseo, fue posible localizar su tumba, que estuvo perdida durante varios siglos.

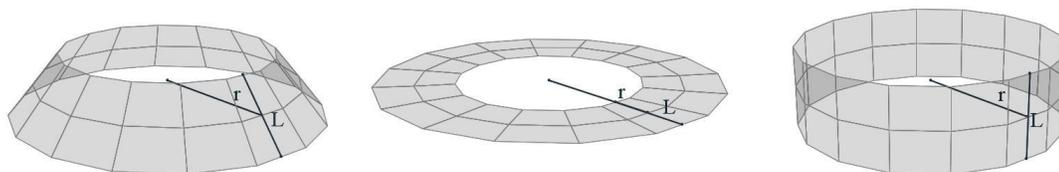
El cálculo del volumen de la esfera utiliza el Teorema de Pitágoras de una manera muy ingeniosa. Consideremos tres cuerpos: media esfera, un cono circular recto y un cilindro circular. Las bases del cono y el cilindro tiene el mismo radio que la esfera ambos tiene altura también igual al radio. Lo que Arquímedes demuestra es que el volumen de la semiesfera más el del cono es igual al del cilindro. Como ya sabía que el volumen del cono es  $\frac{1}{3}$  del del cilindro, resulta que el de la semiesfera debe ser  $\frac{2}{3}$  del del cilindro.



Sea  $R$  el radio común de la semiesfera y de las bases del cono y el cilindro. Coloquemos los tres cuerpos apoyados en un plano horizontal, con los ejes del cono y el cilindro perpendiculares al plano el vértice del cono a la altura de la base de la semiesfera.

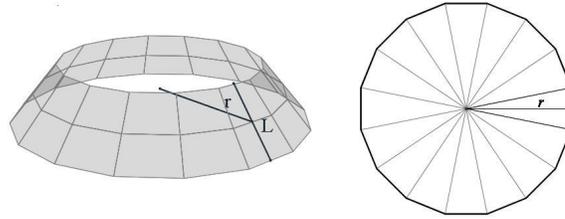
Ahora cortamos los tres cuerpos por un plano horizontal a una altura  $h$  de la base de la semiesfera. Los cortes del plano en el cono y en la semiesfera son círculos de radios  $h$  y  $\sqrt{R^2 - h^2}$  respectivamente. Por tanto la suma de sus áreas es  $\pi h^2 + \pi(R^2 - h^2) = \pi R^2$ , que es el área del corte en el cilindro. Como esto ocurre para todos los planos horizontales, lo que queríamos probar resulta evidente. Esta idea fue utilizada sistemáticamente por BONAVENTURA CAVALIERI (1598 - 1647) calcular los volúmenes de otros cuerpos a partir de las áreas de sus secciones paralelas a un plano, por lo que en la actualidad se reconoce como el *Principio de Cavalieri*.

El cálculo de la superficie de la esfera depende de la siguiente observación. Consideraremos sectores de pirámides cuyas bases son polígonos regulares. Entonces sus caras son trapecios iguales. Todos los sectores de piramidales que tienen el mismo perímetro medio y la misma longitud lateral  $L$ , tienen la misma superficie.

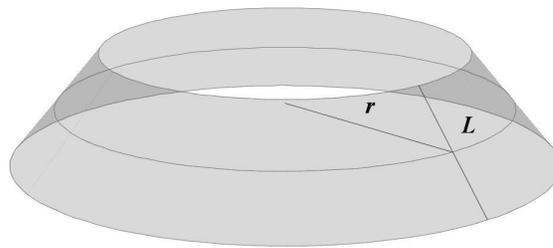


Esto se debe a que el área de los trapecios que los forman depende sólo de  $L$  y de la anchura media. Por tanto el área del sector piramidal depende sólo de la longitud del polígono cuyos vértices son

los puntos medios de las aristas laterales. De hecho el área del sector de pirámide es  $PL$ , donde  $P$  es el perímetro del polígono.



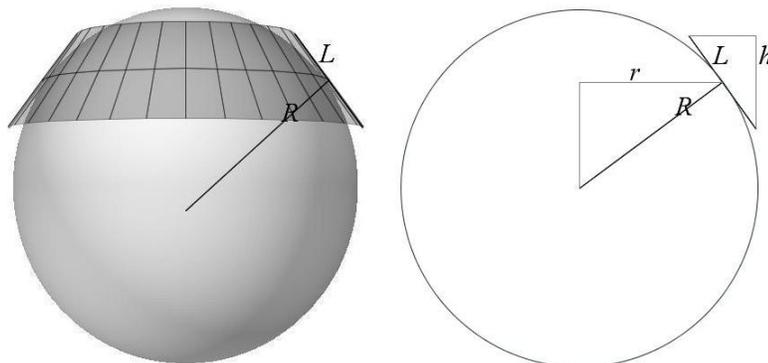
Como esto sucede independientemente del número de lados que tengan las orillas del sector piramidal, lo mismo va a ocurrir con los sectores cónicos.



Los que tengan el mismo radio medio  $r$  y el mismo tamaño de sus elementos laterales  $L$ , tendrán la misma superficie:  $2\pi rL$ .

Para calcular la superficie de la esfera Arquímedes la cubre con  $N$  sectores de cono como el de la figura. La superficie de la cubierta será igual a

$$\sum_{n=1}^N 2\pi r_n L_n$$



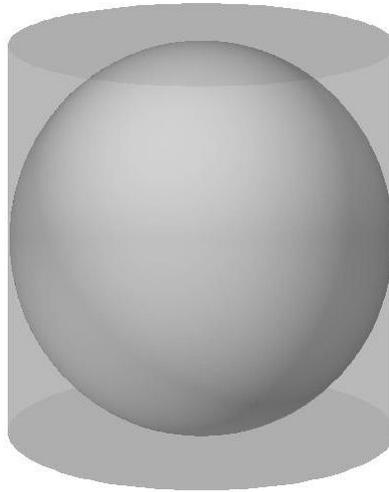
Luego observa que, por semejanza de triángulos:

$$\sum_{n=1}^N 2\pi r_n L_n = \sum_{n=1}^N 2\pi R h_n = 2\pi R \sum_{n=1}^N h_n = 2\pi R H$$

donde  $H$  es la altura total de la cubierta. A medida que la cubierta se hace más fina,  $H$  tiende a  $2R$  y por lo tanto, la superficie de la esfera debe ser

$$4\pi R^2$$

En realidad el argumento de Arquímedes es más riguroso, acota la superficie de la esfera por una sucesión que converge a  $4\pi R^2$  desde arriba y por otra que converge al mismo valor desde abajo. Su método satisface los criterios de rigor más estrictos.



La superficie del cilindro circunscrito a la esfera es la del rectángulo cuyos lados son el perímetro  $2\pi R$  y la altura  $2R$ , más las de las dos tapas, que son círculos de radio  $R$ :

$$2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$$

Por lo tanto la razón entre la superficie de la esfera y la del cilindro circunscrito a ella es  $\frac{2}{3}$ , la misma que entre el volumen de la esfera y el del cilindro circunscrito. Éste es el resultado del que Arquímedes estaba más orgulloso, por lo que pidió se inscribiese en su tumba.

### 3.7. Cálculos de distancias celestes

#### Ideas sobre el cosmos

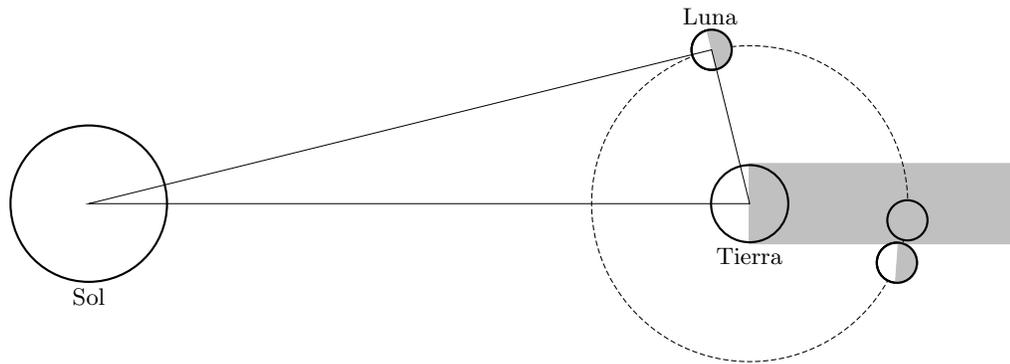
Para poder medir distancias entre objetos celestes es necesario tener una concepción de estos como cuerpos físicos. Mientras se piensa que el Sol es una rueda de fuego que es jalado por una yunta

uno no puede pensar en medir la distancia hacia el Sol. El requisito es entonces que el pensamiento se haya liberado en cierta medida de las explicaciones místicas. Esto inció con TALES DE MILETO (c. 625–547 a.C.), quién – por ejemplo – trató de explicar las inundaciones anuales del Nilo por vientos fuertes. Una explicación que ciertamente es equivocada, pero trata de explicar un fenómeno físico, y en esto se diferencía mucho de los demás explicaciones en aquel entonces, por razones de la misma naturaleza. ANAXIMANDRO (c. 610–547 a.C.), considerado como “alumno” de TALES, dió una explicación diferente para estas inundaciones que era igualmente equivocada. Este pequeño ejemplo muestra como empezó una era diferente: se busca explicar los fenómenos de la naturaleza por la misma naturaleza. Con ello se puede especular y discutir sobre las razones de los fenómenos y se empieza dudar de las explicaciones dogmáticas basadas en creencias.

Para retornar al tema de esta sección: para poder medir distancias entre objetos celestes, es necesario tener primero una concepción natural del cosmos. La palabra “cosmos” origina de la palabra griega para “adornar” ya que se pensaba que la bóveda celeste estaba adornada con el Sol, la Luna, las estrellas y los planetas.

TALES pensaba que la Tierra flota sobre agua, sin decirnos sobre qué se apoyaba el agua. Los hindues a cambio opinaban que la Tierra reposaba sobre una tortuga, esta sobre un elefante, y este último sobre una hoja de Lotus. Nos podemos preguntar en qué se apoyaba la hoja. ANAXIMANDRO fue el primero que resolvió el “problema de soporte”, es decir la cuestión, qué soportaba la Tierra. ANAXIMANDRO pensó que la Tierra flotaba en el aire, aunque la pensaba todavía en forma de un cilindro. Fue PITÁGORAS (ca. 569–475 a.e.c.) el primero que pensó la Tierra como una esfera. ANAXÁGORAS, él que afirmó que la Luna y el Sol eran rocas esféricas y que la Luna reflejaba la luz del Sol. ARISTÓTELES dió varios argumentos en favor de la forma esférica de la Tierra misma. Dos de ellos son: que más en el Norte o en el Sur se podían ver nuevos astros, que en eclipses lunares, cuando la Luna entra a la sombra que proyecta la Tierra, la sombra siempre se delimita por una arco de circunferencia. La sombra de la Tierra es redonda, por lo que se concluye que la Tierra misma lo es también.

El primero que desarrolló un sistema celeste, que colocaba el Sol en el centro fue ARISTARCO DE SAMOS (c. 310–230 a.C.). En este sistema se pensó a la Tierra y a los cinco planetas en aquel entonces conocidos: Mercurio, Venus, Marte, Jupiter y Saturno como esferas que giran alrededor del Sol. Veremos en esta sección primero las ingeniosas ideas de Aristarco: cómo estimó los tamaños relativos entre la Tierra, la Luna y el Sol y las distancias entre ellos. Sus estimaciones daban que el Sol era varias veces más grande que la Tierra y por ello colocó a él en el centro del universo y no la Tierra. Eso fue son casi dos mil años antes de NICOLÁS COPÉRNICO (1473–1543), que acredita de manera justa el sistema heliocéntrico a Aristarco.



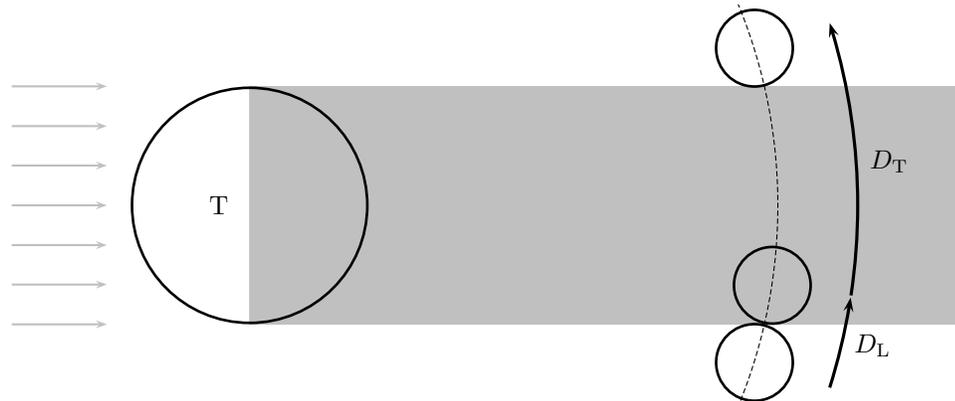
Después veremos la idea de ERATÓSTENES DE CYRENE (c. 275.–194 a.C.), de medir el tamaño de la Tierra y finalmente una idea de GALILEO GALILEI (1564–1642) para medir la altura de las montañas en la Luna.

Todas estas ideas tienen varios aspectos en conjunto: primero, se basan en mediciones que se hicieron en una sola posición de la Tierra, segundo, se mide una distancia inalcanzable de manera indirecta y tercero, las ideas son muy sencillas pero no por eso menos ingeniosas.

### Tamaño relativo entre la Tierra y la Luna

ARISTARCO comparó el diámetro de la Tierra  $D_T$  con el diámetro de la Luna  $D_L$  observando un eclipse lunar. En un eclipse lunar la Tierra se encuentra en medio del Sol y la Luna y esta última pasa en su órbita la sombra que proyecta la Tierra. En esta posición se observa una Luna llena y durante la eclipsis la aparición de un disco lleno empieza reducirse poco a poco hasta que la Luna quede casi totalmente oscurecida.

ARISTARCO comparó dos tiempos: por un lado, el tiempo  $t_L$  que tardaba la Luna desde el primer momento que empieza oscurecerse hasta que quede totalmente oscurecido. Por otro lado observó el tiempo  $t_T$ , que tardó en volverse como luna llena completo después de haberse oscurecido por completo. La situación se muestra esquemáticamente en la siguiente figura.



