Tecnología para promover la comprensión en matemáticas

José Luis Abreu León,
Instituto de Matemáticas,
U.N.A.M.

24 de junio de 2016

Descargar de:
http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/

Aplicando la tecnología en el aspecto esencial de la educación matemática: la comprensión de las ideas.

O cómo la herramienta de autor
DESCARTES
se usa para promover la comprensión

La tecnología puede contribuir a mejorar la educación de varias maneras. Por ejemplo, poniendo grandes cantidades de información a disposición de maestros y alumnos, o presentando ejercicios interactivos con datos aleatorios que ayudan a los estudiantes a adquirir habilidad para aplicar algunas fórmulas y algoritmos.

Sin embargo, el aspecto esencial de la educación matemática no es adquirir información, o saber cuándo y cómo aplicar algoritmos, ni siquiera demostrar teoremas mediante deducción lógica,
sino la *comprensión de las ideas matemáticas*[1].

Puede la tecnología ayudar a los estudiantes a *entender* las ideas matemáticas?

[1] Justificaremos esta afirmación más adelante

El propósito de esta charla es mostrar que la tecnología puede promover la comprensión de las ideas matemáticas.

Para ello mostraremos algunos ejemplos de cómo la herramienta de autor

DESCARTES

está ayudando a alcanzar esta meta. Analizaremos dichos ejemplos, señalando los elementos esenciales de esta tecnología que ayudan a promover la comprensión, primero entre los maestros, y luego entre los estudiantes.

Plan de la presentación

- Justificaremos la afirmación de que el aspecto más importante de la educación matemática es la comprensión de las ideas.
- ¿Qué es DESCARTES y qué tiene que ver con todo esto?
- Ejemplos de experiencias matemáticas con DESCARTES.
- ¿Cómo es que la tecnología de DESCARTES promueve la comprensión?

La filosofía dominante de las matemáticas durante la mayor parte del siglo XX fue el *formalismo* (promovido inicialmente por David Hilbert 1862-1943), con su énfasis en los axiomas y las demostraciones.

Esta filosofía, aplicada a la educación matemática, resultó desastrosa. Recordemos el daño que las llamadas *nuevas matemáticas* produjeron en la educación básica y el que el *enfoque Bourbaki* produjo en la educación superior. Gran parte de los problemas que padece la educación matemática en la actualidad, provienen de esos dos movimientos.

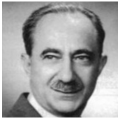
Es necesario eliminar tan nefasta tradición. Para ello, hace falta compartir una filosofía de las matemáticas más útil y sensata.

La palabra *matemáticas* viene del griego MATHEMATA, y significa *aquello que se puede aprender y enseñar, porque es lógico y racional*. En la mayoría de las lenguas europeas, la palabra usada para matemáticas tiene la misma raíz griega, pero en holandés y flamenco la palabra es WIESKUNDE, que significa *ciencia de la certidumbre*. La palabra propuesta originalmente por Simon Stevin (1548-1620) era WIESKUNST, el *arte de la certidumbre*.

Pensadores que han inspirado nuestra filosofía de las matemáticas.






Simon Stevin, David Hilbert, Felix Klein[3], Kurt Gödel, Hans Freudenthal[4], Morris Klein[4], Reuben Hersh[2]

Sabemos que no se puede obtener *certidumbre absoluta* sobre asuntos del mundo material. Pero las matemáticas se ocupan de construcciones mentales sobre las que sí podemos tener certidumbre absoluta (aunque con ciertas limitaciones, recordemos el teorema de incompletitud de Gödel).

La razón de ser de las matemáticas es precisamente la certidumbre que con ellas se obtiene, aunque solo aplique a cuestiones abstractas. Y esa certidumbre la adquirimos al *entenderlas*. No proviene de ninguna otra autoridad, mas que de la razón.

¿De qué sirve tener certeza sobre cuestiones abstractas?

Las matemáticas nos dan certidumbre absoluta sobre los modelos abstractos que creamos para representar la realidad. Entenderlas significa conocer bien esos modelos y saber cómo se relacionan con aquellas porciones de la realidad que pretenden representar.

Tal vez sea inexplicable cómo es que esos modelos abstractos son tan útiles, pero el hecho es que, cuando están bien hechos, suelen proporcionar información que nos ayuda a entender y controlar la naturaleza y la sociedad. Y este hecho es algo que debemos compartir con nuestros estudiantes.

