Las curvas cónicas en la geometría proyectiva *

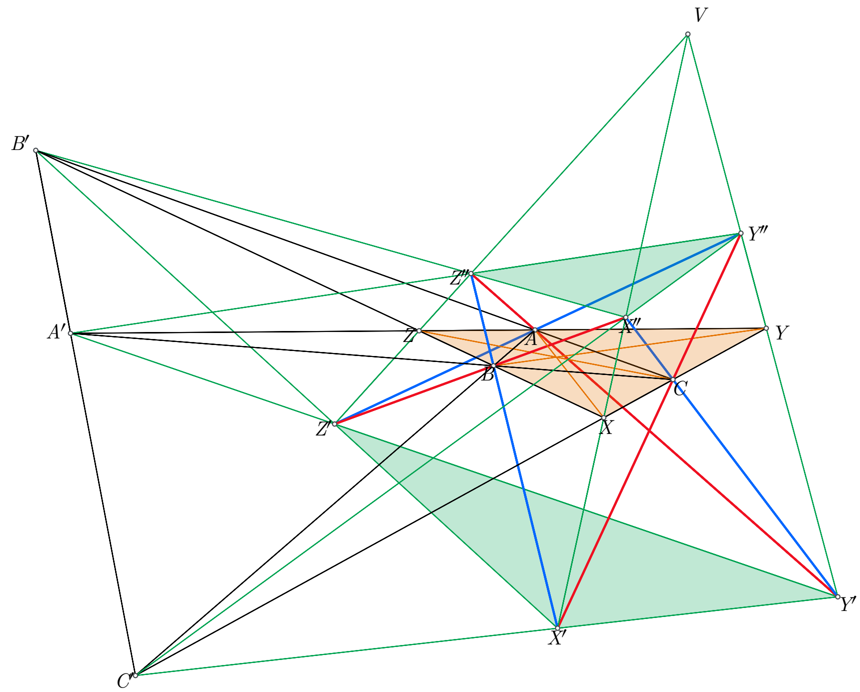
José Luis Abreu León y Javier Bracho Carpizo

29 de septiembre de 2017

*En construcción

Las curvas cónicas en la geometría proyectiva

Teorema. Sean X, Y y Z tres puntos y sean $A \in YZ$, $B \in ZX$ y $C \in XY$. Sea V un punto fuera del plano $\pi = X \vee Y \vee Z$ y sea $X' \in VX$ distinto de V y de X. Definamos ahora $Y'' = X'C \wedge VY$, $Z' = Y''A \wedge VZ$, $X'' = Z'B \wedge VX$, $Y' = X''C \wedge VY$ y $Z'' = Y'A \wedge VZ$.



Entonces $Z'' = X'B \wedge VZ$ si y sólo si XA, YB y CZ son concurrentes.