Como la Luna se mueve más o menos con la misma velocidad todo el tiempo, se tiene que

$$\frac{D_T}{D_L} \approx \frac{t_T}{t_L}.$$

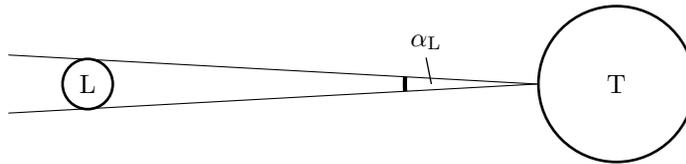
ARISTARCO estimó o midió que  $\frac{t_T}{t_L} \approx 0.36$ . En aquel entonces no había herramientas de medición muy precisas, lo que tal vez explica la diferencia con el valor que hoy se tiene:  $\frac{t_T}{t_L} \approx 0.27$ .

ARISTARCO obtuvo entonces la estimación

$$D_L \approx 0.36D_T.$$

### Tamaño relativo entre el diámetro de la Luna y la distancia hacia ella

El Sol y la Luna se ven desde la Tierra bajo un cierto *diámetro angular*. Ambos cuerpos celestes, el Sol y la Luna, tienen aproximadamente el mismo diámetro angular, pero sólo aproximadamente, ya que ambos varían ligeramente durante el año, ya que la distancia a la Tierra varía.



ARISTARCO midió un diámetro angular de ambos cuerpos celestes de  $2^\circ$ . En realidad, el diámetro angular es aproximadamente  $0.53^\circ$ . La medición se puede hacer con una moneda chica: se tapa el Sol, o lo que para el ojo es más agradable, la Luna con la moneda con el brazo extendido y se le pide a otra persona que mida la distancia  $a$  de la moneda al ojo. Luego se mide el diámetro de la moneda  $d$ . Por semejanza se tiene

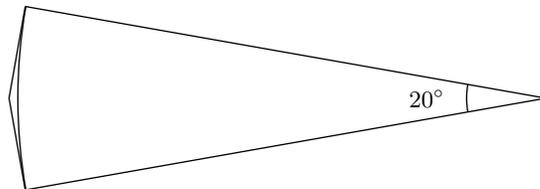
$$d : a = D_L : A_{TL},$$

donde  $A_{TL}$  denota la distancia de la Tierra a la Luna.

Si se toma la medición de Aristarco, entonces se tiene

$$\frac{D_L}{A_{TL}} \approx \frac{2^\circ}{360^\circ} 2\pi,$$

en buena aproximación, ya que la longitud del arco es casi igual al diámetro para ángulos chicos, como se muestra en la siguiente ilustración con un ángulo mucho más grande:  $20^\circ$ .



Dado que el diámetro angular del Sol y la Luna son casi iguales se tiene

$$\frac{A_{TL}}{A_{TS}} \approx \frac{D_L}{D_S},$$

donde  $D_S$  denota el diámetro del Sol y  $A_{TS}$  la distancia de la Tierra al Sol.

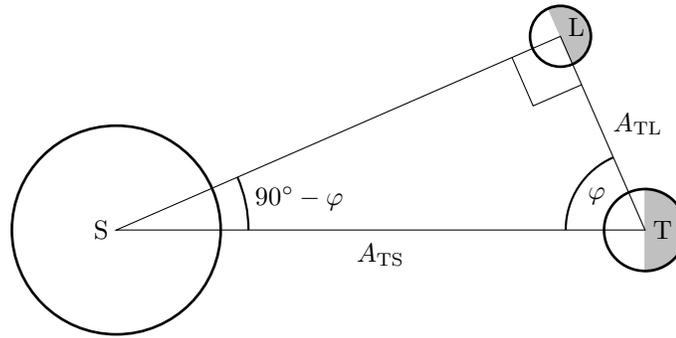
Si se toma a  $\pi \approx 3$ , entonces se obtiene con las mediciones de ARISTARCO las siguientes estimaciones:

$$A_{TL} \approx \frac{360^\circ}{2^\circ \cdot 2\pi} D_L \approx 30 \cdot D_L \approx 10.8 \cdot D_T,$$

$$A_{TS} \approx \frac{360^\circ}{2^\circ \cdot 2\pi} D_S \approx 30 \cdot D_S.$$

### Tamaño relativo entre la distancia hacia el Sol y la Luna

Para poder relacionar todas las distancias, ARISTARCO requirió una idea más. Para ello se imaginó la constelación de Tierra, Luna y Sol cuando es media Luna. En esta situación se ve la Luna dividida en dos mitades: una iluminada y otra oscura, luz y sombra, dividida por una línea circular. El plano que contiene esta línea circular pasa por el ojo del observador en la Tierra. El triángulo  $LTS$  formada por los tres cuerpos, tiene en la Luna  $L$  un ángulo recto. En este momento, ARISTARCO midió el ángulo



La idea de ARISTARCO es muy buena, pero a la vez también muy difícil de llevar a cabo con precisión. Medir un ángulo chico es bastante fácil, pero medir un ángulo muy cercano a  $90^\circ$  es bastante difícil si no se cuenta con herramientas de medición de precisión. Además es difícil determinar el momento preciso cuando sucede que el ángulo  $SLM$  es exactamente un ángulo recto. ARISTARCO midió un ángulo de  $\varphi \approx 87^\circ$ , cuando en realidad es  $\varphi = 89.95^\circ$ . Eso condujo a que el Sol y la distancia hacia ella se estimó muy por debajo del valor real.

Con la aproximación de ángulos chicos se tiene ahora

$$\frac{A_{TL}}{A_{TS}} \approx \frac{90^\circ - \varphi}{360^\circ} 2\pi.$$

Con la medición de ARISTARCO se obtiene entonces

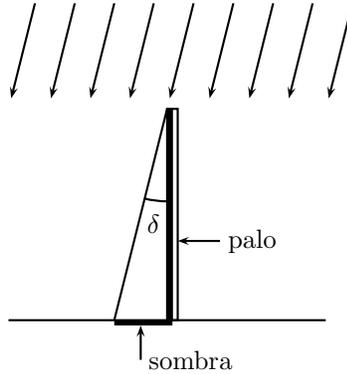
$$A_{TS} \approx 20 \cdot A_{TL} \approx 216 \cdot D_T$$

$$D_S \approx \frac{1}{30} \cdot A_{TS} \approx 7.2 \cdot D_T$$

Se ve que las relaciones están bien observados: el Sol es más grande que la Tierra, la Luna más chica, y el Sol más lejos que la Luna. Eso explica por qué ARISTARCO colocó en su sistema el Sol en el centro del universo. Si ARISTARCO hubiera tenido unas herramientas e medición, entonces habría obtenido estimaciones muy buenas con las sencillas, pero ingeniosas ideas de relacionar los tamaños. Con ello concluimos ahora lo que se refiere al trabajo de ARISTARCO.

### El tamaño de la Tierra

La primera medición del tamaño de la Tierra se atribuye a ERATÓSTENES (276–194 a. C.). Escuchó que el día del solsticio de verano un palo vertical en Siena (una ciudad que hoy se llama Asuan, en Egipto) no deja sombra, es decir el Sol se encuentra justo en el Cenit. Siena se encuentra casi exactamente en el Sur de Alejandría, lugar en el cual se encontraba ERATÓSTENES. Él midió entonces el ángulo  $\delta$  entre un palo vertical y la línea recta entre la punta del palo y su sombra, es decir el ángulo de los rayos de Sol con la vertical en Alejandría.



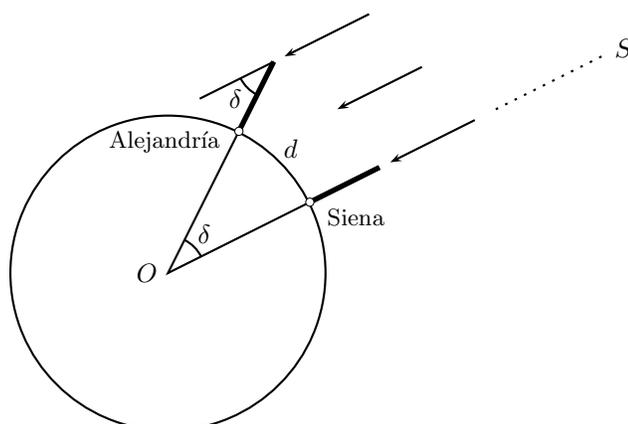
ERATÓSTENES midió que el ángulo  $\delta$  era  $\frac{1}{50}$  de un ángulo completo, es decir

$$\delta = \frac{1}{50} 360^\circ = 7.2^\circ.$$

Si se conoce la distancia  $d$  entre Alejandría y Siena, entonces se puede calcular la circunferencia  $U_T$  de la Tierra por

$$\frac{\delta}{360^\circ} = \frac{d}{U_T}.$$

Esto lo explica la siguiente figura.



Para estimar la distancia entre Alejandría y Siena, ERATÓSTENES se basó en los relatos de los comerciantes que contaban que recorrían la distancia en caravanas en 50 días y estimaban que se trasladaban como 100 “estadios” cada día. El “estadio” es una medida antigua y hoy no se sabe bien cuánto valía, pero se piensa que debería ser entre 157 m y 211 m.

La distancia entre Alejandría y Siena se estimaba entonces en 5000 estadios y por ello la circunferencia terrestre por

$$U_T = 50 \cdot 5000 \text{ estadios} = 250\,000 \text{ estadios},$$

es decir entre 39 250 km y 52 750 km, una estimación muy buena si uno piensa en la sencillez de la medición.

Más tarde se perdió el conocimiento de ERATÓSTENES y Cristobal Colón emprendió su viaje hacia la India pensando que la Tierra era mucho más chica. Si hubiera conocido la medición de ERATÓSTENES, tal vez nunca hubiera zarpado. Se volvió la imaginación nuevamente más antropocentrista y con ello geocentrista.

## La altura de las montañas en la Luna

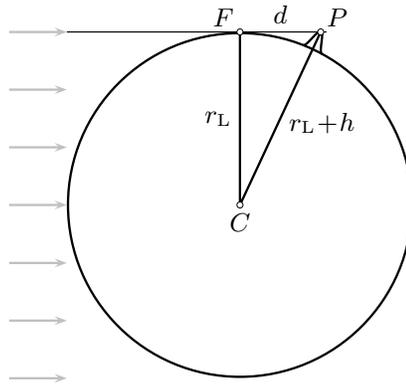
Muy influyente para la Edad Media eran los libros de Aristóteles. En ciertos asuntos, él se basaba en PLATÓN. Así, al menos en parte, en su cosmología. Según una especulación de PLATÓN, la materia está compuesta por triángulos que forman sólidos regulares. Así se explicó la existencia de los cuatro elementos y el quinto sólido (el dodecaedro) lo atribuyeron al cosmos, a la composición de las estrellas, la Luna, el Sol y los planetas.

Por ello, cuñado GALILEO GALILEI usa por primera vez, en enero de 1610, de observar el cielo nocturno con un telescopio sus descubrimientos chocan con toda esta teoría, ya que observó que Jupiter tenía cuatro lunas, que la vía láctea estaba compuesta por miles de estrellas, que el Sol tenía manchas y que la superficie de la Luna no estaba lisa sino presentaba irregularidades, ver las siguientes dos ilustraciones. La izquierda es de GALILEI misma, la derecha es moderna.



GALILEI interpretó estas irregularidades como las sombras que proyectan montañas. Midió la altura de estas montañas al observar la media luna de la siguiente manera: Los rayos de Sol iluminan los picos más altas aunque las valles ya se oscurecieron por completo. Por ello se puede observar los picos más altos más allá que el diámetro. En la ilustración arriba se señaló el diámetro y los picos más altos iluminados del lado oscuro. GALILEI estimó que la distancia de los picos que todavía se iluminan distan un ventésimo del diámetro de la Luna.

La siguiente ilustración muestra un esquema de la situación y explica el cálculo correspondiente.



Con la estimación de la distancia  $d \approx \frac{1}{10}r_L$  se puede calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo  $CPF$ :

$$r_L + h = \sqrt{r^2 + d^2} \approx \sqrt{r^2 + \frac{1}{100}r^2} = \sqrt{1.01}r \approx 1.005r.$$

Por ello se obtiene

$$h = 0.005r,$$

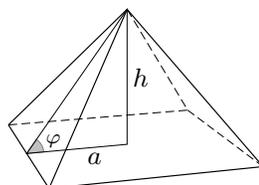
lo que equivale a una altura de  $h = 8268$  m. GALILEI afirma que en la Tierra no hay montaña de semejante altura, pero esto hay que atribuir al hecho que las mediciones de la Tierra apenas se empiezan a hacer unos 100 años después y el Himalaya se midió a mediados del siglo XIX. Actualmente se sabe que las montañas más altas en la Luna se erigen unos  $5500$  m sobre la superficie. El cálculo realizado por Galileo dio un valor correcto en cuanto al orden de magnitud.

## 3.8. La trigonometría

### Antecedentes

Con *trigonometría* nos referimos hoy día al cálculo de longitudes y ángulos en triángulos. La etimología es clara: *gon* significa en griego “ángulo”, *tri* significa “tres” y *metría* significa “medición”, así que el *trigon* es el triángulo, y la trigonometría es la medición de los triángulos. Pero la palabra es una creación de la edad media: aparece por primera vez en un libro de 1590.

Los inicios de lo que hoy llamamos trigonometría son muy antiguos, provienen de los egipcios: ellos calculaban el *sequed* de pirámides, un número ínimamente relacionado con nuestra noción de *pendiente*: el *sequed* es el número de palmas (anchos de mano) horizontales para subir 7 palmas verticales.



En la figura anterior, el *sequed* de la pirámide es  $s = \frac{7a}{h}$ .

Hoy podemos ver el *sequed* —si ignoramos el factor 7 en la definición— como la cotangente del ángulo  $\varphi$  entre los planos que forman un costado de la pirámide y su base. Pero esto es una interpretación moderna y da una falsa impresión. En realidad el *sequed* sólo utiliza la semejanza de triángulos, no relaciona los catetos con el ángulo, como lo hacen las modernas funciones trigonométricas.

La trigonometría, como muchas áreas de las matemáticas se desarrolló para poder llevar a cabo ciertos cálculos con precisión y eficacia. En este caso, el promotor principal del desarrollo fue la astronomía. Se pensaba que los objetos celestes se movían en círculos alrededor de la Tierra y los astrónomos querían poder calcular sus posiciones y hacer predicciones de los futuros eclipses. Para ello era necesario poder relacionar los ángulos con las proporciones entre los lados correspondientes de los triángulos.