Nota: Las ideas matemáticas mismas son parte de nuestra realidad, y como tales, son susceptibles de ser estudiadas matemáticamente (matemáticas puras).

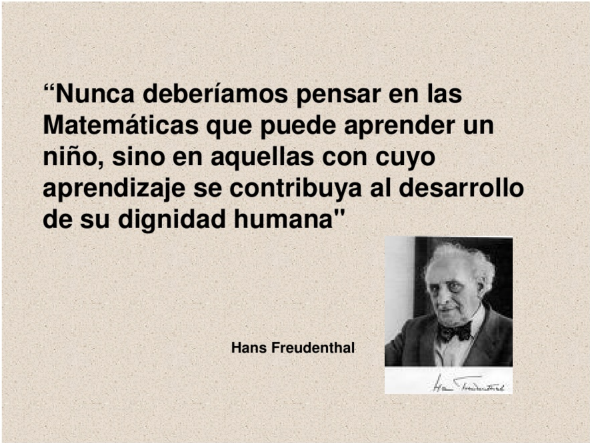
La comprensión es la esencia de la educación matemática

Si aceptamos esta concepción de las matemáticas, resulta evidente que, para que las ideas matemáticas tengan sentido y sean útiles, es indispensable entenderlas. Por eso decimos que lo esencial en la educación matemática es, o debe ser, la comprensión de las ideas matemáticas.

Para aclarar: las ideas matemáticas son

- los objetos mentales que construimos, así como
- sus propiedades y las relaciones de unos con otros.

¿Qué matemáticas debemos enseñar?



¿Por qué enseñamos (aprendemos) matemáticas?

- Las matemáticas forman parte de nuestra cultura.
- Las matemáticas son muy útiles. Nuestro modo de vida depende de ideas matemáticas antiguas y modernas.
- Las matemáticas promueven la razón, sobre la autoridad, los trucos o la fuerza bruta, para resolver problemas.

Cada vez que presentamos algunas nuevas ideas matemáticas a los estudiantes, debemos responder estas tres preguntas:

- ¿Por qué y cuándo se desarrollaron esas ideas?
- ¿Cómo se usan en la vida moderna?
- ¿Cómo podemos *entenderlas* mejor?

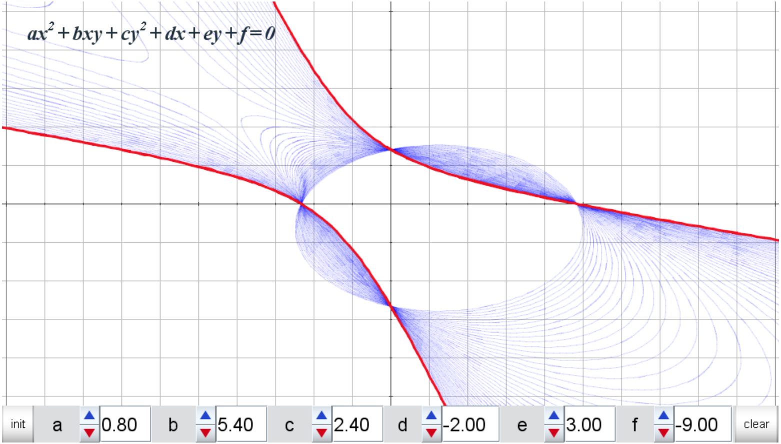
¿Qué es DESCARTES?

DESCARTES es una herramienta de autor, diseñada principalmente para profesores de matemáticas de enseñanza media y superior, para ayudarles a:

- *entender* las ideas matemáticas que van a enseñar, y
- a presentarlas de manera que los estudiantes las *entiendan*.

DESCARTES es un entorno de programación cuyos elementos primitivos son objetos matemáticos: *parámetros* (que el estudiante puede manipular), *vectores, matrices, funciones y algoritmos* (que el maestro puede programar) y *espacios*, de 2 y 3 dimensiones, en los que se dibujan *figuras* y *gráficas* que se mueven cuando el estudiante modifica los *parámetros*.

