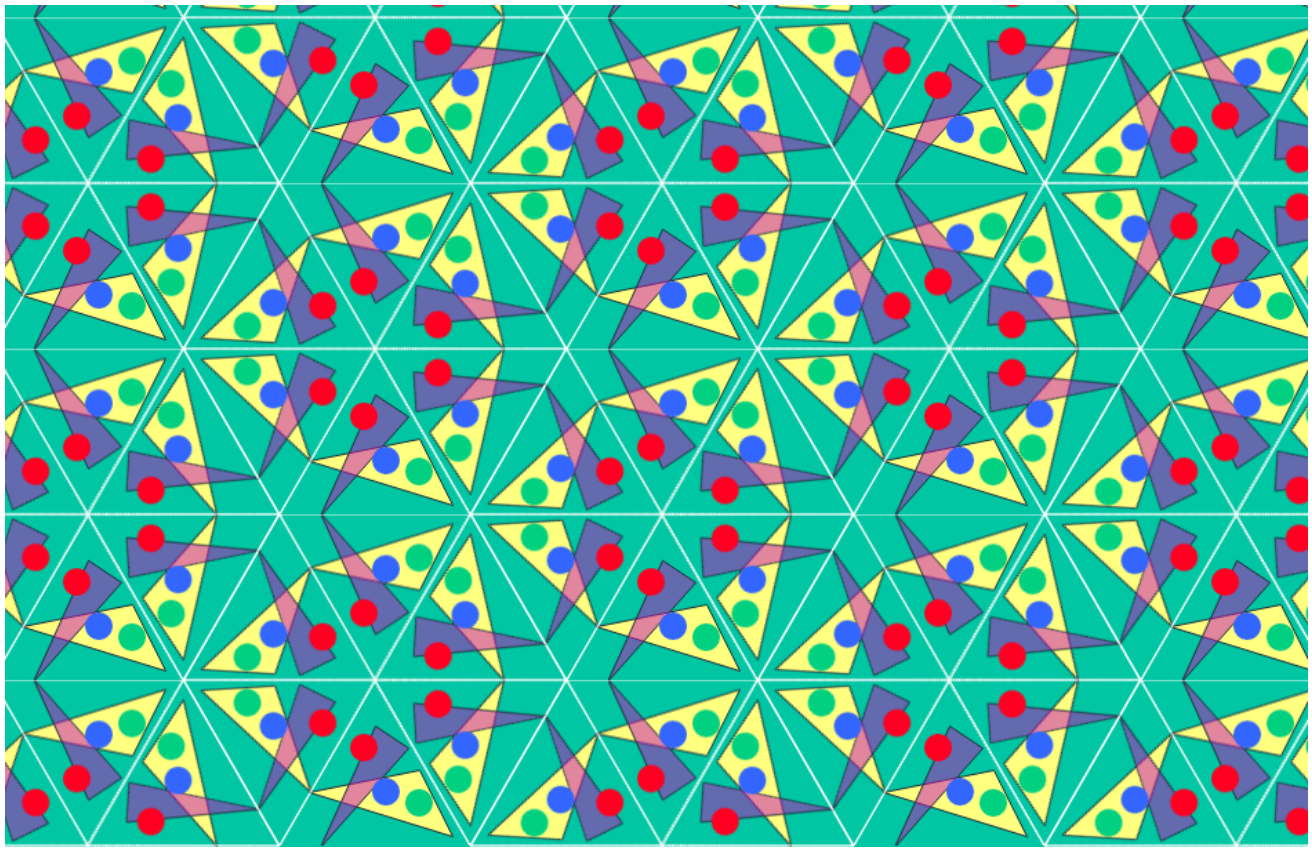


Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM

Grupo de estándares del SUMEM

1 de julio de 2016

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/

Organización de esta presentación

- ¿Cómo se elaboró el documento de estándares?
- ¿Cuál es su filosofía?
- Descripción de los estándares

- ¿Cómo se elaboró el documento?
  - El G30 y el G20
  - El SUMEM
    Consideraciones para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la UNAM.
  - El Grupo de estándares
    Se reúne semanalmente durante un año (2014) con profesores del Bachillerato para analizar la problemática y (durante el 2015) elabora este documento.

- ¿Qué contiene el documento?
  - Posibles causas del bajo nivel académico en matemáticas
  - Algunas ideas encaminadas a mejorar ese nivel
  - Concepción de las matemáticas en la que se basan los estándares
  - Una lista de estándares que consta de temas sugeridos para el currículum del Bachillerato.

- Filosofía de los estándares
  - ¿Por qué se elaboró el documento?
    - El bajo aprovechamiento de los estudiantes en los cursos de matemáticas y los malos resultados en pruebas como las de PISA y los exámenes diagnósticos.
    - El temor, repudio y falta de interés de los estudiantes en una materia cuya importancia en el mundo moderno es innegable y omnipresente.

Filosofía de los estándares

- Creencias erróneas (y dañinas)
  - Las matemáticas constan de procedimientos para realizar cálculos y hay que seguir reglas fijas para obtener los resultados correctos.
  - Sólo algunas personas tienen capacidad para las matemáticas, la mayoría no puede con ellas.

Esto tiene como consecuencia que muchas veces los estudiantes eligen carreras en que las matemáticas son importantes, por razones equivocadas, tal vez porque son buenos para seguir reglas y aplicar procedimientos, y luego se encuentran con que no pueden con el razonamiento abstracto que es lo que importa en esas carreras, o las evitan porque creen que las matemáticas constan de procedimientos preestablecidos o porque creen que nunca podrán con ellas.

¿Qué son en realidad las matemáticas?

- La palabra matemáticas viene del griego *MATHEMATA* que significa aquello que se puede *entender* porque es lógico y racional, y por lo tanto se puede *enseñar*.
- Para los griegos las matemáticas eran aquel conocimiento que no era revelado por una divinidad ni provenía de alguna fuente de conocimiento ajena al ser humano.
- Las matemáticas son lo que el hombre puede conocer gracias a su propia capacidad para pensar racionalmente.