### Trigonometría esférica

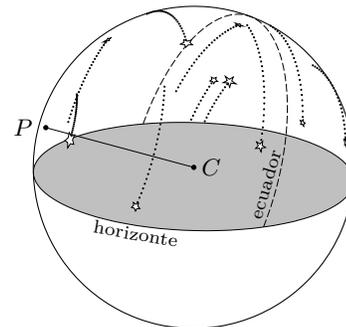
La trigonometría que conocemos hoy es la trigonometría plana. Es interesante saber que su origen está en la trigonometría esférica, que se desarrolló mucho antes. Los griegos como muchas culturas observaban el cielo y crearon diferentes sistemas para explicar los movimientos de los cuerpos celestes.

Al observar el cielo nocturno desde un llano, uno se percató de que las estrellas se mueven respecto a los árboles o las montañas. Nuestra vista nos muestra una bóveda celeste delimitada por el horizonte.

No es difícil observar una regularidad en este movimiento: las estrellas se mueven como se estuvieran pegadas sobre una esfera gigante, el *orbe celeste*, que gira lentamente por un eje que pasa por el punto  $C$  en donde está el observador.

El movimiento es de  $15^\circ$  a la hora, por lo que el orbe celeste da una vuelta completa al día.

Hay una dirección que queda fija: el *polo celeste*  $P$ , que es el punto del orbe celeste por el cual este gira. El plano perpendicular al eje de rotación intersecta el orbe en el *ecuador celeste*.

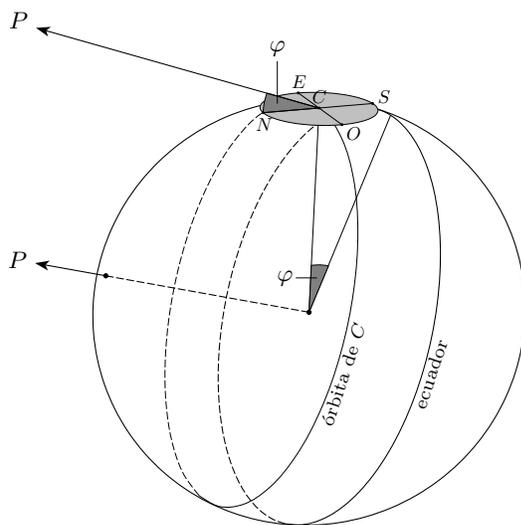
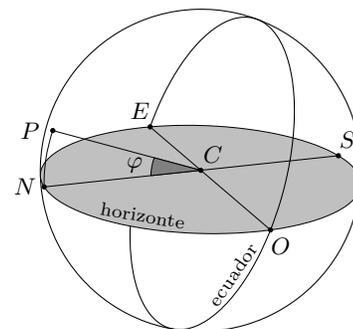


Una estrella cerca del polo celeste casi no se mueve. En el hemisferio norte hay una estrella muy cercana a este punto ideal fijo: la *estrella polar*. En el hemisferio sur no hay una estrella muy luminosa cerca, pero una constelación, llamada *Cruce* (o Cruz del Sur) que permite la determinación del polo celeste visible con facilidad.

Dado que el polo magnético de la Tierra se encuentra muy cercano al polo norte de la rotación de la Tierra, la estrella polar en el hemisferio norte sirve para ubicarse tanto como una brújula.

El orbe celeste gira de tal manera que las nuevas estrellas aparecen en el este y otras desaparecen en el oeste.

Si cambiamos en nuestro pensamiento el punto de vista y pensamos que el orbe celeste es fijo y la Tierra se rota por su eje, entonces hay una explicación fácil para el ángulo  $\lambda$  del polo celeste  $P$  sobre el horizonte:  $\varphi = \sphericalangle PCN$ .



El ángulo  $\varphi$  es la *latitud* del punto  $C$  donde se encuentra el observador, es decir el ángulo entre la recta  $CZ$ , donde  $Z$  es el centro de la Tierra y el plano que contiene el ecuador terrestre.

La figura lateral muestra la situación. La esfera es ahora la Tierra y el disco gris es el horizonte con los cuatro puntos cardinales. Dado que las estrellas están muy lejos, el eje de rotación de la Tierra es en buena medida paralela a la recta que une el espectador con el polo celeste o la estrella polar.

En el primer paso de simplificar la situación, se puede uno imaginar de estar en el polo norte. Ahí las estrellas siempre están a la misma altura. El horizonte coincide con el ecuador celeste. Dicho de

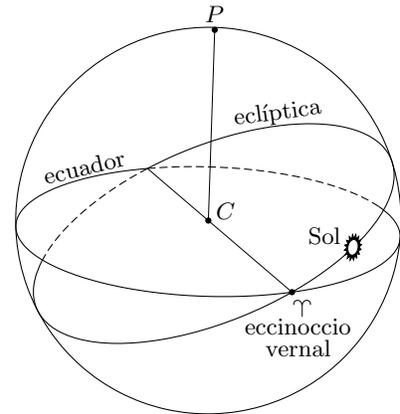
otro modo: podemos así ignorar la rotación de la Tierra sobre su propio eje.

Ahora veremos el movimiento aparente del Sol. Si el Sol fuera opaco, podríamos ver las estrellas a un lado del Sol, al igual que lo podemos cuando está la Luna. Dado que el Sol es mucho más luminoso que las estrellas, no podemos verlas de día. Pero podemos calcular la posición del Sol en el orbe celeste.

Resulta que el Sol se mueve muy despacio por el orbe celeste. Un poco menos que  $1^\circ$  cada día. Después de un año completó una vuelta. Claro, el origen de este movimiento aparente es que la Tierra se mueve alrededor del Sol y por ello cambian las estrellas, que están muchísimo más lejos, atrás del Sol.

El Sol sigue una círculo máximo que se llama *eclíptica* y que está inclinado por  $23.44^\circ$  respecto al ecuador. Recordemos: el ecuador resulta por el movimiento de la Tierra por su propio eje, la eclíptica por el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

El eje de rotación de la Tierra está inclinado por  $23.44^\circ$  respecto al plano en donde se mueve la Tierra alrededor del Sol.



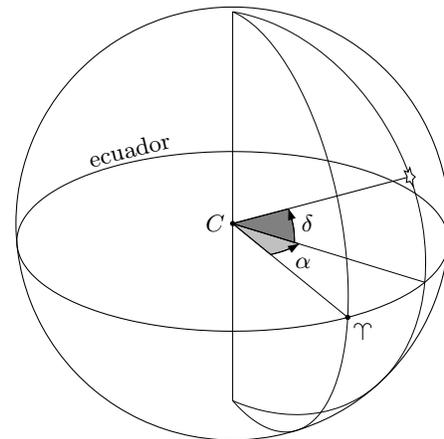
Los dos planos, el que contiene el ecuador y el que contiene la eclíptica se intersectan en una recta. Cuando el Sol está en uno de los dos puntos de esta recta, en la Tierra ocurren los *equinoccios* una vez en primavera, el Sol está entonces en el punto  $\Upsilon$ , y otra vez en otoño. En cada uno de los dos equinoccios, el día y la noche son igual de largos en toda la tierra. Dado que el eje de rotación está inclinada respecto a la eclíptica, la Tierra expone medio año más el hemisferio norte y la otra mitad más el hemisferios sur. Esta desigualdad produce las estaciones en el año.

La ubicación de las estrellas en el orbe celeste se suele dar con respecto al ecuador. Se dan dos coordenadas: la declinación  $\delta$  y la ascensión recta  $\alpha$ .

La *declinación*  $\delta$  es el ángulo que la estrella se eleva sobre el ecuador celeste, visto desde el centro  $C$ . Para estrellas en el hemisferio norte y sur la latitud es positiva resp. negativa.

La *ascensión recta*  $\alpha$  es el ángulo que se mide a partir del equinoccio de primavera  $\Upsilon$  en sentido matemático, es decir en contra de las manecillas del reloj si vemos el orbe desde arriba.

Las dos coordenadas, declinación y ascensión recta, conforman las coordenadas ecuatoriales.

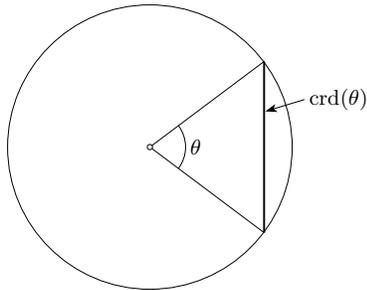
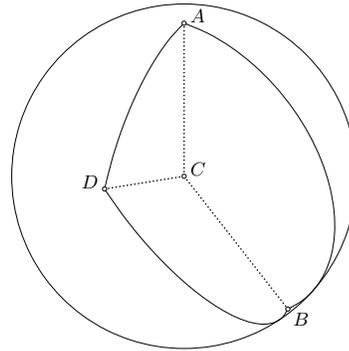


En nuestro sistema solar, todos los planetas se mueven en planos que tienen poca inclinación respecto al plano en el que se mueve la Tierra. Por ello, los planetas se ven desde la Tierra cercano a la eclíptica, en una cinta que va desde  $5^\circ$  abajo a  $5^\circ$  arriba. Esta cinta alrededor de la eclíptica se llama *zodiaco*.

Para dar la posición de un planeta se dan por ello coordenadas con respecto a la eclíptica. Estas coordenadas se llaman *latitud* y *longitud*. Calcular de unas coordenadas a las otras constituye uno de los principales problemas de la trigonometría esférica. Véamos un problema sencillo: la longitud del Sol indica el día del año en el cual estamos. Se debe calcular la declinación y la ascensión recta del Sol a partir de su longitud  $\lambda$ .

El primero que escribió un libro para resolver estos problemas es MENELAO DE ALEJANDRÍA (ca. 70–130). De su vida se sabe poco. PTOLOMEO registró observaciones que hizo MENELAO en Roma en el año 98. Escribió el libro *Sphaerica* en el que introduce el concepto de triángulo esférico.

Los lados de un triángulo esférico son arcos de círculos máximos. La figura muestra un triángulo esférico  $ABD$ . El punto  $C$  es el centro de la esfera.



Para entender lo que ahora se llama el Teorema de MENELAO, hay que saber que los griegos calculaban las cuerdas en función del ángulo que las subtende.

$\text{crd}(\theta)$  denota la cuerda que se ve desde el centro del círculo bajo un ángulo  $\theta$ .

En el tercer tomo de su libro demuestra una proposición, que en la actualidad se conoce como el Teorema de MENELAO.

Se intersecta el triángulo con un arco de círculo máximo y obtiene así los puntos  $E$  sobre  $BD$ ,  $F$  sobre  $AD$  y  $G$  sobre  $AB$ .

El Teorema de MENELAO dice lo siguiente:

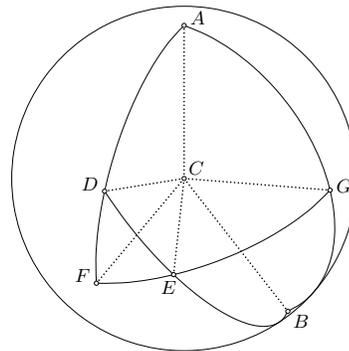
$$\frac{\text{crd}(2\angle ACG)}{\text{crd}(2\angle GCB)} = \frac{\text{crd}(2\angle ACF)}{\text{crd}(2\angle FCD)} \cdot \frac{\text{crd}(2\angle DCE)}{\text{crd}(2\angle ECB)}$$

Hoy en día usaríamos la función seno, en vez de las cuerdas y el Teorema se ve así:

$$\frac{\text{sen}(\angle ACF)}{\text{sen}(\angle FCD)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle DCE)}{\text{sen}(\angle ECB)} \cdot \frac{\text{sen}(\angle BCG)}{\text{sen}(\angle GCA)} = 1.$$

Similarmente demuestra

$$\frac{\text{crd}(2\angle ACB)}{\text{crd}(2\angle ACG)} = \frac{\text{crd}(2\angle DCB)}{\text{crd}(2\angle DCE)} \cdot \frac{\text{crd}(2\angle FCE)}{\text{crd}(2\angle FCG)}. \tag{3.19}$$

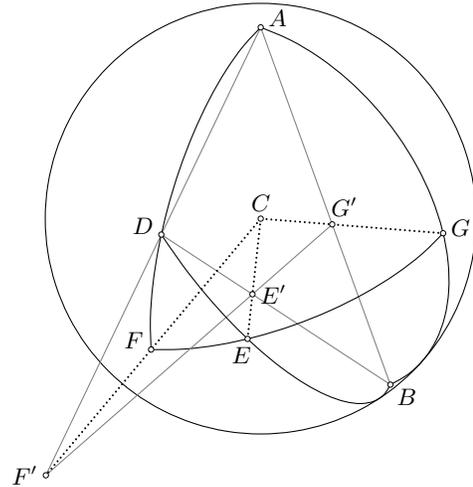


Para demostrarlo, considera el plano por los puntos del triángulo original  $ABD$  y proyecta los otros tres puntos desde  $C$  a este plano. Se obtienen así los puntos  $E'$ ,  $F'$  y  $G'$ .

MENELAO usa sin demostrar la afirmación análoga en el plano:

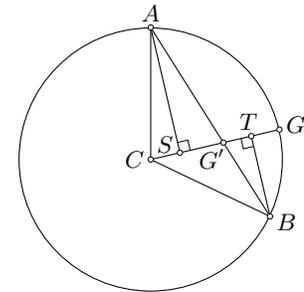
$$\frac{AG'}{G'B} = \frac{AF'}{F'D} \cdot \frac{DE'}{E'B}.$$

El hecho de que la usó sin demostrar indica que ya se conocía antes. Pero como es la primera fuente donde aparece, se considera hoy también como Teorema de MENELAO. La demostración es fácil y elemental al usar homotecias.



Luego usa que  $\frac{AG'}{G'B} = \frac{\text{crd}(2\angle ACG)}{\text{crd}(2\angle GCB)}$ . Esto se ve al considerar el círculo que pasa por  $A$ ,  $G'$  y  $B$ : Se erigen perpendiculares a  $CG$  por  $A$  y por  $B$ , entonces se obtienen triángulos semejantes  $ASG'$  y  $BTG'$ . Por ello se tiene

$$\frac{AG'}{G'B} = \frac{AS}{BT} = \frac{2AS}{2BT} = \frac{\text{crd}(2\angle ACG)}{\text{crd}(2\angle GCB)}.$$



Similarmente se obtiene  $\frac{AF'}{F'D} = \frac{\text{crd}(2\angle ACF)}{\text{crd}(2\angle FCD)}$  y también  $\frac{DE'}{E'B} = \frac{\text{crd}(2\angle BCG)}{\text{crd}(2\angle GCA)}$ . Con ello queda demostrado el Teorema de MENELAO.