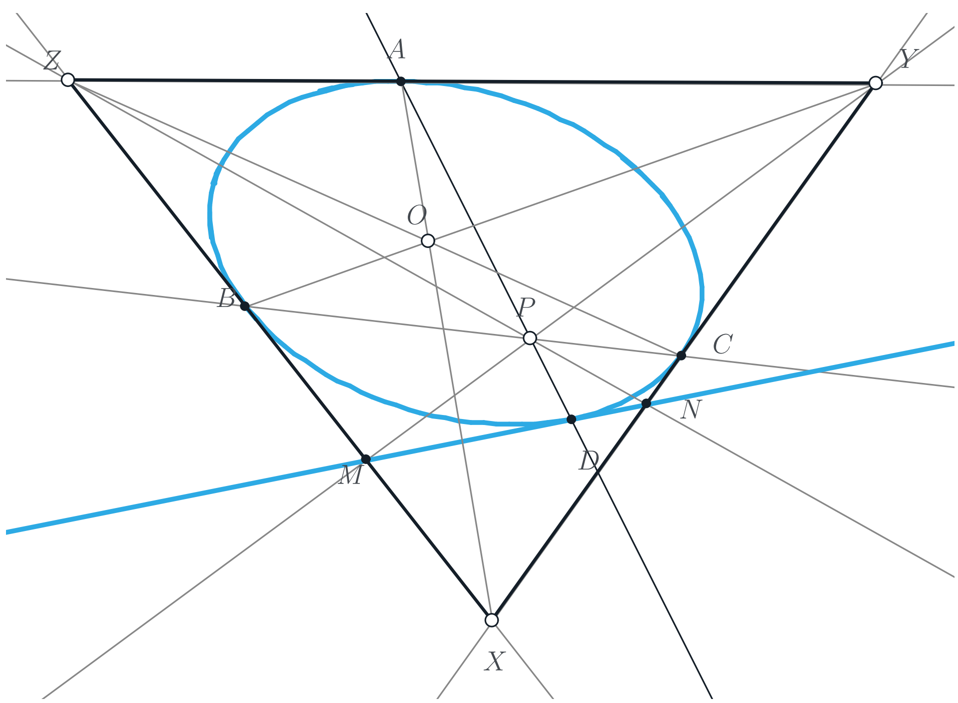
Demostración. Supongamos primero que $Z'' = X'B \wedge VZ$. Entonces los triángulos XYX, $X'Y'Z''$ y $X''Y''Z'$ están en perspectiva y, como A y B son dos de las intersecciones de sus lados correspondientes, la tercera sera $C' = XY \wedge X'Y' = XY \wedge X''Y'' = XY \wedge AB$. Análogamente se puede ver que $A' = YZ \wedge Y'Z' = YZ \wedge Y''Z'' = YZ \wedge BC$ y $B' = ZX \wedge Z'X' = ZX \wedge Z''X'' = ZX \wedge CA$. Por otro lado los triángulos $X'Y'Z'$ y $X''Y''Z''$ están en perspectiva desde V y, por el teorema de Desargues, las intersecciones de sus lados correspondientes, que son precisamente A', B' y C', están alineadas. Esto prueba que los triángulos XYZ y ABC están en perspectiva axial y por el inverso del teorema de Desargues también lo están en perspectiva polar, lo cual quiere decir que XA, YB y ZC son concurrentes. En la figura el punto en que concurren es O.

Para demostrar el inverso supongamos que XA, YB y ZC son concurrentes. Sea O el punto en que concurren. Entonces los triángulos XYZ y ABC están en perspectiva desde O. Sean A', B', y C' los armónicos conjugados de A, B y C, respecto a YZ, ZX y XY, respectivamente. Sea $X' \in VX$ diferente de V y de X y sea X'' su armónico conjugado con respecto a VX. Construimos ahora $Y' = X''C \wedge VY$ y $Y'' = X'C \wedge VY$, por lo que van a ser armónicos conjugados uno del otro con respecto a VY, ya que C y C' lo son respecto a XY. Ahora construimos $Z' = Y''A \wedge VZ$ y $Z'' = Y'A \wedge VZ$. Z' y Z'' son armónicos conjugados uno del otro, ahora con respecto a VZ, ya que A y A' lo son respecto a YZ. Finalmente, como B y B' son armónicos conjugados uno del otro con respecto a XZ, resulta que $B = Z_1X_2 \wedge X'Z''$. Esto demuestra que $Z'' = X'B \wedge VZ$. qed.