¿Qué son en realidad las Matemáticas?

Pensadores que han inspirado, directa o indirectamente, la filosofía de las matemáticas que se ha adoptado para Los estándares.

Simon Stevin,

David Hilbert,

Felix Klein[3],

Kurt Gödel,

Hans Freudenthal[4],

Morris Klein[4],

Reuben Hersh[2]

El arte de la certidumbre

En holandés y flamenco matemáticas se dice WIESKUNDE, que significa *ciencia de la certidumbre*. La palabra propuesta originalmente por Simon Stevin (1548-1620) era WIESKUNST, el *arte de la certidumbre*.

Sabemos que no se puede obtener *certidumbre absoluta* sobre asuntos del mundo material. Pero las matemáticas se ocupan de construcciones mentales sobre las que sí podemos tener certidumbre absoluta (aunque con ciertas limitaciones, recordemos el teorema de incompletitud de Gödel).

La razón de ser de las matemáticas es precisamente la certidumbre que brindan, aunque solo aplique a cuestiones abstractas. Esa certidumbre la adquirimos al *entenderlas*. No proviene de ninguna otra autoridad, mas que de la razón.

¿De qué sirve tener certeza sobre cuestiones abstractas?

Las matemáticas nos dan certidumbre absoluta sobre los modelos abstractos que creamos para representar la realidad. Entenderlas significa conocer bien esos modelos y saber cómo se relacionan con aquellas porciones de la realidad que pretenden representar.

Tal vez sea inexplicable cómo es que esos modelos abstractos son tan útiles pero, cuando están bien hechos, suelen proporcionar información que nos ayuda a entender y controlar la naturaleza y la sociedad. Y este hecho es algo que debemos compartir con nuestros estudiantes.

Filosofía de los estándares

- Las matemáticas son abstractas y eso las hace útiles.

Las matemáticas surgen *siempre* como abstracciones de una realidad. Al principio esa realidad es el mundo sensible, pero más adelante la realidad la forman conceptos que ya de por si son abstractos como los números, las figuras geométricas, las partículas, las fuerzas, las ecuaciones o las funciones; y aún más adelante, la realidad la forman conceptos todavía más abstractos como los números complejos, las transformaciones o las estructuras algebraicas y topológicas. Las matemáticas se crean fabricando conceptos para modelar aspectos del mundo que conocemos. Y el mundo que conocemos se amplía con los nuevos conceptos y modelos que fabricamos.

¿De dónde vienen las matemáticas?

Podemos identificar tres impulsos y dos pasiones del ser humano como fuentes de las que brotan las matemáticas[2].

Los impulsos son

- el de controlar y facilitar las actividades productivas y artísticas,
- el de comprender (y controlar) la naturaleza y
- el de comprender mejor las propias matemáticas.

Las pasiones son

- la curiosidad y
- la afición a los desafíos.

Las matemáticas son un bien cultural de la humanidad

Entender y apreciar tanto el uso contemporáneo de las matemáticas como su importancia cultural no se limita, al enseñarlas, a enfrentar la pregunta de ¿para qué son útiles? sino también la de ¿por qué se crean, cómo nacen y cómo se desarrollan? Hay que poner esta disciplina en su contexto, el de algo que brota naturalmente del ser humano propulsado por el deseo de comprender el mundo que le rodea.

Es falso que lo abstracto sea incomprensible. Es al revés, entendemos precisamente a través de las abstracciones. El mundo material y sensible no lo entendemos, y creamos las abstracciones para intentar *entenderlo*.

Filosofía de los estándares: los desafíos

Quizás la fuente de creación matemática más importante son la curiosidad del hombre y la irresistible atracción que siente por los retos de todo tipo, y en especial, por los intelectuales.

Un error que suele cometerse en la educación es plantear únicamente tareas simples, sosas y que no representan reto alguno. A veces, con la intención de facilitar la vida del estudiante y mejorar los resultados de las evaluaciones, se eliminan temas que a los estudiantes se les dificultan sin tomar en cuenta si son o no importantes en su formación.

Recordemos que ...

Quien no aspira a general, ni a sargento llega.

Filosofía de los estándares: los desafíos

- Los estándares de matemáticas deben ser elevados y deben representar un reto importante para maestros y estudiantes. Cualquier concesión a la mediocridad la fomenta.
- Bajar el nivel provoca desinterés y está comprobado que no ayuda a mejorar el desempeño.
- Lo único que puede ayudar a mejorar el nivel en matemáticas es que los estudiantes se apropien del pensamiento matemático y aprendan a usarlo y disfrutarlo.

El *ideal* que plantean estos estándares es que los egresados del Bachillerato de la UNAM sean *los mejores del mundo en matemáticas*.