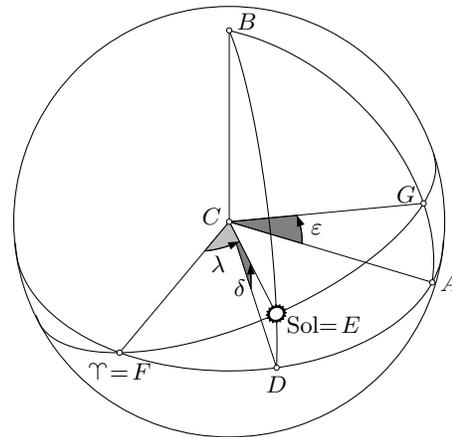
Véamos ahora cómo se aplica este último resultado para determinar la declinación  $\delta$  del Sol a partir de su latitud  $\lambda$ .

Para ello se usa el polo norte celeste  $B$ , el Sol será el punto  $E$  y  $F = \Upsilon$  el punto vernal de primavera. El círculo máximo por  $F$  y  $D$  es el ecuador y aquel por  $F$  y  $E$  la eclíptica. Además se usa el círculo máximo que es perpendicular al ecuador y a la eclíptica y que intersecta a estos en  $A$  y  $G$  respectivamente.

Entonces se tiene la situación del Teorema de MENELAO. Nótese que  $\angle ACG = \varepsilon = 23.44^\circ$  y que  $\angle ACB = \angle FCG = \angle DCB = 90^\circ$ . Al sustituirlo en (3.19) se obtiene

$$\frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2\varepsilon)} = \frac{\text{crd}(180^\circ)}{\text{crd}(2\delta)} \cdot \frac{\text{crd}(2\lambda)}{\text{crd}(180^\circ)},$$

de donde se obtiene:



$$\text{crd}(2\delta) = \frac{\text{crd}(2\varepsilon) \cdot \text{crd}(2\lambda)}{2r}.$$

En la notación moderna esto es

$$\text{sen}(\delta) = \text{sen}(\varepsilon) \text{sen}(\lambda).$$

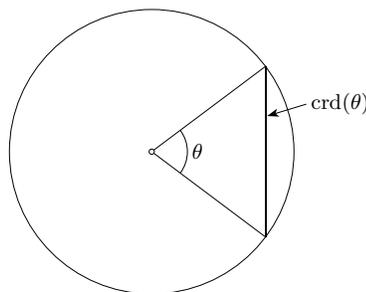
### Las primeras tablas trigonométricas

Del primero que se sabe que construyó algo parecido a lo que hoy llamamos *tablas trigonométricas* fue HIPARCO DE NICEA (190–120 a.e.c). A HIPARCO se le considera uno de los más grandes astrónomos de la antigüedad. Desarrolló parte de la trigonometría esférica, la cual consideraremos más adelante en este capítulo, y se le conoce por haber descubierto la precesión de los equinoccios, es decir que el eje de rotación de la Tierra no está fijo sino que gira lentamente. Sin duda HIPARCO tenía una extrema destreza matemática.



HIPARCO DE NICEA

Se sabe que calculó una tabla de cuerdas, es decir, para diferentes ángulos  $\theta$ , la longitud de la cuerda que abarca el ángulo  $\theta$  en un círculo de cierto radio.



$\text{crd}(\theta)$  denota la cuerda que se ve desde el centro del círculo bajo un ángulo  $\theta$ .

Lamentablemente casi todos los trabajos de HIPARCO se perdieron. Se piensa que la siguiente tabla podría ser una buena reconstrucción de su tabla de cuerdas.

$\theta$	$\text{crd}(\theta)$	$\theta$	$\text{crd}(\theta)$	$\theta$	$\text{crd}(\theta)$	$\theta$	$\text{crd}(\theta)$	$\theta$	$\text{crd}(\theta)$
$0^\circ$	0	$37^\circ 30'$	2210	$75^\circ$	4186	$112^\circ 30'$	5717	$150^\circ$	6641
$7^\circ 30'$	450	$45^\circ$	2631	$82^\circ 30'$	4533	$120^\circ$	5954	$157^\circ 30'$	6743
$15^\circ$	897	$52^\circ 30'$	3041	$90^\circ$	4862	$127^\circ 30'$	6166	$165^\circ$	6817
$22^\circ 30'$	1341	$60^\circ$	3438	$97^\circ 30'$	5169	$135^\circ$	6352	$172^\circ 30'$	6861
$30^\circ$	1780	$67^\circ 30'$	3820	$105^\circ$	5455	$142^\circ 30'$	6511	$180^\circ$	6876

Hay varios aspectos que deben observarse. Los cálculos se hacían sobre un círculo con un radio muy grande. Podemos obtener el radio de ese círculo usando  $r = \text{crd}(60^\circ)$ , que arroja el valor  $r = 3438$ . Los valores de  $\text{crd}(\theta)$  aparecen redondeados a números enteros. La tabla no resulta muy útil para fines prácticos ya que la diferencia entre dos ángulos consecutivos en ella es de  $7^\circ 30'$ , que es un intervalo demasiado grande para realizar cálculos con buena precisión. Probablemente se usaba combinada con interpolaciones lineales.

No sabemos cómo llegó HIPARCO a estos valores. Sobre el número 3438 hay una especulación: Si se subdivide el ángulo completo de  $360^\circ$  en minutos se obtiene 21 600 minutos y

$$\frac{21\,600}{2\pi} \approx 3\,438.$$

Esto permite comparar la longitud de arcos medidos en minutos directamente con la longitud de las cuerdas. Por ejemplo, la cuerda correspondiente al arco de  $60^\circ = 3600'$  tiene una longitud de 3438, mientras el arco tiene una longitud de 3600.

Del primero que tenemos indicios claros de cómo calculó los valores en una tabla de cuerdas es de CLAUDIO PTOLOMEO, (98–162).



CLAUDIUS PTOLOMEO

Se sabe poco de la vida de PTOLOMEO. Trabajó como astrónomo en Alejandría y elaboró un atlas de las estrellas. Para ello retomó datos de HIPARCO. Se sabe que hizo observaciones del año 127 al 141. El nombre Claudio, en latín Claudius, indica que su familia, de ascendencia griega, era respetada por considerárseles ciudadanos romanos. Escribió un libro cuyo título original era “La Compilación Matemática”, pero pronto se le llamó “La Gran Compilación”. Al traducirlo al árabe se le nombró “al-majisti” y hoy lo conocemos como el “Almagest”. En 13 tomos describe el movimiento del Sol, la Luna y los planetas conocidos en aquel entonces, todo ello basado en una teoría geocéntrica, que

perduró hasta que Copernico redescubriera la teoría heliocéntrica de ARISTARCO.

También escribió un libro llamado “Geografía” en donde describe, en 8 tomos, cómo hacer un mapa y da la ubicación de los lugares más importantes del mundo conocido entonces, con sus longitudes y latitudes. Por mucho tiempo, la suya fue la única manera conocida de hacer un mapamundi.

Para elaborar una mejor tabla de cuerdas, PTOLOMEO usa un resultado que ahora lleva su nombre: el *Teorema de PTOLOMEO*, aunque es muy posible que éste fuera conocido desde antes: En un cuadrilátero  $ABCD$  inscrito en un círculo, el producto de las diagonales  $AC \cdot BD$  es igual a la suma de los productos de los lados opuestos  $AB \cdot CD + BC \cdot DA$ , es decir

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$

El Teorema de PITÁGORAS resulta un caso particular de este teorema, al tomar el cuadrilátero como rectángulo. El Teorema de PTOLOMEO se puede demostrar de manera elemental, como veremos a continuación.

Sea  $E$  sobre la diagonal  $AC$  aquel punto que satisficiera  $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DBA$ . De ahí se sigue que  $\sphericalangle CBD = \sphericalangle EBA$ , que son los ángulos indicados con un arco sencillo en la figura.

Además se tiene que  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ , dado que son ángulos sobre la cuerda  $BC$ . Estos ángulos se muestran con arcos dobles en la figura. Similarmente se tiene  $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$ , dado que son ángulos sobre la cuerda  $AB$ .

De ahí se sigue que los triángulos  $BAE$  y  $BDC$  son semejantes y también lo son  $BCE$  y  $BDA$ , ya que coinciden en los tres ángulos.

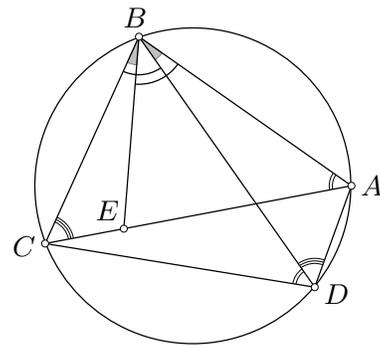
Por tanto

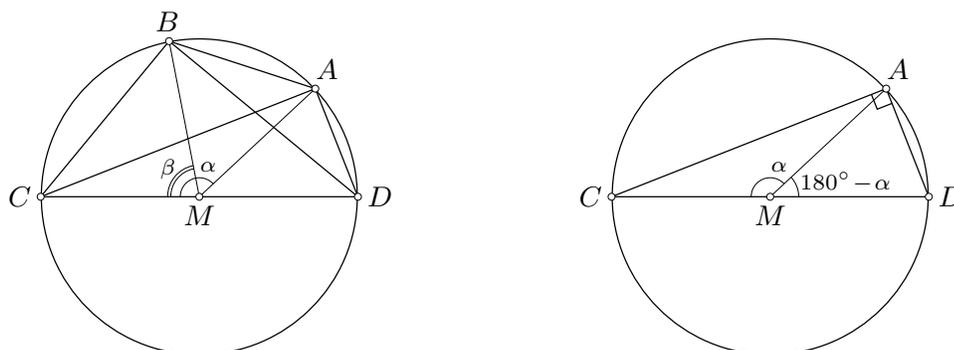
$$\frac{AB}{AE} = \frac{DB}{DC} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{CE} = \frac{BD}{DA}$$

de donde

$$\begin{aligned} AB \cdot CD &= BD \cdot AE \\ BC \cdot DA &= BD \cdot CE \\ AB \cdot CD + BC \cdot DA &= BD \cdot (AE + CE) = BD \cdot AC. \end{aligned}$$

Con este Teorema, PTOLOMEO podía calcular la cuerda correspondiente a la diferencia de dos ángulos cuyas cuerdas ya conocía, es decir, si ya había calculado  $a = \text{crd}(\alpha)$  y  $b = \text{crd}(\beta)$  entonces podía obtener  $\text{crd}(\alpha - \beta)$ . Para ver esto consideramos un diámetro  $CD$  de un círculo con centro  $M$  y colocamos  $A$  y  $B$  sobre la circunferencia de tal manera que  $\sphericalangle CMA = \alpha$  y  $\sphericalangle CMB = \beta$ , como se puede ver en la figura del lado izquierdo.





Se tiene ahora que

$$\begin{aligned} AB &= \text{crd}(\alpha - \beta), & AC &= \text{crd}(\alpha), & BC &= \text{crd}(\beta), \\ CD &= 2R, & DA &= \text{crd}(180^\circ - \alpha), & BD &= \text{crd}(180^\circ - \beta). \end{aligned}$$

Nótese que  $\text{crd}(180^\circ - \alpha)$  y  $\text{crd}(180^\circ - \beta)$  se pueden calcular con el Teorema de PITÁGORAS – véase la figura anterior a la derecha – como sigue:

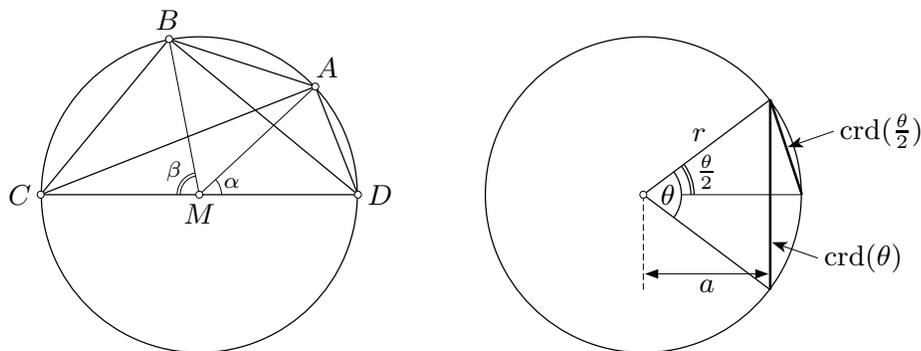
$$\text{crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4r^2 - \text{crd}(\alpha)^2}.$$

De la relación de PTOLOMEO se sigue que

$$\text{crd}(\alpha - \beta) = AB = \frac{AC \cdot BD - BC \cdot DA}{CD} = \frac{\text{crd}(\alpha) \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \text{crd}(180^\circ - \alpha)}{2r},$$

donde el lado derecho se puede calcular cuando se conocen  $\text{crd}(\alpha)$  y  $\text{crd}(\beta)$ .