Las gráficas de las ecuaciones de 2º grado en dos variables son secciones cónicas.
En esta escena el estudiante puede controlar los 6 parámetros de la ecuación: a, b, c, d, e, **y** f**,**
y estudiar el comportamiento de la sección cónica que representa, ante las variaciones de los parámetros.

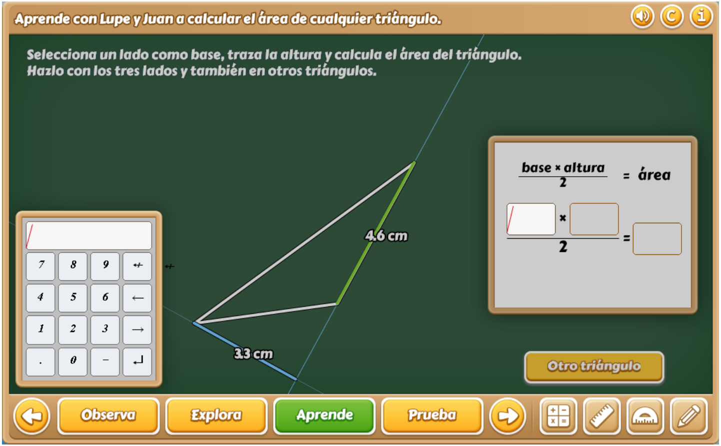


http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/descartes/gral2ndegequ.html

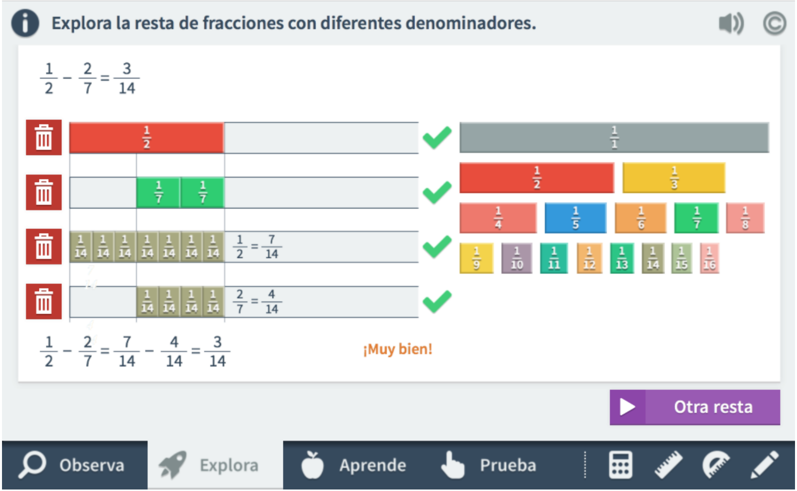
A continuación presentaremos algunos ejemplos de unidades didácticas desarrolladas con DESCARTES y, al mismo tiempo, describiremos algunas experiencias interesantes relacionadas con la *comprensión*, que ocurrieron durante su desarrollo.

El ejemplo principal que usaremos para este propósito, y el que analizaremos con mayor profundidad, es el de las *trayectorias parabólicas*.

Sin embargo comenzaremos con algunos ejemplos desarrollados parar la educación básica y media, con el propósito de mostrar la amplitud de temas que se pueden ilustrar con la herramienta de autor DESCARTES.



http://descartes.matem.unam.mx/recursos/Primaria/AprendeMxUNAM/



http://descartes.matem.unam.mx/entregas/AprendeMxUNAM/matematicas.html

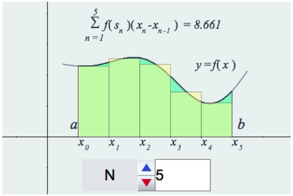
Cálculo Diferencial e Integral: Límites | **Introducción al Cálculo**

La integral, la derivada y el teorema fundamental del Cálculo

La integral

La integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, se define de manera que corresponda al área bajo la gráfica de la función entre los puntos a y b del eje horizontal y se denota por:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