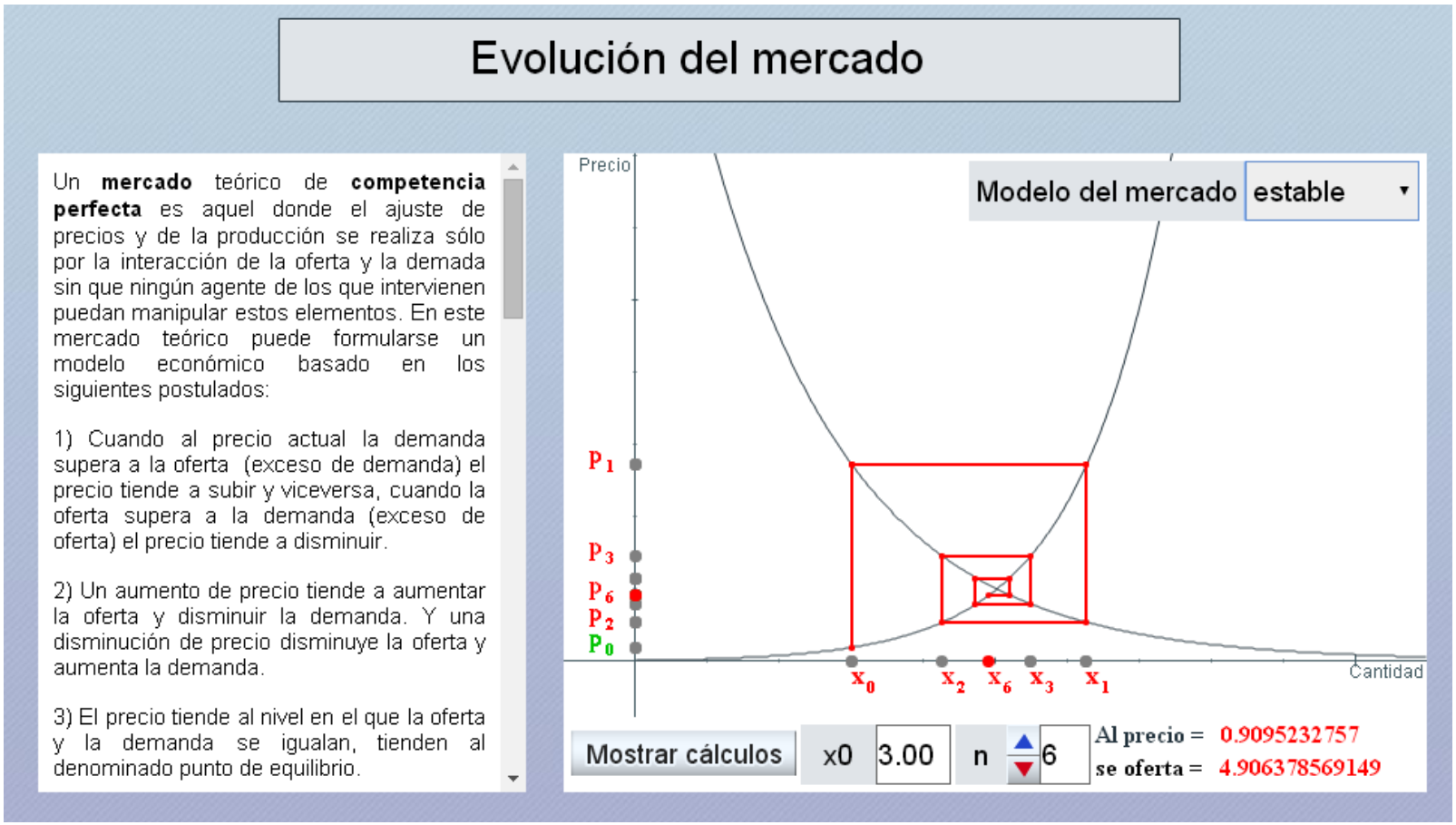
¿Cómo son las matemáticas?

Las matemáticas producen fundamentalmente tres cosas:

- modelos,
- algoritmos y
- teoremas

La enseñanza de las matemáticas debe representarlas fielmente.

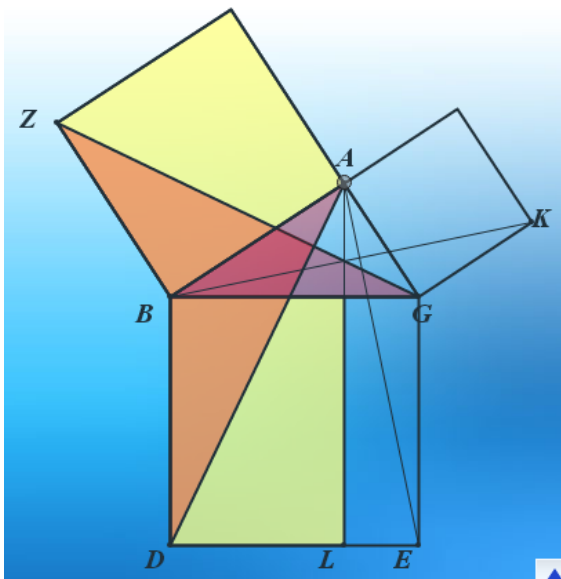
Hay que entrarle a todo.


Evolución del mercado
Un **mercado** teórico de **competencia perfecta** es aquel donde el ajuste de precios y de la producción se realiza sólo por la interacción de la oferta y la demada sin que ningún agente de los que intervienen puedan manipular estos elementos. En este mercado teórico puede formularse un modelo económico basado en los siguientes postulados:
1) Cuando al precio actual la demanda supera a la oferta (exceso de demanda) el precio tiende a subir y viceversa, cuando la oferta supera a la demanda (exceso de oferta) el precio tiende a disminuir.
2) Un aumento de precio tiende a aumentar la oferta y disminuir la demanda. Y una disminución de precio disminuye la oferta y aumenta la demanda.
3) El precio tiende al nivel en el que la oferta y la demanda se igualan, tienden al denominado punto de equilibrio.
Precio
Modelo del mercado
estable
P1
P3
P6
P2
P0
x0
x2
x6
x3
x1
Cantidad
Mostrar cálculos
x0
3.00
n
6
Al precio =
0.9095232757
se oferta =
4.906378569149

Aplicaciones en el plano y en el espacio
Integral definida
El cálculo del área de una región plana y un volumen de revolución, son límites de las sumas de Riemann, que se convierten en integrales y se solucionan, usando el teorema fundamental del cálculo.
En esta escena, puedes ver dos de las aplicaciones de las integral definida. Cambia, si lo deseas, la función y alguno de sus parámetros.
f(x)= 3*sin(x/2)
ÁREA BAJO LA CURVA
Área = ∫ 4.6 -0.0 3*sin(x/2)dx = 9.91
b
VOLUMEN
V = π ∫ 4.6 -0.0 (3*sin(x/2))^2 dx = 78.51
n 14
a -0.04
b 4.56

Teoremas

Teorema de Pitágoras. Demostración de:
Euclides, *Los Elementos*, Libro I, Proposición 47.



paso

Construimos cuadrados sobre los catetos y sobre la hipotenusa, todos exteriores al triángulo.

Damos nombres a algunos puntos de la figura y trazamos los segmentos ZG y $AL \perp BG$.

El área del triángulo ZBG es la mitad de a^2 porque su base ZB y su altura BA son ambas iguales a a.