Un argumento completamente similar muestra que se puede calcular  $\text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta))$ , y por lo tanto  $\text{crd}(\alpha + \beta)$ , si se conocen  $\text{crd}(\alpha)$  y  $\text{crd}(\beta)$ . Para ello, considerando la siguiente situación



se obtiene la fórmula

$$\text{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = AB = \frac{\text{crd}(180^\circ - \alpha) \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\alpha) \text{crd}(\beta)}{2r}.$$

Además, desde la época de ARQUÍMEDES, se sabía cómo calcular el apotema de una cuerda y de ahí la cuerda de la mitad del ángulo dado – ver la figura anterior derecha. Este cálculo queda así:

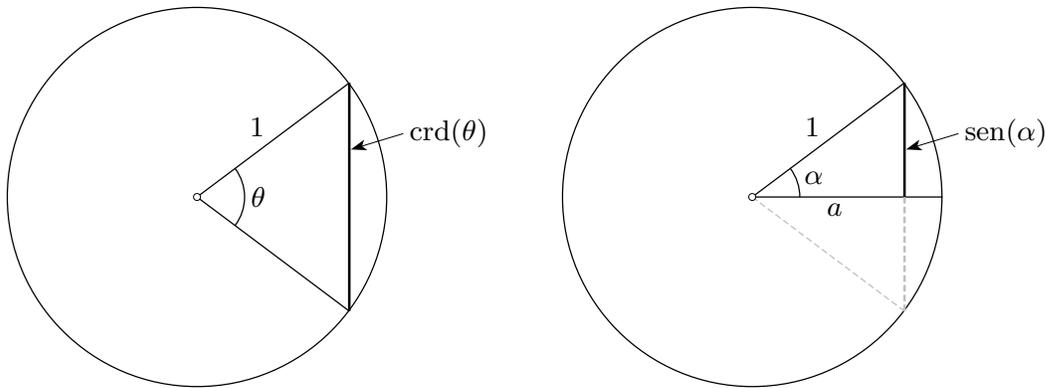
$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\text{crd}(\theta)}{2}\right)^2},$$

$$\text{crd}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\text{crd}(\theta)}{2}\right)^2 + (1-a)^2}.$$

Los griegos conocían  $\text{crd}(72^\circ)$  y  $\text{crd}(60^\circ)$ . A partir de esto podían obtener  $\text{crd}(18^\circ)$  y  $\text{crd}(15^\circ)$ . Con la fórmula para la sustracción de ángulos podían calcular  $\text{crd}(3^\circ)$  y con la fórmula para la adición podían obtener  $\text{crd}(k \cdot 3^\circ)$  para cualquier número natural  $k = 0, 1, \dots, 60$ .

Finalmente PTOLOMEO estimó  $\text{crd}(1^\circ)$  y elaboró después una tabla de cuerdas para los múltiplos de medio grado, es decir para los ángulos  $0^\circ, 30', 1^\circ, \dots, 179^\circ 30', 180^\circ$ . Su tabla daba las cuerdas en el sistema sexagesimal, no en enteros como la de Hiparco.

En la India se empezaron a calcular tablas del seno a partir del siglo V. El primero en hacerlo fue ARYABHATA (ca. 476–550). Se elaboraron sofisticados algoritmos para calcular muchos valores a partir de unos pocos, similarmente a lo que vimos para la tabla de cuerdas de PTOLOMEO. La relación entre las dos tablas es bastante directa.



Se tiene que

$$\text{crd}(\theta) = 2 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{y} \quad \text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2} \text{crd}(2\alpha).$$

Por ello realmente no importa cuál de las dos tablas se usa. Hoy día ya sólo se conoce el seno, las cuerdas han pasado al olvido. Además se definieron nuevas funciones como el coseno

$$\cos(\alpha) = a, \quad \text{y} \quad \text{vers}(\alpha) = 1 - a$$

donde  $a$  es el apotema en la figura de arriba a la derecha. Si reemplazamos las cuerdas por los senos en la fórmula

$$\text{crd}(\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}(\alpha) \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}(\beta) \text{crd}(180^\circ - \alpha)}{2r}$$

y usamos  $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\psi = \frac{\beta}{2}$  y  $r = 1$ , obtenemos:

$$2 \text{sen}(\varphi - \psi) = \frac{2 \text{sen}(\varphi) 2 \cos(\psi) - 2 \text{sen}(\psi) 2 \cos(\varphi)}{2}$$

porque  $\text{crd}(180^\circ - \beta) = 2 \text{sen}(\frac{180^\circ - \beta}{2}) = 2 \text{sen}(90^\circ - \psi) = 2 \text{cos}(\psi)$ . De ahí se sigue que

$$\text{sen}(\varphi - \psi) = \text{sen}(\varphi) \text{cos}(\psi) - \text{sen}(\beta) \text{cos}(\alpha),$$

que es la fórmula conocida del seno de la diferencia de dos ángulos. De la fórmula para  $\text{crd}(\alpha + \beta)$  se obtiene análogamente

$$\text{cos}(\varphi + \psi) = \text{cos}(\varphi) \text{cos}(\psi) - \text{sin}(\varphi) \text{sin}(\psi).$$

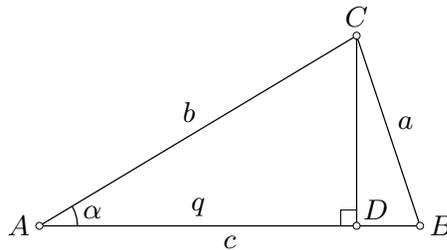
## Ley de los senos y Ley del coseno

Estas dos leyes forman parte esencial de la trigonometría moderna. Pero son de procedencia relativamente reciente.

La ley del coseno aparece por primera vez en *Los Elementos* de EUCLIDES como Proposición II.13 en la siguiente forma:

*En los triángulos acutángulos, el cuadrado del lado que subtiende al ángulo agudo es menor que [la suma de] los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo agudo en dos veces el rectángulo comprendido por uno de los lados del ángulo agudo sobre el que cae la perpendicular y la [recta] interior cortada por la perpendicular hasta el ángulo agudo.*

La redacción se aclara con un dibujo.



Sea  $\alpha$  un ángulo agudo del triángulo  $ABC$ . En el texto, el cuadrado del lado que subtiende el ángulo agudo,  $a^2$ , es igual a la suma de los cuadrados de los lados adyacentes, esto es  $b^2 + c^2$ , disminuido por el doble de un rectángulo. Un lado de ese rectángulo es uno de los lados adyacentes, tomamos  $c$ , y el otro es lo que la altura corta hacia el ángulo agudo, es decir  $q = AD$  en el dibujo anterior. Escrito como una fórmula esto queda así

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq.$$

Este resultado no se considera parte de la trigonometría, es sólo una comparación entre áreas. Sin embargo, si se observa que  $q = b \text{cos}(\alpha)$ , da lo que hoy llamamos Ley del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos}(\alpha).$$

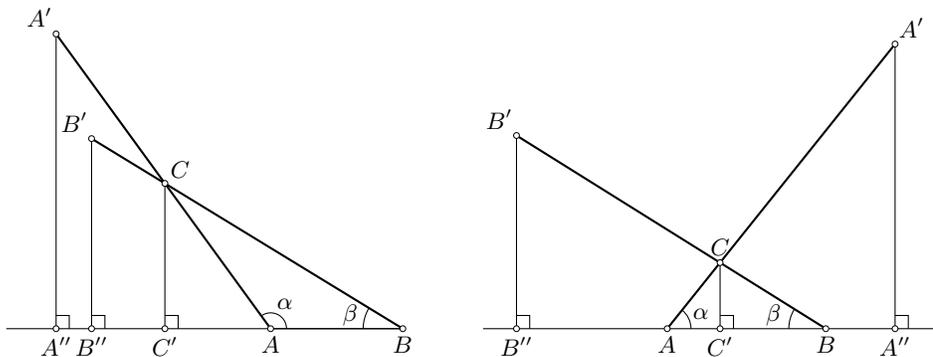
La ley de los senos aparece explícitamente en la literatura en el libro *Tratamiento sobre el cuadrilátero* de NASIR AL-DIN AL-TUSI (1201–1274). Al-Tusi nació en Tus, una ciudad en el norte de lo que hoy es Iran. Su tío le enseñó lógica y física a una edad temprana. Se mudó a Nishapur y allí estudió filosofía, medicina y matemáticas. Vivió en un tiempo de guerra: los mongoles invadían

grandes espacios, sembraban la destrucción y cometían terribles crueldades. AL-TUSI aceptó una invitación a unirse a los “asesinos”, una secta islámica con fuerza militar que defendía las fortalezas en esa región. En esa época al-Tusi escribió varios textos sobre filosofía, lógica, matemáticas y astronomía. Cuando los mongoles bajo el mando de Hulegu destruyeron el castillo Alamut, incorporaron a al-Tusi en sus tropas como asesor científico. Así, AL-TUSI acompañó a Hulegu en la conquista de Bagdad y le propuso construir un observatorio. En 1262 se completó el observatorio y AL-TUSI empezó a elaborar tablas muy precisas sobre el movimiento de los planetas. Tradujo varios textos del griego al árabe.



NASIR AL-DIN AL-TUSI

La demostración de la Ley de los senos de AL-TUSI es como sigue. Primero se prolonga  $AC$  sobre  $A'$  de tal manera que  $AA'$  mida  $r$ . Luego se erige una perpendicular  $A'A''$  a  $AB$  por  $A'$  con pie  $A''$ . Por definición se tiene  $A'A'' = \text{sen}(\alpha)$ . Lo mismo se hace con  $B$  y se obtiene  $B'B'' = \text{sen}(\beta)$ .



Esto es válido aún si uno de los ángulos es obtuso – como se ve en la ilustración anterior izquierda – dado que  $\text{sen}(\varphi) = \text{sen}(180^\circ - \varphi)$ . Sea además  $CC'$  la perpendicular a  $AB$  por  $C$ . Entonces los triángulos  $AC'C$  y  $AA''A'$  son semejantes y por ello se tiene  $A'A'' : A'A = CC' : CA$ , es decir  $\text{sen}(\alpha) \cdot AB = r \cdot CC'$ . De manera similar  $BC'C$  y  $BB''B'$  son semejantes, por lo que  $\text{sen}(\beta) \cdot BC = r \cdot CC'$ . Al igualar los lados derechos se obtiene  $\text{sen}(\alpha) \cdot AB = \text{sen}(\beta) \cdot BC$ , es decir

$$\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{BC}{AC}.$$

La demostración de AL-TUSI es similar a la moderna, ambas se basan en calcular la altura  $CC'$  de dos maneras, usando los triángulos rectángulos  $AC'C$  y  $BC'C$ . Pero AL-TUSI primero amplía estos triángulos para que su hipotenusa mida  $r$ . Esto deja entrever que  $\text{sen}(\varphi)$  no era para él una proporción sino una longitud en un círculo de radio  $r$ .

Una vez que la comprensión de las funciones seno y coseno queda claramente establecida – sea esto en el sentido de hoy en un círculo de radio 1, o como se hizo antes en un círculo con un radio grande como  $r = 3438$  – resulta inmediato interpretar el enunciado de la Proposición II.13 de *Los Elementos* de Euclides como lo que en la actualidad conocemos como la Ley del coseno.

Se reconoce a Hiparco como padre de la trigonometría porque fue el primero en concebir la importancia de conocer las longitudes de las cuerdas en función del ángulo. Con eso la astronomía obtuvo una herramienta muy poderosa. Pero fue AL-TUSI, quien escribió el primer libro sobre trigonometría y con ello la elevó a un asunto de interés matemático, independiente de la astronomía.

### Mejoramiento de las tablas

En la Edad Media se reanudaron los esfuerzos para calcular tablas cada vez más precisas del seno. Las herramientas eran esencialmente las mismas que las que ya vimos en funcionamiento en manos de PTOLOMEO. Para mantener las fórmulas lo más sencillas posible y cercanas a lo que se conoce hoy día, adoptamos esas herramientas aquí con  $r = 1$ , aunque en la Edad Media esto no era común:

- (a) Calcular  $\cos(\varphi)$  a partir de  $\text{sen}(\varphi)$  según la fórmula

$$\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \text{sen}(\varphi)^2}.$$

- (b) Calcular  $\text{sen}(\frac{\varphi}{2})$  a partir de  $\text{sen}(\varphi)$ , según (a) y la fórmula

$$\text{sen}(\frac{\varphi}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi)}{2}}.$$

- (c) Calcular  $\text{sen}(\varphi + \psi)$  a partir de  $\text{sen}(\varphi)$  y  $\text{sen}(\psi)$ , según la fórmula

$$\text{sen}(\varphi + \psi) = \text{sen}(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \text{sen}(\psi).$$

- (d) Calcular  $\text{sen}(\varphi - \psi)$  a partir de  $\text{sen}(\varphi)$  y  $\text{sen}(\psi)$ , según la fórmula

$$\text{sen}(\varphi - \psi) = \text{sen}(\varphi) \cos(\psi) - \cos(\varphi) \text{sen}(\psi).$$

Veamos cómo RICHARD OF WALLINGFORD (1292–1336) describió cómo calcular  $\text{sen}(1^\circ)$  con la precisión que uno desee. Se parte de que uno conoce  $\text{sen}(3^\circ)$ . Para ello se usa (d).

1. A partir de  $\text{sen}(3^\circ)$  se calcula  $\text{sen}(\frac{1}{16}3^\circ)$  usando cuatro veces (b).
2. Se calcula  $\text{sen}(5 \cdot \frac{3}{16}^\circ) = \text{sen}(\frac{15}{16}^\circ)$  usando varias veces (c).
3. Se calcula  $\text{sen}(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16}^\circ) = \text{sen}(\frac{3}{64}^\circ)$  usando (b) dos veces.
4. Se calcula  $\text{sen}(\frac{3}{64}^\circ + \frac{15}{16}^\circ) = \text{sen}(\frac{63}{64}^\circ)$  usando (c).

5. Se calcula  $\sin\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{64}^\circ\right) = \sin\left(\frac{3}{256}^\circ\right)$  usando (b) dos veces.  
 6. Se calcula  $\sin\left(\frac{3}{256}^\circ + \frac{63}{64}^\circ\right) = \sin\left(\frac{255}{256}^\circ\right)$ .

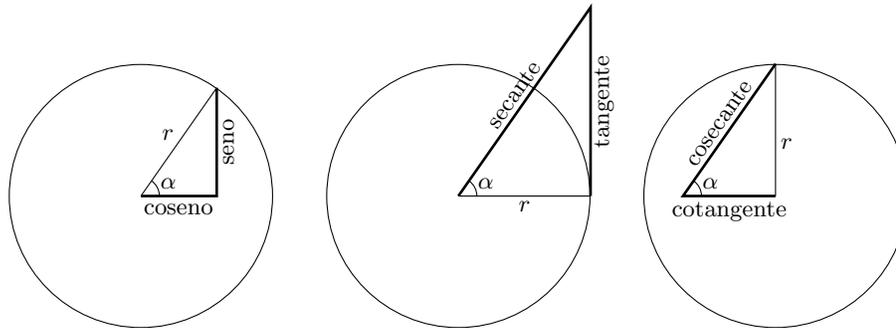
Este proceso se puede continuar tantas veces uno quiera. En este proceso se usa que

$$\frac{3}{4^{n+1}} + \frac{4^n - 1}{4^n} = \frac{3}{4^{n+1}} + \frac{4 \cdot (4^n - 1)}{4^{n+1}} = \frac{3 + 4^{n+1} - 4}{4^{n+1}} = \frac{4^{n+1} - 1}{4^{n+1}}.$$

Conforme  $n$  aumenta, se obtienen cada vez mejores aproximaciones de 1.