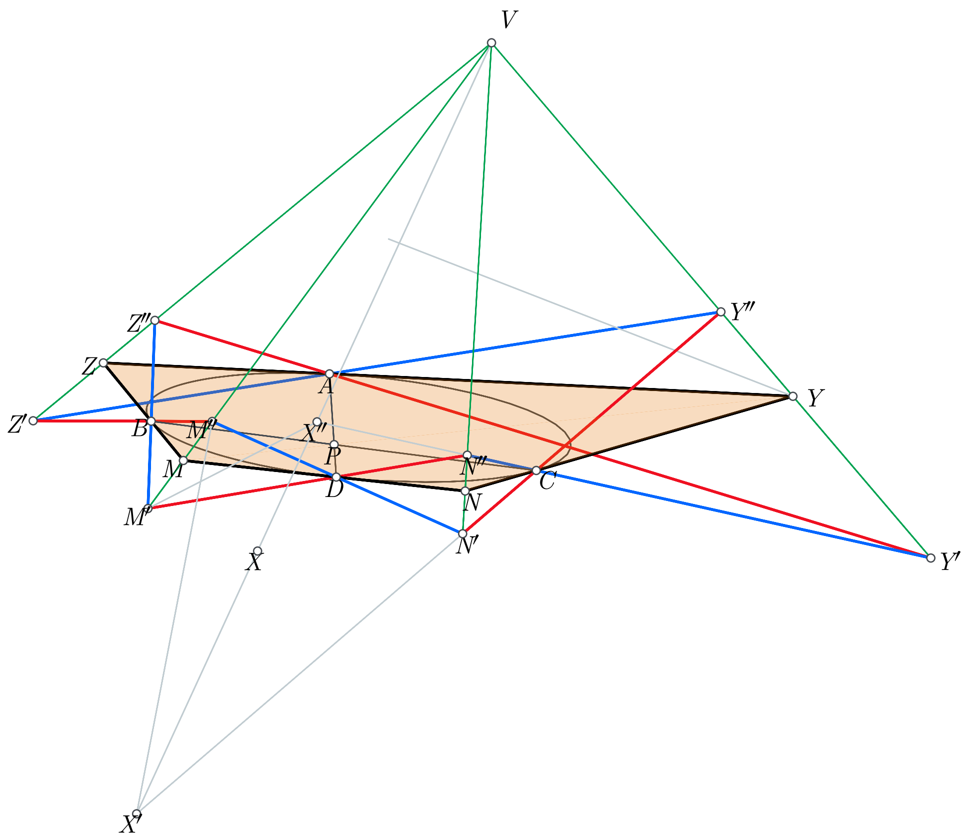
Gracias a este teorema sabemos que dado un triángulo XYZ y puntos $A \epsilon YZ$, $B \epsilon ZX$ y $C \epsilon XY$ tales que XA, YB y ZC son concurrentes, entonces hay tres rectas (rojas) que pasan, una por A, otra por B y otra por C y otras tres rectas (azules) de las que también, una pasa por A, otra por B y otra por C, tales que cada una de las rojas intersecta a una de las azules, cada una de las azules intersecta a una de las rojas y ni las rojas ni las azules se intersectan entre sí. Además, la recta roja y la recta azul que pasan por A o por B o por C son armónicas conjugadas una de la otra con respecto a cierto punto V y al plano $X \vee Y \vee Z$. Las tres rectas rojas o las tres azules generan una superficie doblemente reglada (la misma, por el "axioma del equipal"). Probaremos que tal superficie se puede generar a partir de nuestra construcción de la curva cónica que dimos al principio e esta sección, y que su intersección con el plano $X \vee Y \vee Z$ es precisamente esa curva.

Es posible definir las curvas cónicas utilizando únicamente las propiedades de incidencia de los puntos y las rectas. Hay varias formas de hacerlo, mostraremos aquí una de ellas que, al combinarla con el teorema anterior permite demostrar que estas curvas son las intersecciones de planos con superficies doblemente regladas.

Sean X, Y y Z los vértices de un triángulo. Sea O un punto de $X \vee Y \vee Z$ que no está en ninguno de los lados del triángulo. Sean $A = OX \wedge YZ$, $B = OY \wedge ZX$, $C = OZ \wedge XY$. Sea $P \epsilon AB$ y sean $M = PY \wedge ZX$ y $N = PZ \wedge XY$. Finalmente, sea $D = AP \wedge MN$. Entonces, cuando P recorre la recta AB, el punto D genera una curva cuya tangente en D es precisamente MN.