Los triángulos ZBG y ABD son congruentes porque $\measuredangle ZBG = \measuredangle ABD$ y tienen lados adyacentes iguales: $ZB = AB = a$ y $BG = BD = c$.

Así que el área de ΔABD es igual a la del ΔZBG y por tanto $BD \cdot DL = a^2$.

Continuar

¿Cuál es el objetivo de la educación matemática?

El objetivo de la enseñanza de las matemáticas en el Bachillerato debe ser que el estudiante descubra su capacidad de abstracción, su capacidad para pensar racionalmente y la capacidad que tiene, como ser humano, para crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones del mundo que le rodea.

Esto debe practicarse en distintos niveles, enfrentando primero problemas sencillos y avanzando poco a poco a situaciones problemáticas más complejas en donde ya ni siquiera hay preguntas claramente definidas, y en las que su tarea consiste en analizar, investigar y proponer modelos abstractos que las representen y le ayuden a comprenderlas.

Filosofía de los estándares: ¡Muera el repaso!

Las deficiencias que los estudiantes acarrean de ciclos anteriores no se superan con el *repaso* que consiste en volver a ver *los mismos* temas y de *la misma* manera.

Dado que las matemáticas avanzan cuestionando continuamente sus fundamentos, cada tema siempre puede verse desde un nivel académico superior, con ejemplos más interesantes, aplicaciones más útiles y mayor profundidad conceptual.

Se pueden ver temas nuevos, más interesantes para el estudiante de mayor edad, y aprovecharlos para mostrar que eso que el alumno debería ya conocer, es útil y lo puede entender y aprender mejor a la luz de estas nuevas situaciones. Haciendo esto, se le da oportunidad al estudiante rezagado de reincorporarse a la discusión gracias a una nueva motivación.

¿Por qué enseñamos (aprendemos) matemáticas?

- Las matemáticas forman parte de nuestra cultura.
- Las matemáticas son muy útiles. Nuestro modo de vida depende de ideas matemáticas antiguas y modernas.
- Las matemáticas promueven la razón, sobre la autoridad, los trucos o la fuerza bruta, para resolver problemas.

Cada vez que presentamos algunas nuevas ideas matemáticas a los estudiantes, debemos responder estas tres preguntas:

- ¿Por qué y cuándo se desarrollaron esas ideas?
- ¿Cómo se usan en la vida moderna?
- ¿Cómo podemos *entenderlas* mejor?

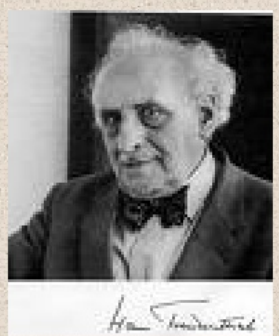
Filosofía de los estándares

- Ideas que guiaron la elaboración de los estándares
  - Es importante tomar en cuenta el origen histórico y el valor cultural y científico de los conceptos y las teorías matemáticas.
  - Es importante usar ejemplos que sean significativos para el alumno.
  - Hay que hacer énfasis en la comprensión por encima del manejo de procedimientos y fórmulas.
  - Conviene tomar en cuenta y aprovechar los entornos social y tecnológico del estudiante.
  - Debe reconocerse la importancia creciente de la computación y la relevancia de las matemáticas en ella.
  - Se deben dedicar esfuerzos para fomentar en el estudiante una actitud positiva hacia las matemáticas.

¿Qué matemáticas debemos enseñar?

"Nunca deberíamos pensar en las Matemáticas que puede aprender un niño, sino en aquellas con cuyo aprendizaje se contribuya al desarrollo de su dignidad humana"

Hans Freudenthal



Contenido de los estándares

- ¿En qué consiste un estándar?
  - Un *nombre* corto
  - Una *descripción* del tema, indicando su origen histórico, la importancia que tiene en la formación del estudiante y una descripción de los enfoques recomendados para su enseñanza.
  - Una lista de *indicadores* que aclaran cómo puede saberse que un estudiante cumple el estándar. Éstos pueden servir como guía en la elaboración de pruebas de evaluación.

Contenido de los estándares

- Los estándares se presentan agrupados en tres partes que podrían corresponder vagamente a los tres años del Bachillerato.
  - Primera parte (22)
    - El concepto de número
    - Geometría plana y trigonometría
    - Cuerpos en el espacio
    - Propiedades algebraicas de los números
  - Segunda parte (17)
    - Los números reales y el continuo
    - La perspectiva
    - Álgebra, ecuaciones y álgebra moderna
    - Cálculo combinatorio, probabilidad y muestreo

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Bachillerato.pdf

Contenido de los estándares

- Tercera parte (16)
  - Geometría analítica
  - Las funciones
  - El cálculo
  - La campana de Gauss
  - Pruebas de hipótesis
- Estándares transversales (8)
  - Destreza algebraica
  - Los conjuntos y el infinito
  - Capacidad de abstracción
  - Simbología matemática
  - Capacidad algorítmica
  - Informática y programación
  - Matemáticas superiores
  - Las matemáticas en el arte

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Bachillerato.pdf

Aclaraciones pertinentes

¿Qué status tienen? Los estándares que presenta el documento son una propuesta. Corresponde a las instancias universitarias apropiadas darles (o no) un status normativo.

¿Cómo deben interpretarse? Los temas recomendados deben cubrirse "en general", no necesariamente todos. El objetivo es proporcionar una visión culturalmente significativa de las matemáticas y lograr que el estudiante se interese en ellas y se apropie del pensamiento matemático como una herramienta útil y una parte integral de su cultura como ser humano.

¿Cómo pueden describirse en pocas palabras?

Lo esencial es su enfoque que consiste en:

- privilegiar la *comprensión* sobre la *habilidad* en la aplicación de procedimientos,
- *justificar* todos y cada uno de los temas cubiertos en términos de su *origen histórico* y su *importancia cultural y científica* y
- procurar que la presentación de cada tema vaya acompañada de *aplicaciones significativas* para el estudiante.