En 1596 se publicó el libro *Opus Palatinum de Triangulis* (Obra palatina sobre triángulos) de GEORG JOACHIM DE PORRIS (1514–1574), también conocido como RHETICUS, completado 22 años después de la muerte de Rheticus por su discípulo LUCIUS VALENTON OTHO. Rheticus nació en Feldkirch, en el extremo Oeste de Austria, estudió en Zürich y después con COPÉRNICO y es considerado su único discípulo.

Elaboró tablas de las seis funciones trigonométricas que indicamos en el siguiente esquema, aunque no usó estos nombres.



Él y su discípulo usaron un radio  $r = 10\,000\,000\,000$  y calcularon los valores de las seis funciones en intervalos de  $10'' = \frac{1}{360}^\circ$ . La obra consta de 1400 páginas tamaño folio.

## Una implementación en las computadoras: el método CORDIC

La función seno es una función *trascendente*, es decir, es imposible calcular  $\sin(x)$  con exactitud en un número finito de pasos, salvo para valores especiales como por ejemplo  $x = 0$ .

Con la invención de las computadoras en los años 50 del siglo pasado, se produjo una revolución en cómo se calcula. Las tablas de logaritmos, seno y tangente desaparecieron y se hicieron común el uso de calculadoras de bolsillo. Pero ¿cómo calcula una calculadora el valor de  $\sin(20^\circ)$ ?

Una idea sería expresar  $\sin(x)$  como una serie de potencias:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots,$$

donde  $n!$  es la *factorial* de  $n$ , que está definida como el producto de los primeros  $n$  números naturales, es decir,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ . Es importante que aquí se use *radianes*, es decir la longitud del arco de un sector con ángulo  $x$  y radio 1.

Como  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$  y  $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$  es suficiente calcular  $\sin(x)$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Por ello basta que se tome los primeros 6 sumandos en la serie arriba para obtener una exactitud de 8 dígitos.

Pero para las calculadoras, llevar a cabo una multiplicación es “costoso”, es decir cuesta mucho tiempo. Con el *esquema de Horner* de WILLIAM GEORGE HORNER (1789–1837) se reduce el número de multiplicaciones considerablemente:

$$\begin{aligned}\sin(x) &\approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \\ &= x \cdot \left(1 - x^2 \cdot \left(\frac{1}{3!} - x^2 \cdot \left(\frac{1}{5!} - x^2 \cdot \left(\frac{1}{7!} - x^2 \cdot \left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{11!}x^2\right)\right)\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Hay que calcular  $x^2$  una vez y luego hay que hacer 5 multiplicaciones. Los valores de  $\frac{1}{3!}, \dots, \frac{1}{11!}$  se pueden calcular de antemano y guardar como constantes.

Pero en 1959, aún eso era demasiado lento y se buscaba una manera de hacerlo sin multiplicación alguna, excepto multiplicación o división por 2. En las computadoras y calculadoras de bolsillo, los números representan en el *sistema binario*. En este sistema el número decimal 10 se expresa como  $1010_2$  ya que

$$10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

El número 0.2 se expresa como  $0.00110011\overline{0011}_2$ . El subíndice 2 indica que se trabaja en base 2 y no en la base 10.

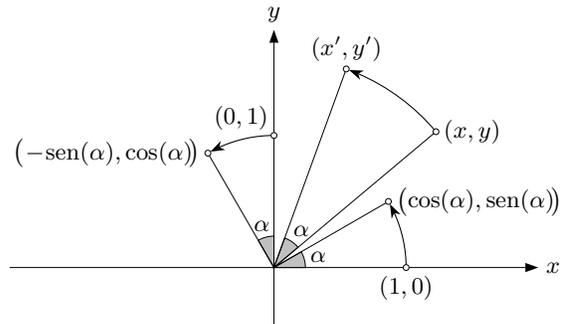
En el sistema binario la multiplicación o la división con 2 no cuesta trabajo, ya que es simplemente es movimiento a la izquierda resp. a la derecha de todos los dígitos.

En 1959 el ingeniero Jack E. Volder desarrolló un algoritmo que lograra calcular  $\sin(x)$  sin hacer una sola multiplicación excepto con 2. El método fue bautizado CORDIC que es un acrónimo de coordinate rotation digital computer.

El nombre expresa parte de la idea: se calcula la rotación en coordenadas.

Se tiene que al rotar por el ángulo  $\alpha$  en contra de las manecillas del reloj el punto  $(1, 0)$  da al punto  $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$  y el punto  $(0, 1)$  se rota al punto  $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$ . Un punto en general  $(x, y)$  se rota en  $(x', y')$  donde

$$\begin{aligned}x' &= \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \\ y' &= \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y.\end{aligned}$$



Esto se puede expresar de manera compacta al usar el lenguaje de matrices:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}}_{p'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{M_\alpha} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_p.$$

Algunas propiedades que serán importantes:

- Las rotaciones se pueden acumular:  $M_\beta M_\alpha = M_{\alpha+\beta}$ .
- Las rotaciones son lineales, en particular se tiene:  $M_\alpha(\lambda p) = \lambda(M_\alpha p)$ , para cada punto  $p$  y cada número  $\lambda$ .

Volder conjuntó varias ideas para lograr calcular el valor de  $\text{sen}(\alpha)$  sin usar multiplicaciones excepto con potencias de 2:

- En vez de  $M_\alpha$  se usa

$$R_\alpha = \frac{1}{\cos(\alpha)} M_\alpha = \frac{1}{\cos(\alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -\tan(\alpha) \\ \tan(\alpha) & 1 \end{bmatrix};$$

- Se usan ángulos especiales  $\varphi_0, \varphi_1, \dots$  para los cuales se tiene  $\tan(\varphi_k) = \frac{1}{2^k}$ . Estos ángulos se llaman *ángulos de CORDIC* y se pueden calcular de antemano y guardar en constantes. Para un ángulo de CORDIC  $\varphi_k$  se tiene  $\cos(\varphi_k) = \cos(\tan^{-1}(\frac{1}{2^k})) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{2^k})^2}} = \kappa_k$

$$R_k = \frac{1}{\kappa_k} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{2^k} & 1 \end{bmatrix}.$$

Por las propiedades mencionadas se tiene

$$R_k R_\ell = \frac{1}{\kappa_k \kappa_\ell} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2^k} \\ \frac{1}{2^k} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2^\ell} \\ \frac{1}{2^\ell} & 1 \end{bmatrix}.$$

- El ángulo  $\alpha$  del cual se debe calcular el valor  $\text{sen}(\alpha)$ , se aproxima como

$$\alpha \approx \varepsilon_0 \varphi_0 + \varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2 + \dots + \varepsilon_n \varphi_n,$$

donde  $\varepsilon_k = \pm 1$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Además, el número  $n$  se puede calcular de antemano, ya que de él depende la precisión del valor que se calculará.

Si se juntan estas ideas se obtiene

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \approx \frac{1}{\kappa_0 \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_n \frac{1}{2^n} \\ \varepsilon_n \frac{1}{2^n} & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_1 \frac{1}{2^1} \\ \varepsilon_1 \frac{1}{2^1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_0 \frac{1}{2^0} \\ \varepsilon_0 \frac{1}{2^0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se calcula  $K_n = 1/\kappa_0 \kappa_1 \dots \kappa_n$  de antemano y entonces se tiene

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_n \frac{1}{2^n} \\ \varepsilon_n \frac{1}{2^n} & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_1 \frac{1}{2^1} \\ \varepsilon_1 \frac{1}{2^1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon_0 \frac{1}{2^0} \\ \varepsilon_0 \frac{1}{2^0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Falta explicar cómo se calculan los signos  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Se pone

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \geq 0, \\ -1, & \text{si } \alpha < 0, \end{cases}$$

y luego de manera iterativo

$$\varepsilon_{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha \geq \varepsilon_0\varphi_0 + \dots + \varepsilon_k\varphi_k, \\ -1, & \text{si } \alpha < \varepsilon_0\varphi_0 + \dots + \varepsilon_k\varphi_k. \end{cases}$$

El siguiente pseudo-código muestra el algoritmo

```

cordic(alpha):
  a=0
  x=K_n
  y=0
  for k=0 to n
    if alpha<a then
      e=-1
    else
      e=1
    endif
    a=a+e·φ_k
    x=x-e·2-k·y
    y=y+e·2-k·x
    k=k+1
  endfor
  cos(alpha)=x
  sen(alpha)=y

```

La idea de Volder luego se amplió a que puede calcular también exponenciales, logaritmos y otras funciones trascendentales. Fue un éxito de tal manera que hoy día ya no nos damos cuenta de cómo los aparatos que nos rodean llevan a cabo los cálculos de manera eficiente y confiable. De alguna manera, las matemáticas se alejaron de nosotros al ser empacados en el interior íntimo de los aparatos.

## Bibliografía para la sección de trigonometría esférica

Glen van Brummelen: The mathematics of the heavens and earth, the early history of trigonometry. Princeton University Press, 2009.

J. L. Berggren: Episodes in the Mathematics of medieval Islam, Springer, 1986.

Scriba, Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, Springer 2000.

Lambacher, Schweizer: Ebene Trigonometrie, Klett 1968

MacTutor

Wikipedia inglés, alemán y español

David Maletinsky: Wie rechnen Taschenrechner?, Mentorierte Arbeit, ETH Zürich, 2009

### 3.9. La medición fina de la Tierra

Hace mucho tiempo, el área de un campo se medía por el tiempo que requiría sembrarlo o por la cantidad de semillas requeridos. Poco a poco se vio la necesidad de poder medir con mayor precisión áreas o distancias por ejemplo entre ciudades. Este desarrollo se hizo a la par con un desarrollo en los instrumentos de medición y el desarrollo en las matemáticas, entre un desarrollo en precisión de las tablas de funciones trigonométricas.

Para las matemáticas fue un desarrollo por exigencias externos, muy mundanos, en el tejido de intereses militares, disputas territoriales, donde los científicos involucrados eran relojeros y fabricantes de instrumentos de precisión entre otros. En su conjunto, dió un conocimiento preciso del tamaño y la forma de la Tierra y aclaró que las montaña más alto no es un Pico en los Andes sino uno en Nepal, un país cerrado a extreanjeros en aquel entonces.

#### Al inicio, la medición de longitudes

El primer instrumento para medir distancias fue un *odómetro* en forma de un carrito, que al jalarlo transmitió el girar de las ruedas mediante un mecanismo sencillo a una rueda que giraba lentamente y así registraba la distancia recorrida. Los romanos medían de esta manera la longitud de sus calzadas de su vasta red viario romano.

La siguientes dos ilustraciones muestran un odómetro griego y uno romano, ambos reconstrucciones que se hicieron para exhibirse en un museo.



Es claro, que estos herramientas de medición no estaban pensados para hacer mediciones en terrenos poco accesibles. Para ello se requerían otras ideas.

#### Los primeros mapas usaron latitudes y longitudes

Fue el griego CLAUDIO PTOLOMEO (100–170) quien tuvo una idea novedosa de hacer un mapa: bastaba medir de muchos lugares la latitud y la longitud y luego colocar en una rejilla estos ligares para indicar la mayor información que da un mapa. Aquí se debe advertir que hay una diferencia muy importante entre las mediciones de latitud y longitud: la de la latitud se puede hacer con relativa facilidad, al tomar la elevación del Sol sobre el horizonte, mientras que la longitud es muy difícil de medir.

No sobrevivió ningún mapa original de PTOLOMEO, pero en la edad media se usaron las instrucciones de su libro y su tabla de latitudes y longitudes para reconstruir uno.

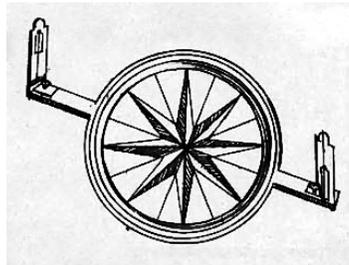


La ilustración anterior muestra una reconstrucción de Johannes de Armsshein en 1482. Pocos años después Cristobal Colón emprendió su viaje hacia el Oeste, en búsqueda de un nuevo camino hacia la India. Tener buenos mapas de los Mares era un necesidad inmediata. Estos mapas se hicieron con el método de PTOLOMEO, es decir midiendo la latitud y la longitud tan bueno como se podía.

### Mediciones de ángulos

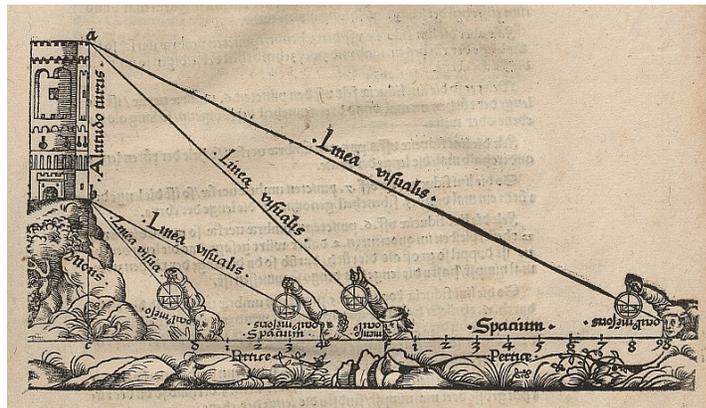
Sobre terreno terrestre, a diferencia que en altamar, hay muchos puntos marcados que se pueden tomar como referencia, y que permiten una medición más precisa. El suelo es fijo y no se tambalea como la cubierta de un barco. Por ello es posible nivelar un instrumento hasta que esté horizontal y medir con calma.

La gravedad da una referencia a lo vertical y por ello se miden ángulos de dos tipos: horizontales y de elevación. Las siguientes ilustraciones muestran dos instrumentos para ello: uno para medir ángulos horizontales y otro para medir ángulos de elevación.



ESTAS IMAGENES HAY QUE REHACER, PERO NO TUVE TIEMPO

Más tarde, sobre todo a partir del siglo XVIII, se combinaron las dos herramientas en uno: en el *teodolito*. La siguiente ilustración de 1536 es de un libro del alemán *Johannes Stöffler* y muestra el uso del *grafómetro* para medir ángulos de elevación.