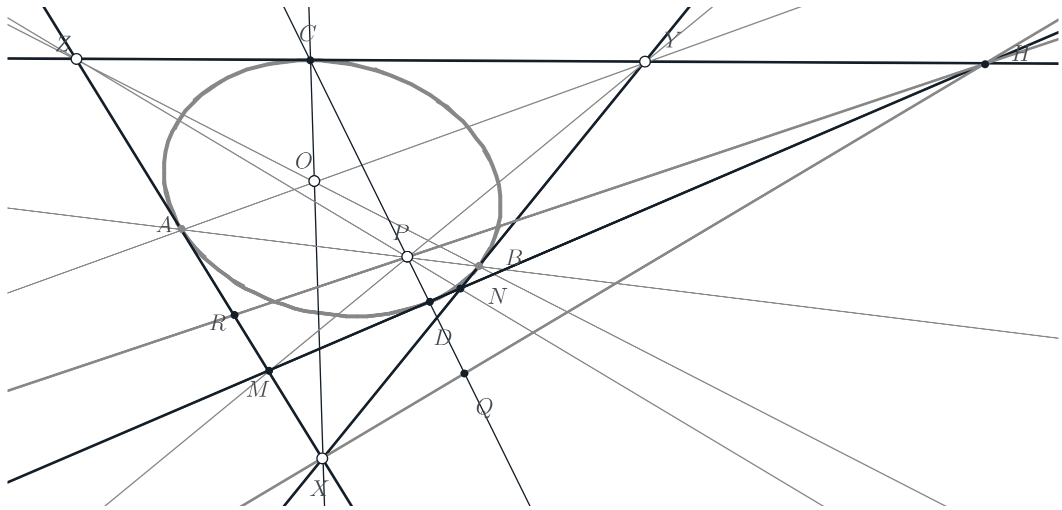
Se puede ver que la curva así definida pasa por A, por B y por C y es tangente en esos puntos a las rectas YZ, ZX y XY, respectivamente. A las curvas así definidas les llamaremos en esta *curvas cónicas*. Cuando se introducen axiomas de congruencia, es posible demostrar que estas curvas coinciden con la que en la literatura clásica se llaman también "curvas cónicas", de ahí la elección del nombre. Sin embargo, nuestra definición no requiere de la noción de *congruencia* ni de la de *círculo* o *cono circular*, como ocurre con la definición clásica.



Ampliamos ahora la construcción para obtener una superficie doblemente reglada cuya intersección con el plano $X \vee Y \vee Z$ es precisamente esta curva. Sea $M' = BX' \wedge VM$ y sea $N'' = DM' \wedge VN$. Sea $N' = CX' \wedge VN$ y sea $M'' = DN' \wedge VM$. Sea $K = M'N' \wedge M''N''$. Por construcción, $M'N'M''N''$ es un cuadrilátero cuyas diagonales se intersectan en D y sus lados en V yK. Las rectas $M'N''$ (azul) y $M''N'$ (roja) pertenecen a las familias de rectas que generan a la superficie doblemente reglada que se definió en la construcción anterior. De hecho la curva generada por D es precisamente la intersección de dicha superficie con el plano $X \vee Y \vee Z$. La existencia de esta superficie doblemente reglada nos regala el teorema de Pascal para estas curvas.

Demostraremos ahora que las curvas que hemos definido tienen ciertas propiedades de armonía.

Sea $H = MN \wedge YZ$, sea $Q = PC \wedge XY$ y se $R = PH \wedge ZX$. Es fácil ver que X es el armónico conjugado de R con respecto a ZM (basta observar el cuadrilátero $MNYZ$). Como $ZMRX$ es una cuarteta armónica y su proyección desde H a la recta PC es la cuarteta $CDPQ$, esta última también es una cuarteta armónica. En particular, D es el armónico conjugado de C con respecto a PQ.



Estos resultados nos permiten definir las curvas cónicas, proyectivamente, como la intersección de una superficie doblemente reglada con un plano.