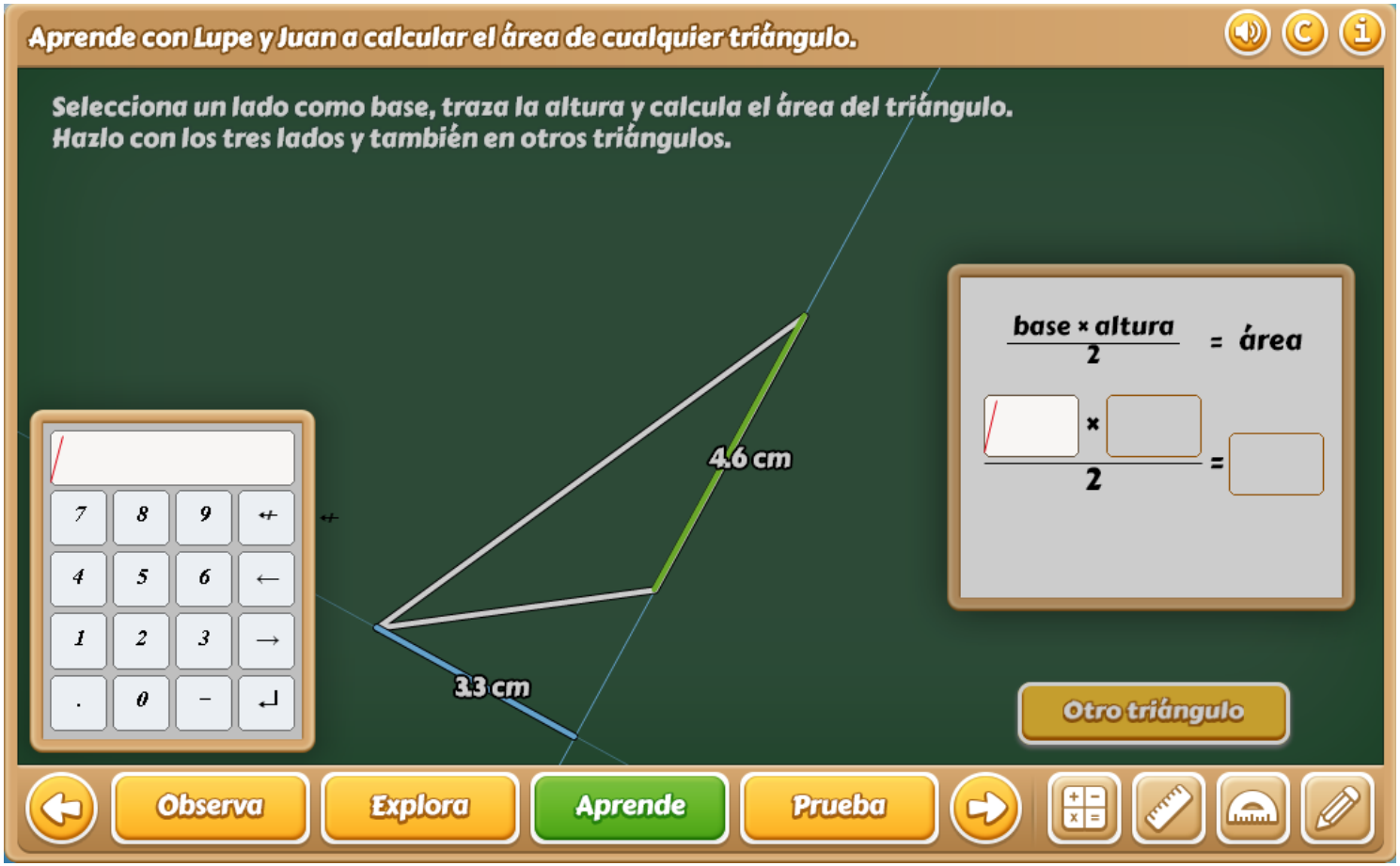
http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/

¿Qué hacer ahora?

El nuevo objetivo del Grupo de Estándares es desarrollar materiales educativos apropiados a la filosofía, los objetivos y los contenidos propuestos en el documento de estándares.

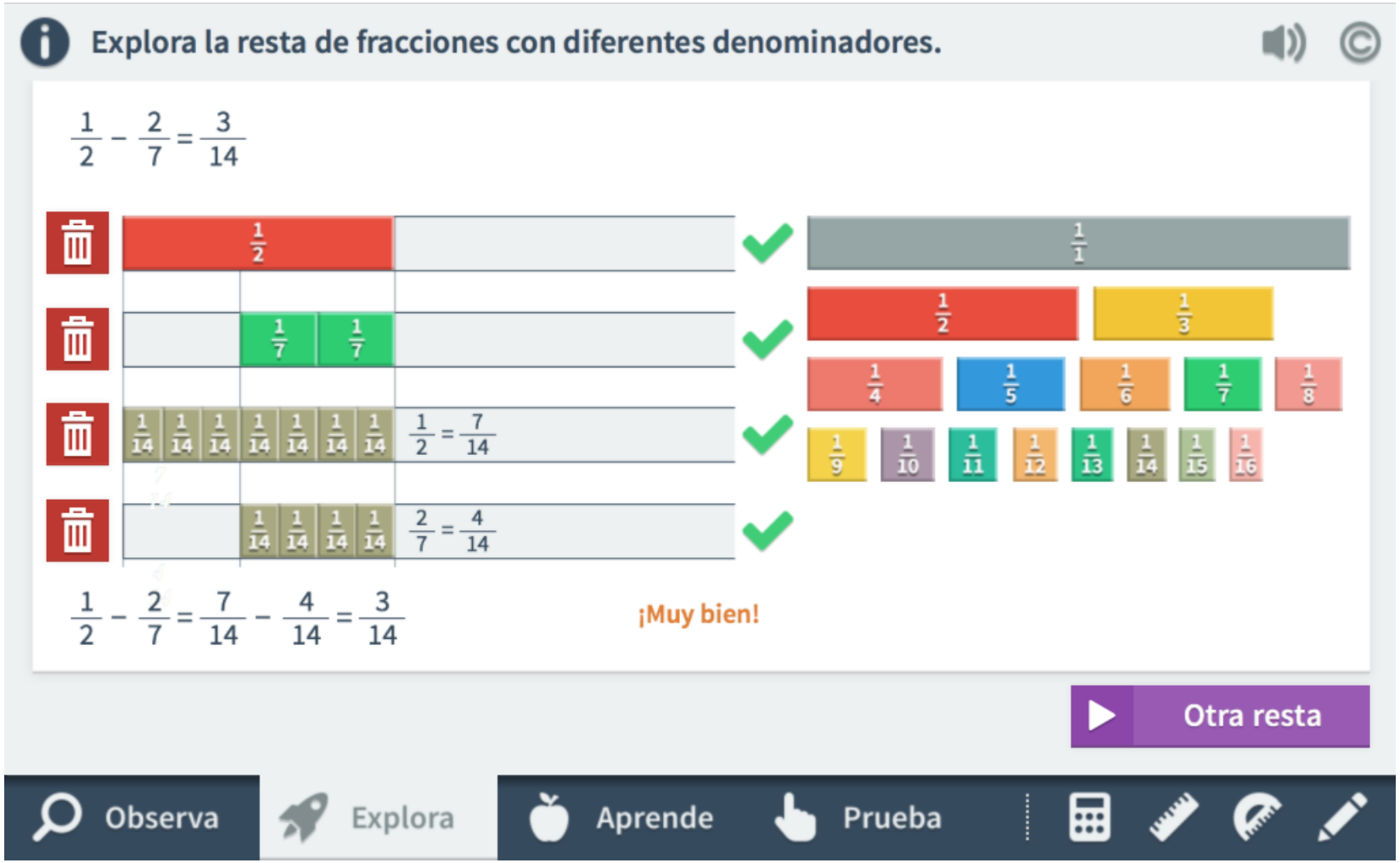
Queremos extender una cordial invitación a los profesores de matemáticas de la UNAM, de todos los niveles educativos, a participar en esta tarea.