Quelle: Deutsche Fotothek

Estas ideas se deben a los árabes del siglo X, sobre todo a *Ibn al-Saffar*.

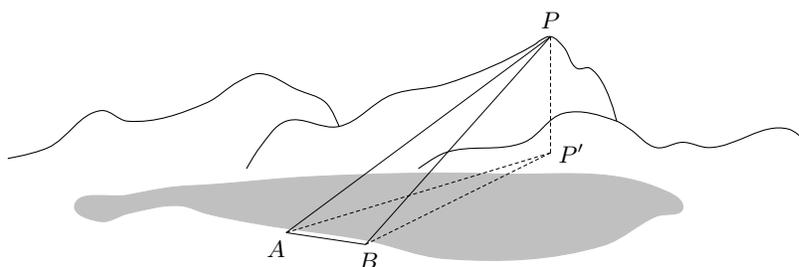
## La triangulación

El matemático holandés GEMMA FRISIUS (1508-1555) publicó en 1533 en la nueva edición de su libro *Cosmographia* el método de la *triangulación*. Consiste en colocar en el terreno triángulos imaginarios con las esquinas en puntos bien visibles como picos de colinas o montañas y luego ir a varias de estos puntos y medir los ángulos horizontales y de elevación hacia los otros puntos visibles. Un lado de alguno de los triángulos debe ser horizontal y medirse con mucha precisión. La distancia horizontal hacia los otros puntos y la diferencia en la altura se puede calcular con trigonometría.



GEMMA FRISIUS

Para aclarar el método de triangulación veremos un ejemplo sencillo. Se quiere medir la altura de una montaña que es visible desde el borde de un lago. Se colocan al borde de un lago dos palos a la distancia de 500 metros. Denotamos estos dos puntos con  $A$  y  $B$  y el pico de la montaña con  $P$ . En  $A$  se mide el ángulo horizontal  $\alpha = \sphericalangle BAP'$  y en  $B$  el ángulo horizontal  $\beta = \sphericalangle ABP'$ , donde  $P'$  denota el punto verticalmente debajo  $P$ , que está a la misma altura de  $A$  y  $B$ .



Por otro lado se miden en ambos puntos el ángulo de elevación hacia  $P$ : en  $A$  se mide  $\varepsilon_A = \sphericalangle P'AP$  y en  $B$  se mide  $\varepsilon_B = \sphericalangle P'BP$ .

Ahora se puede calcular: en el triángulo  $ABP'$  se tiene el ángulo  $\gamma = \sphericalangle AP'B = 180^\circ - \alpha - \beta$ . Luego se usa el Teorema del Seno: de

$$\frac{AB}{\text{sen}(\gamma)} = \frac{BP'}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AP'}{\text{sen}(\beta)}$$

se obtiene la longitud de  $AP'$  y de  $BP'$ . Finalmente se considera el triángulo  $AP'P$  que es rectángulo. Se calcula  $PP'$  con la función tan:

$$\tan(\varepsilon_A) = \frac{PP'}{AP'} \quad \text{y también} \quad \tan(\varepsilon_B) = \frac{PP'}{BP'}$$

Es importante notar, que no se tuvo que hacer ninguna medición en el pico de la montaña: sólo se hicieron mediciones en  $A$  y  $B$ . También debe notarse que un pequeño error en la medición de la línea de base o en los ángulos puede producir considerables errores en el resultado final. Además hay que recordar que en aquel entonces no se contaba con calculadoras de bolsillo, sino todos los cálculos se tenían que hacer a mano.

El primero que hizo una medición útil con el método de la triangulación fue el matemático y físico holandés WILLEBRORD VAN ROIJEN SNELL (Snellius, 1580–1626) alrededor de 1615. Trató de medir la longitud de un arco de un meridiano. Pero cometió algunos errores en la medición y en los cálculos, por lo que su resultado no estaba muy preciso.

La triangulación era un método que alcanzó gran popularidad: los duques, marqueses, archiduques y reyes querían conocer las extensiones de sus territorios y tener buenos mapas para fines militares. Las primeras triangulaciones se hicieron en el siglo XVII.

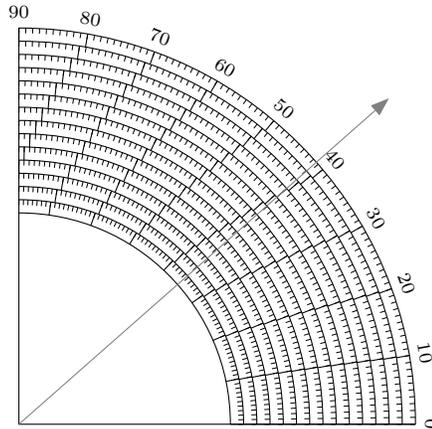
### Mejoras en las escalas de medición

Los primeros instrumentos estaban poco elaborados con escalas poco finas. Por ello la precisión estaba limitada. La necesidad de aumentar la precisión desató una serie de inventos que mejoraron gradualmente los instrumentos. Estudios sobre las funciones trigonométricas permitieron calcular tablas de las funciones seno, coseno y tangente de mayor precisión. El uso de telescopios en los teodolitos aumentó nuevamente la precisión de medición que requirió tener escalas todavía más finas y tablas más precisas.

Veamos algunos de estas mejoras. El portugués PEDRO NUNES (1502-1578) inventó una mejora en poder leer escalas con mayor precisión. Para medir ángulos dejó gravar varios anillos concen-

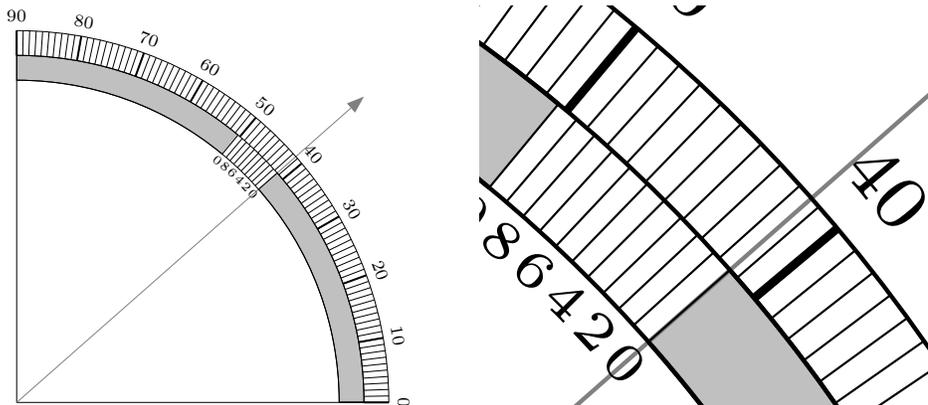
tricos, el más grande con una división de 90 divisiones el segundo interior con 89 divisiones y así sucesivamente con uno menos.

La siguiente ilustración muestra una escala de Nonius.



Las adicionales escalas – a parte de la principal que da la división en 90 – permite una determinación mucho mejor en el ángulo medido (que está indicado con una flecha gris). Pero los cálculos involucrados no son de todo fáciles. Sin embargo, TYCHO BRAHE (1564-1601) los usaba y elogió a PEDRO NUNES.

Mucho mejor por ser más fácil de entender y usar es la escala de VERNIER, que es una pequeña escala que se desliza en otra, nombrado según el francés PIERRE VERNIER (1580-1637). En la siguiente ilustración se muestra una escala de VERNIER. Para leerla, se busca cuál de sus marcas coincide mejor con una marca de la escala principal. En el ejemplo de la ilustración es la marca 4 de la escala de VERNIER. Eso quiere decir que el siguiente dígito es 4, es decir el ángulo es aproximadamente  $41.4^\circ$ .



El funcionamiento es sencillo: en la escala de Vernier las marcas están a la distancia 0.9 de la distancia entre las marcas principales de los grados. Supongamos que el ángulo realmente fuera  $41.4^\circ$ . Si avanzamos  $n$  marcas en la escala de VERNIER, entonces avanzamos por un ángulo de  $n \cdot (1 - 0.1)^\circ$  en la escala de grados afuera. La pregunta que hay que contestar es ¿para cuál  $n$  la suma de  $41.4^\circ$  y  $n \cdot (1 - 0.1)^\circ$  es un entero? Esta es la condición para que la marca de Vernier

coincida con una marca de la escala de grados. La respuesta es fácil: hay que buscar un número entero tal que

$$41.4 + n \cdot (1 - 0.1) = (41 - n) + (4 - n) \cdot 0.1$$

sea un número entero. Claramente para  $n = 4$  esto es el caso, y  $n = 4$  es la única solución entre los posibles valores  $n = 0, 1, \dots, 9$ . Por ello, hay que leer dónde coincide la marca de Vernier con la de grados y la leyenda en la escala de Vernier dará el siguiente dígito después del punto decimal.

### Mejoras en los cálculos

Las tablas de las funciones trigonométricas se hicieron cada vez con mayor precisión, con 4, luego con 5 hasta con 8 dígitos. En los cálculos hay que dividir frecuentemente dos valores de Senos, por ejemplo  $AP' = AB \cdot \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\gamma)}$ , en el ejemplo de arriba. Por ello el matemático escocés JOHN NAPIER (1550–1617) tuvo en 1614 la idea de tabular los logaritmos de los valores de seno, es decir hacer una table que muestra  $\log(\text{sen}(\varphi))$  para muchos valores de  $\varphi$ .

Más que diez años antes, el relojero suizo JOST BÜRGI (1552–1632) tuvo la idea de tabular una función exponencial y así también una logarítmica. Tenía estas tablas en el año 1600 y después de tabular la función Seno, pero no lo publicó hasta el año 1620. Veamos su idea. Tomo el número  $q = 1.0001$  y calculó sucesivamente las potencias  $q^n$ . Esto es relativamente fácil, porque

$$q \cdot z = 1.0001 \cdot z = z + \frac{1}{10\,000}z,$$

es decir cada potencia es la anterior más un 10 000-avo del anterior:  $q^{n+1}$  se calcula como  $q^{n+1} = q^n + \frac{1}{10\,000}q^n$ . Así, BÜRGI calculó todas las potencias desde  $q^0$  hasta que  $q^n > 10$ . Esto sucede para  $n = 23\,028$ . Además averigua que

$$q^{23\,027.0022} < 10 < q^{23\,027.0023}$$

Con sus tablas tiene una herramienta potente de simplificar los cálculos: para multiplicar dos números  $A$  y  $B$ , los escribe de la forma,

$$A = q^m \cdot 10^a, \quad \text{resp.} \quad B = q^n \cdot 10^b,$$

donde  $m$  y  $n$  los obtiene al buscar en su tabla. El producto  $A \cdot B$  es de la forma  $A \cdot B = q^{m+n} \cdot 10^{a+b}$  y el resultado de  $q^{m+n}$  lo obtiene por ver nuevamente en su tabla. De esta manera, Bürgi redujo la multiplicación a la adición, que a mano es mucho más fácil de llevar a cabo.

Con las tablas de BÜRGI trabajaba JOHANNES KEPLER (1571–1630) cuando trataba de encontrar la forma de las órbitas celestes. Los relojes y demás instrumentos que construía BÜRGI eran superiores en precisión e inalcanzados en 100 años después. Era el primero en construir un reloj con segundero.

### Mejoras en las herramientas de medición

Durante 60 años del siglo XVIII se midió la extensión del reinado de Francia. A cargo estaban cuatro generaciones de una familia: CASSINI. El resultado era un atlas a la escala 1 : 86 400 con una precisión desconocido hasta entonces.

Durante el siglo XIX se llevaron a cabo múltiples proyectos de medición. En los teodolitos se usaron telescopios, para tener una medición aún mejor. El matemático alemán CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) fue encargado de medir el reinado de Hannover. Empezó en 1821 y terminó en 1840. Para ello inventó un instrumento nuevo: el *heliotropo*, que reflejaba la luz del Sol en una dirección determinada, para hacer mejor visible este punto desde uno lejano.

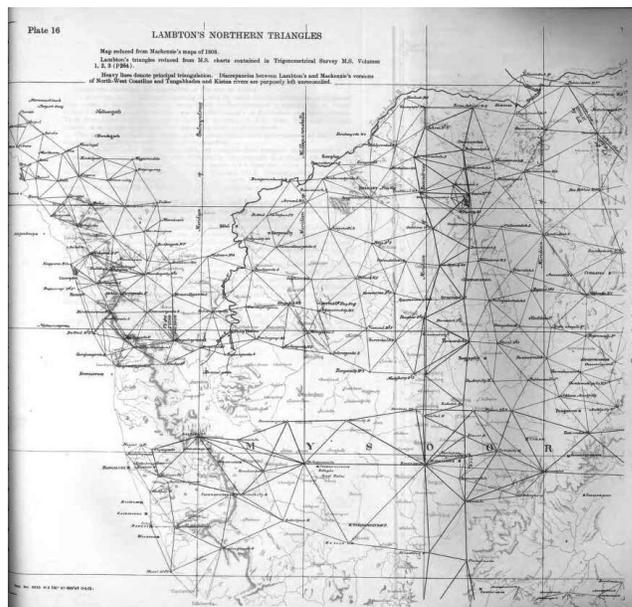
Las mejoras en las herramientas demandó una nueva mejora en las escalas de medición. El inglés JESSE RAMSDEN contribuyó a ello: usó –probablemente como el primero– el torno para cortar tuercas con filetes muy precisos. Estos los usaba para construir unas “máquinas de dividir” de alta precisión: que marcaban en un arco líneas de división a espacios iguales con alta precisión.

Más tarde se empezaron a usar microscopios para leer estas escalas tan finamente gravados.

### El proyecto “The Great Survey”

La triangulación más grande que se llevó a cabo en el siglo XIX tenía lugar en la India. Empezó en 1802 con la medición de la línea de base en Madras: una línea recta de 12 km de longitud que se medía varias veces con una cadena calibrada. A partir de esta medida el resto de los cálculos se hicieron con mediciones de ángulos. Sólo de vez en cuando se volvió a medir una línea para disminuir los errores de medición y de cálculo.

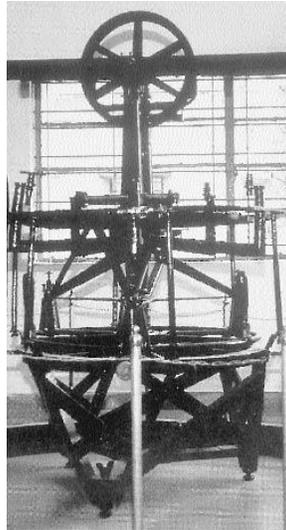
El proyecto estaba planeado para 5 años, pero duró más que 60. Los costos absorbía una gran parte de las ganancias de la *Compañía Británica de las Indias Orientales*, una sociedad de comerciantes ingleses, que por una carta real obtuvieron grandes privilegios en la India. Finalmente el proyecto fue trasladado directamente bajo la custodia de la corona inglesa.



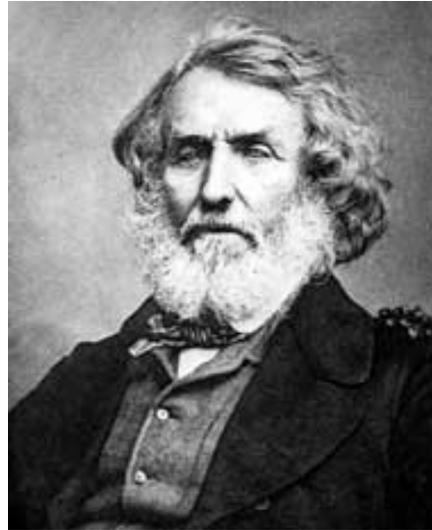
Parte de la triangulación de Lambton

Al principio el proyecto estaba a cargo de WILLIAM LAMBTON (1753–1823). La ilustración anterior muestra una parte del Sur de India, que fue triangulada por LAMBTON. La siguiente ilustración

muestra el teodolito que usó LAMBTON. Pesó media tonelada y fue necesario transportarlo entre doce hombres. Varias veces se averió y tuvo que ser reparado, que retrasó el proyecto ya que en la India no había fabricantes de instrumentos.



El teodolito de Lambton



George Everest

Después de la muerte de LAMBTON, se encargó su asistente GEORGE EVEREST (1790–1866) de dirigir el proyecto. Desistió de querer triangular toda la India y propuso la idea de sólo avanzar en guirnaldas de Sur a Norte y de Este a Oeste. Una ilustración más abajo muestra estas guirnaldas.

Renovó los instrumentos y consiguió que un fabricante de instrumentos viniera a la India. Dado que las colinas estaban a menudo en las manos de unos caciques locales dejó erigir torres de madera y cuando de día estaba demasiado brumosa, dejó medir de noche usando unas lámparas enormes.

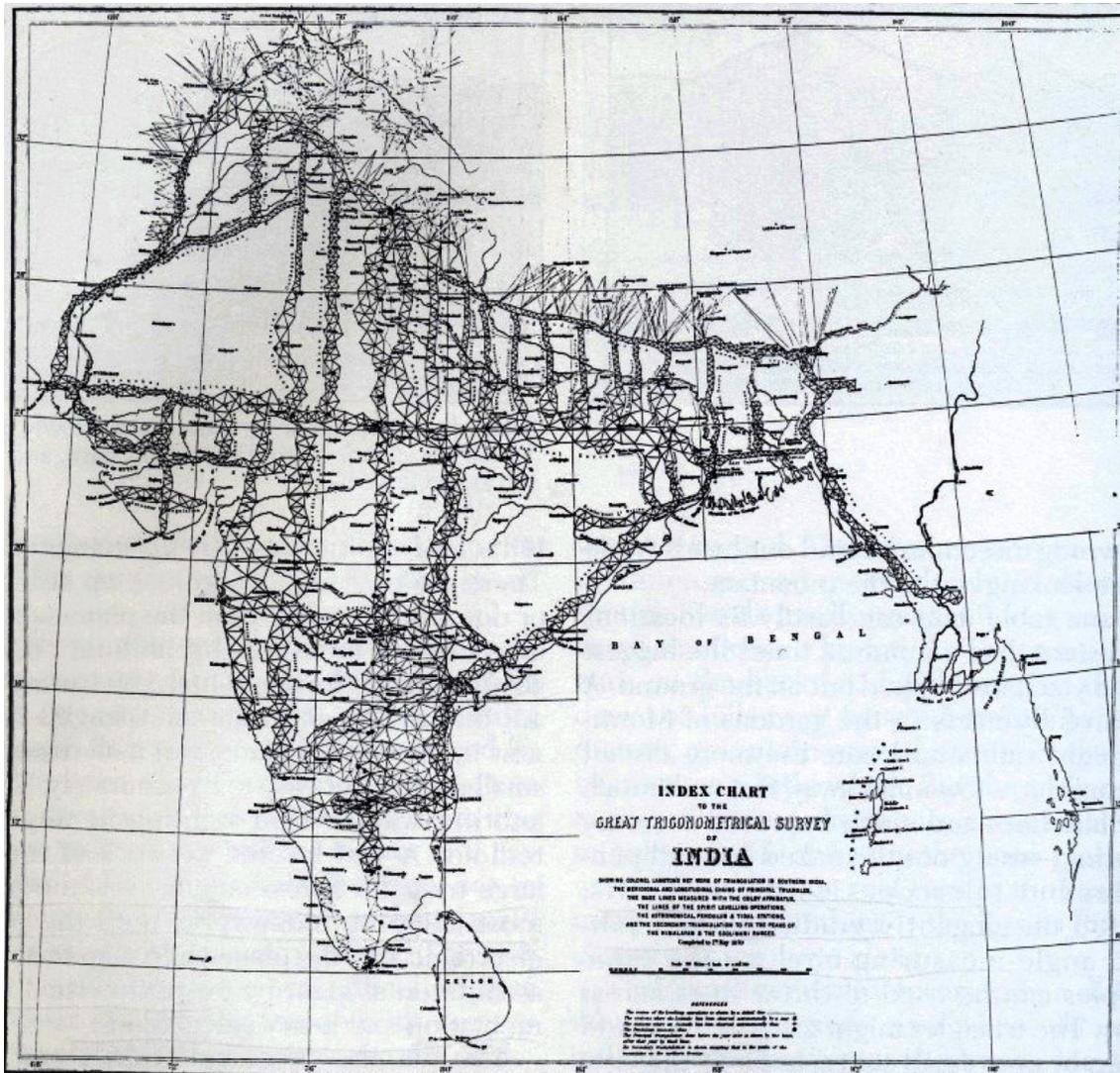
Bajo su dirección trabajaban finalmente 700 hombres. Disponía de cuatro elefantes, 30 caballos y 42 camellos. Después de muchos obstáculos alcanzó las faldas del Himalaya, 2400 kilómetros en el norte. En el año 1843 se retiró.

Dado que el gobierno de Nepal no daba acceso a su territorio, los trabajos entre 1845 y 1850 tuvieron que hacerse atravesando la jungla húmeda en el Sur. Esto costaba la vida de muchos hombres. En un solo año murieron 40 trabajadores indios y de los agrimensores ingleses se enfermó la mitad de fiebre y murió ahí mismo o años más tarde. Se midieron los picos más altos de la cordillera de Himalaya desde lejos. Los triángulos de la triangulación se muestran en abajo.

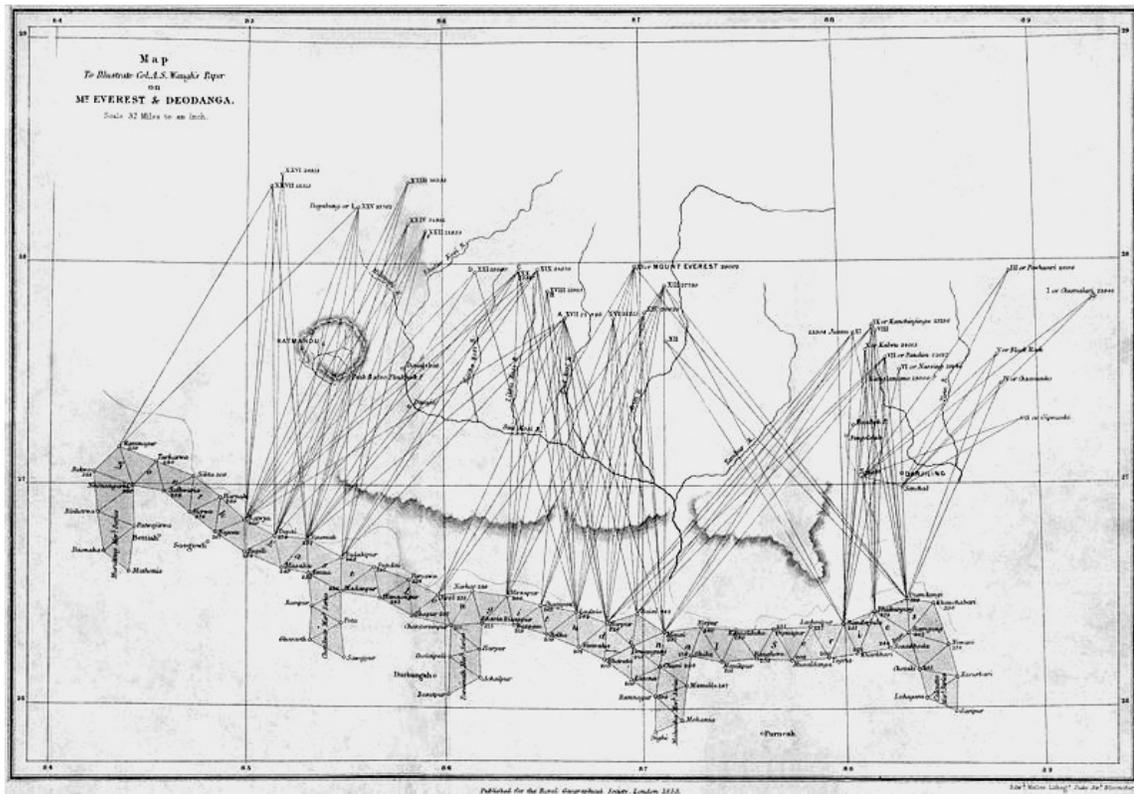
RADHANATH SIKDAR (1813 – 1870), que EVEREST originalmente había contratado para hacer cálculos, ya había avanzado a ser *Chief Computer of the Survey of India*, determinó que el pico XV con 8840 metros sobre el nivel del mar estaba el más alto de todos. Dado que no se podía saber cómo nombraba el pueblo nepalés este pico, lo bautizó *Mount Everest*, en honor a su jefe retirado.

Las mediciones de la India fueron usados más tarde para calcular la forma de la tierra: los meridianos medidos de Sur a Norte y los paralelos medidos de Este a Oeste permitieron saber que Tierra tiene forma de elipsoide.

La triangulación en la India es uno de los proyectos de gran escala, que sólo se pudo llevar a cabo gracias a la intervención de muchas personas. Ayudó en el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en la India.



La triangulación de la India, 1870



Triangulación desde las faldas del Himalaya avisando los picos

### 3.10. Herramientas de precisión

relojes, la regla de cálculo, integradores analógicos.

# Índice de Referencias de las Figuras



# Índice de Personas

- Abraham Bar Hiyya, 121  
al-Saffar, Ibn, 159  
al-Tusi, Nasir al-Din, **150**, 152  
Alberti, Leon Battista, 38  
Anaxágoras, 133  
Anaximandro, 133  
Apolonio de Pérgamo, 19  
Apolonio de Perga, 13, 78, 82  
Aristóteles, 14, 138  
Aristarco de Samos, **133**, 134–136,  
147  
Arquímedes de Siracusa, 13, 19, 93, 116, 117,  
119, 120, 122, 124, 132, 149  
Arquimedes de Siracura, 107  
Aryabhata, 149
- Bürgi, Jost, 162  
Barrow, Isaac, 116  
Beltrami, Eugenio, **49**  
Bernoulli, Jakob, 93  
Bernoulli, Johann, 93  
Bolyai, Farkas, **47**  
Bolyai, Janós, 48, 49  
Brahe, Tycho, 161  
Brunelleschi, Filippo, 37
- Cassini, 162  
Cavalieri, Bonaventura, 130  
Copérnico, Nicolás, **133**, 153
- da Vinci, Leonardo, 39  
Dandelin, Germain Pierre, 31  
Dandelin, Germain Pierre, 87  
David Hilbert, 22
- Dehn, Max, 111  
del Monte, Guidobaldo, 43  
Desargues, Girard, 29, 43, 45  
Durer, Alberto, 39
- Eratóstenes, 134, 137, 138  
Euclides de Alejandría, 12–14, 17, 21, 22, 46,  
48, 95, 107, 120, 150  
Eudoxio de Cnidos, 12, 19  
Eudoxio de Samos, 106  
Eudoxo de Cnido, 93, 98, 108  
Euler, Leonhard, 93  
Everest, George, 164
- Francesca, Piero della, 39  
Frisius, Gemma, 159
- Galilei, Galileo, 9, 134, 138, 139  
Gauss, Carl Friedrich, 26, 48, 163  
Giotto di Bondone, 37  
Gregory, David, 116
- Hilbert, David, 58, 62, 110, 111  
Hiparco de Nicea, **145**, 145, 146, 152  
Horner, William George, 154
- Ibn al-Saffar, 159
- Kepler, Johannes, 82, 162  
Klein, Felix, 49  
Kurt Gödel, 24
- Lambert, Johann Heinrich, **48**, 129  
Lambton, William, 163, 164  
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 93

- Lindemann, Carl Louis Ferdinand von, 129  
 Lobachevski, Nikolai, 48, 49
- Menelao de Alejandría, 143, 144  
 Monte, Guidobaldo del, 43
- Napier, John, 162  
 Newton, Isaac, 93, 124  
 Niven, Ivan, 129  
 Nunes, Pedro, 160, 161
- Pacioli, Luca, 39  
 Pappus de Alejandría, 26, 31  
 Pascal, Blaise, 31  
 Pitágoras de Samos, 9, 10, 133  
 Platón, 138  
 Poincaré, Henri, 49  
 Proclo, 46  
 Ptolomeo, Claudio, 13, 119, 143, 146–149, 152, 157
- Raffael Sanzio, 37  
 Ramsden, Jesse, 163  
 Rheticus, Georg Joachim, **153**
- Saccheri, Giovanni, 48  
 Savasorda, *véase* Abraham bar Hiia  
 Sikdar, Radhanath, 164  
 Snellius, 160
- Tales de Mileto, 9, 10, 13, 14, **133**
- Vernier, Pierre, 161  
 Viète, François, 78  
 Vinci, Leonardo da, 39  
 von Lindemann, Carl Louis Ferdinand, 129  
 von Staudt, Karl Georg Christian, 26
- Wallingford, Richard of, 152