A continuación presentamos algunas unidades interactivas que hemos desarrollado para la enseñanza de las matemáticas a diferentes niveles y que podrían emplearse como materia prima en la creación de los materiales educativos apropiados a los estándares que planeamos desarrollar.



http://descartes.matem.unam.mx/recursos/Primaria/AprendeMxUNAM/

Unidades didácticas interactivas de matemáticas para la educación básica



http://descartes.matem.unam.mx/entregas/AprendeMxUNAM/matematicas.html

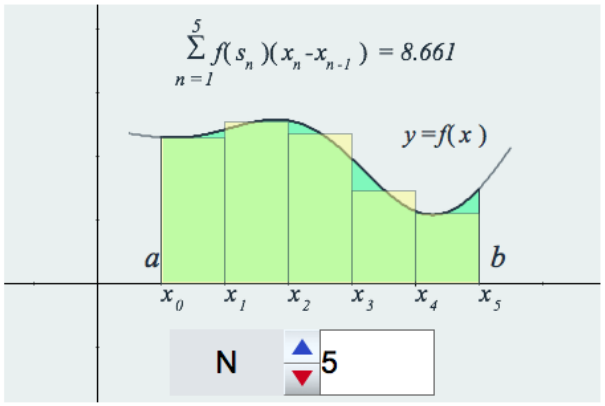
Cálculo Diferencial e Integral: Límites | Introducción al Cálculo

La integral, la derivada y el teorema fundamental del Cálculo

La integral

La integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, se define de manera que corresponda al área bajo la gráfica de la función entre los puntos a y b del eje horizontal y se denota por:

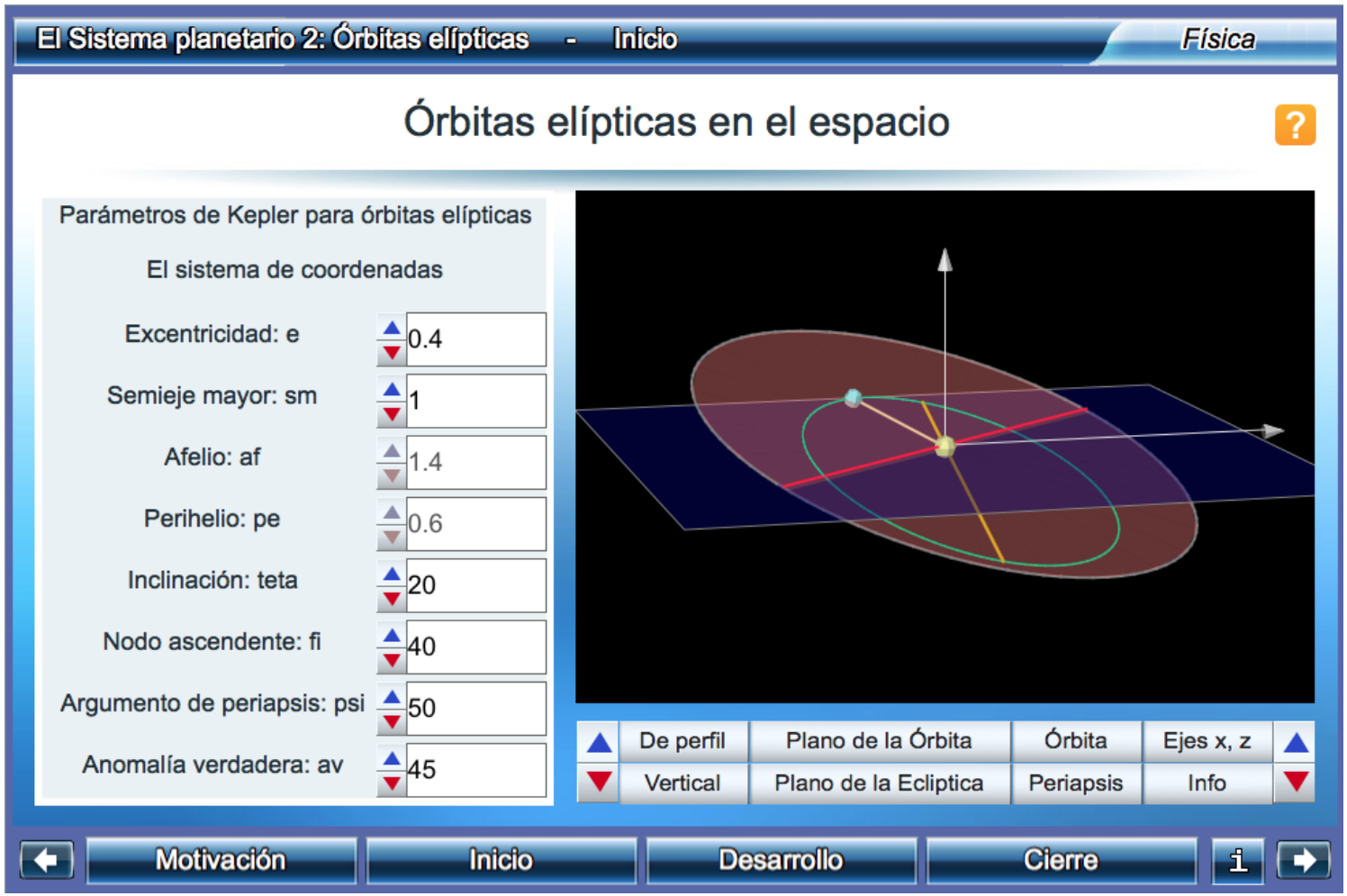
$$\int_a^b f(x)dx.$$



La definición formal se hace a través de un límite. Se considera una partición del intervalo $[a,b]$ que consiste de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_N\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$. En cada intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ se escoge un punto s_n. La integral se define como el límite de las sumas de los productos de los valores $f(s_n)$ y las longitudes $x_n - x_{n-1}$ de los intervalos $[x_{n-1}, x_n]$, cuando la partición se hace cada vez más fina, es decir, cuando el máximo de las longitudes $x_n - x_{n-1}$ tiende a cero. En símbolos,

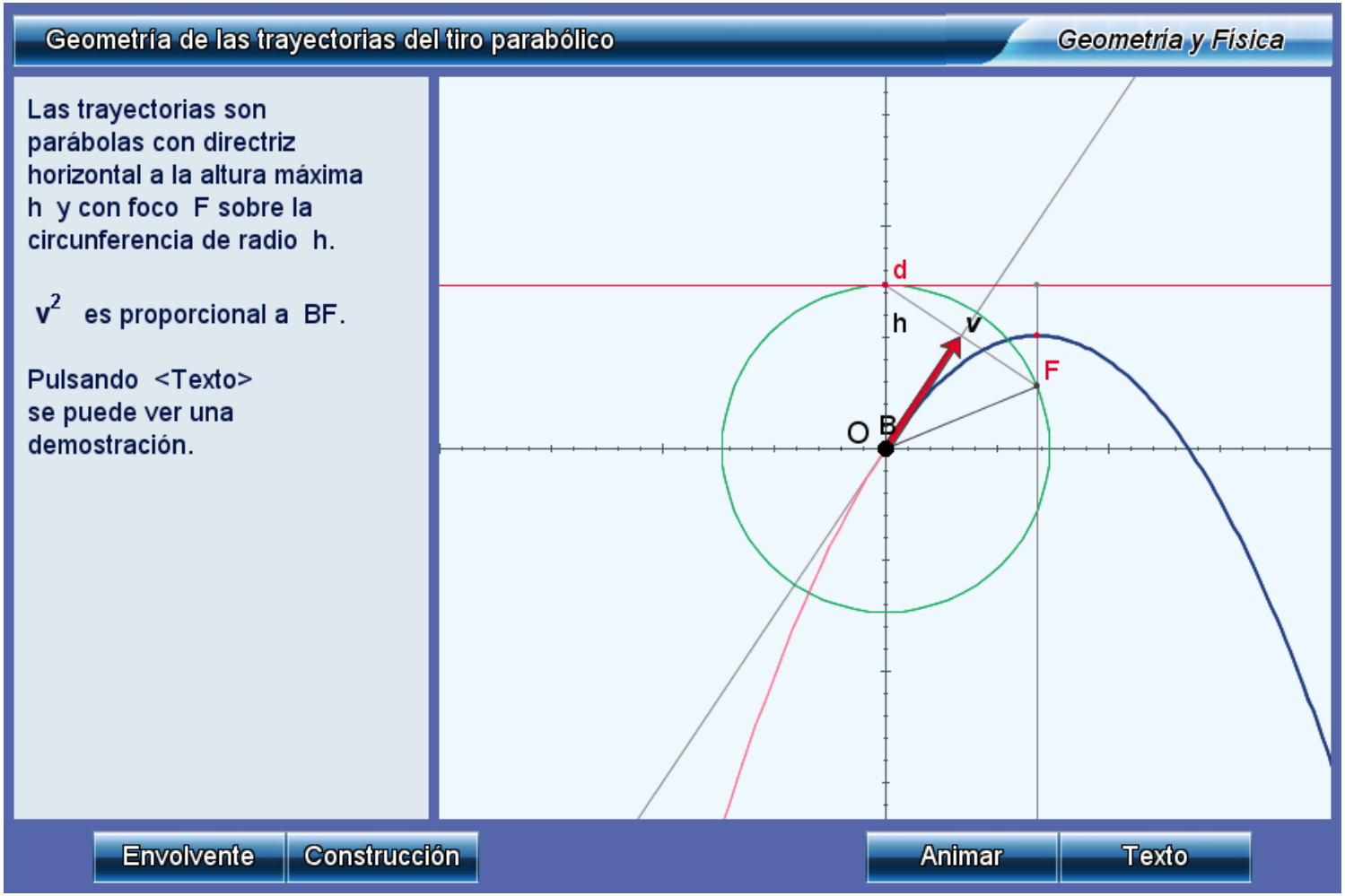
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{n=1}^{N} f(s_n)(x_n - x_{n-1})$$

http://descartes.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC/



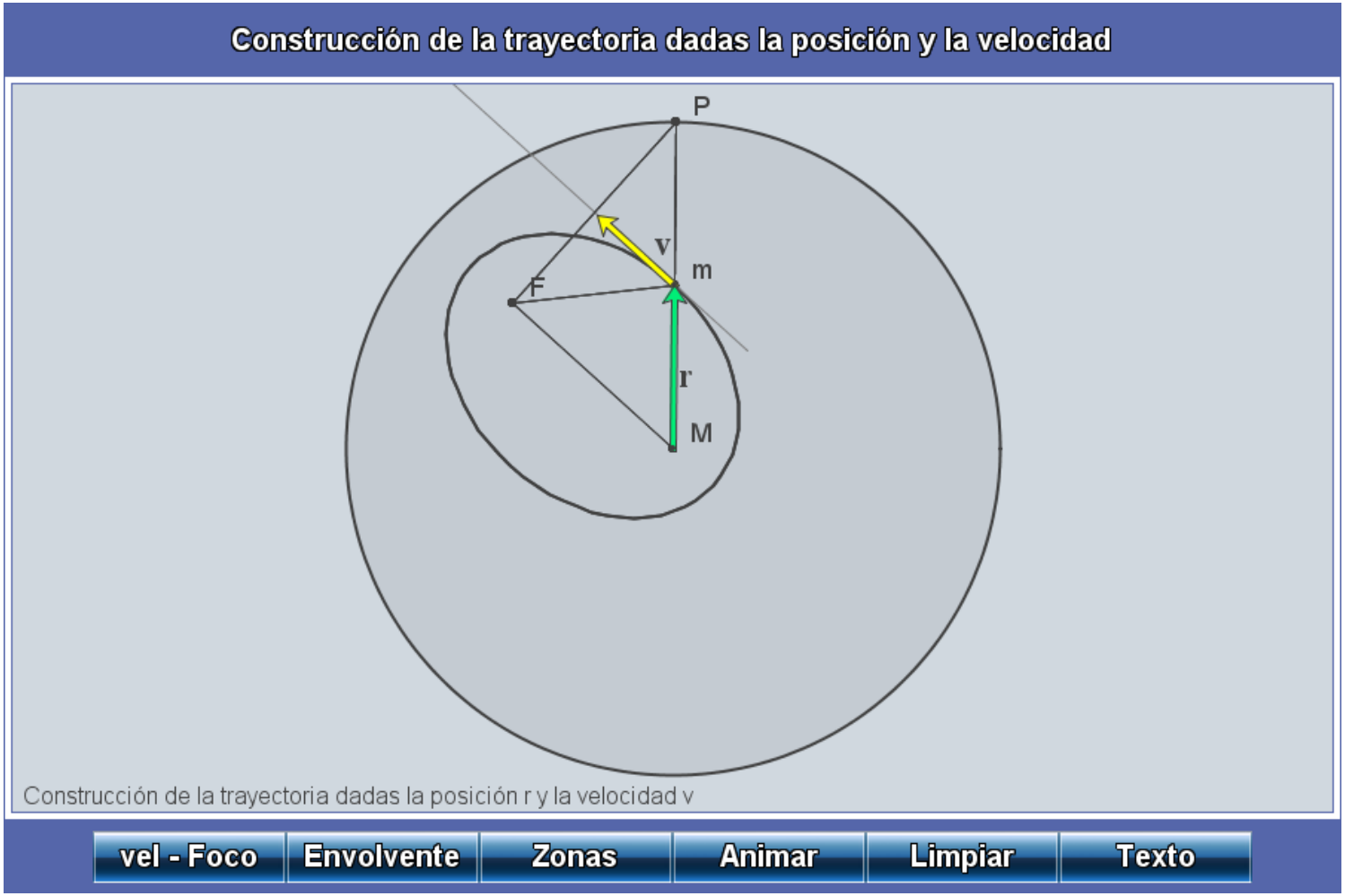
http://descartes.matem.unam.mx/recursos/Licenciatura/Un100/

El tiro parabólico



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/07_ElTiroParabolico/

Las leyes de Kepler



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/07_LeyesDeKepler/

Bibliografía

Abreu, J.L., Apodaca, N.P., Bracho, J., Fautsch, E., Guevara, M.C., Hernández, D., Hernández, M., Marmolejo, E., Miranda, A.I. y Rajsbaum, S., *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* UNAM, México (2016).

Abreu, J.L., Barot, M. y Bracho, J., *Matemáticas, Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales UNAM - Siglo XXI*, Siglo XXI Editores, 2010.

Davis, P. and Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Birkhauser, 1981.

Freudenthal, Hans, *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-London, 1991.

Devlin, Keith, *The Math Gene, How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books, 1999.

Bibliografía

Hersh, Reuben, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Advances in Mathematics 31, 1979, pp. 31-50.

Hersh, Reuben, *What Is Mathematics Really?*, Oxford University Press, 1997.

Klein, Felix, *Elementarmathematic vom höhere Standpunkte aus*, Arithmetik, Algebra, Analysis, 1908 (Spanish translation published by NIVOLA, 2006).

Klein, Morris, *Mathematics, The Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980.

Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 (Pruebas y refutaciones, Madrid, Alianza, 1981).

Meavilla, Vicente, *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros*, Almuzara, 2010.

Webografía

- Abreu, J.L., Apodaca, N.P., Bracho, J., Fautsch, E., Guevara, M.C., Hernández, D., Hernández, M., Marmolejo, E., Miranda, A.I. y Rajsbaum, S., *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* UNAM, México, 2016
  http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Bachillerato.pdf
- Abreu, J.L., Bracho, J., *Una propuesta para mejorar la educación matemática*, 2016 **http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/UnaPropuesta.pdf**
- Abreu, J.L., *Calculando el número π*, 2015
  http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/CalculoDePi.pdf
- Abreu, J.L., Barot, M., *Los sistemas de numeración de la antigüedad*, 2014 **http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/SistemasDeNumeracion.pdf**

Esta presentación y el libro de estándares en pdf pueden descargarse de:

http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/