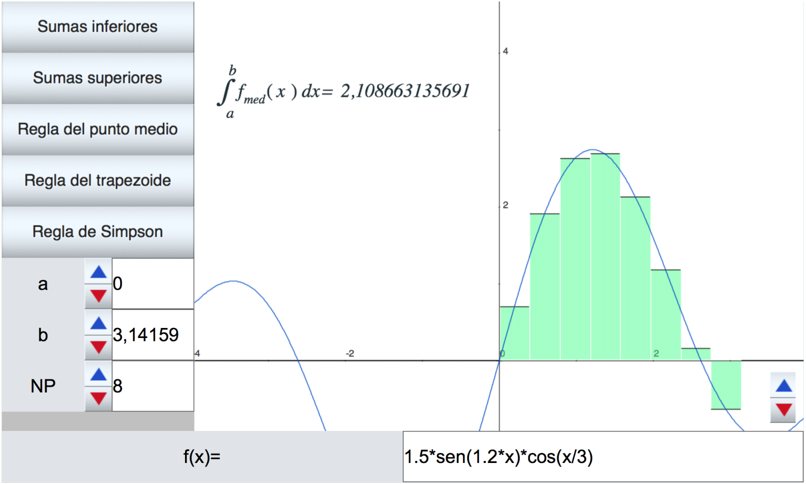


La definición formal se hace a través de un límite. Se considera una partición del intervalo $[a,b]$ que consiste de puntos $\{x_0, x_1, x_2, \dots x_N\}$ tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$. En cada intervalo $[x_{n-1}, x_n]$ se escoge un punto s_n. La integral se define como el límite de las sumas de los productos de los valores $f(s_n)$ y las longitudes $x_n - x_{n-1}$ de los intervalos $[x_{n-1}, x_n]$, cuando la partición se hace cada vez más fina, es decir, cuando el máximo de las longitudes $x_n - x_{n-1}$ tiende a cero. En símbolos,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||P|| \to 0} \sum_{n=1}^{N} f(s_n)(x_n - x_{n-1})$$

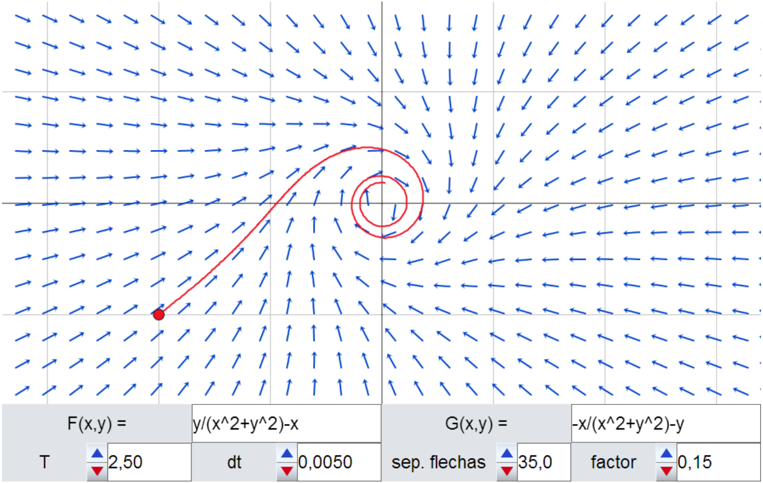
http://descartes.matem.unam.mx/recursos/Bachillerato/DGEE_DGTIC/

Integración numérica

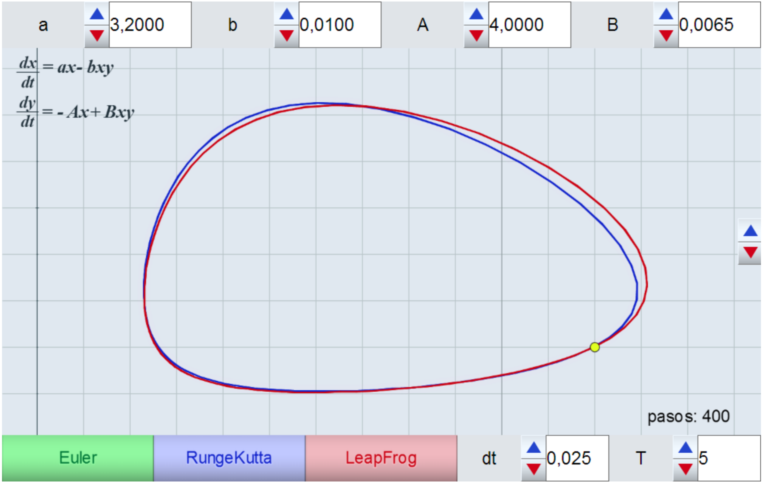


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/03_Integracion_numerica/

Sistemas autónomos

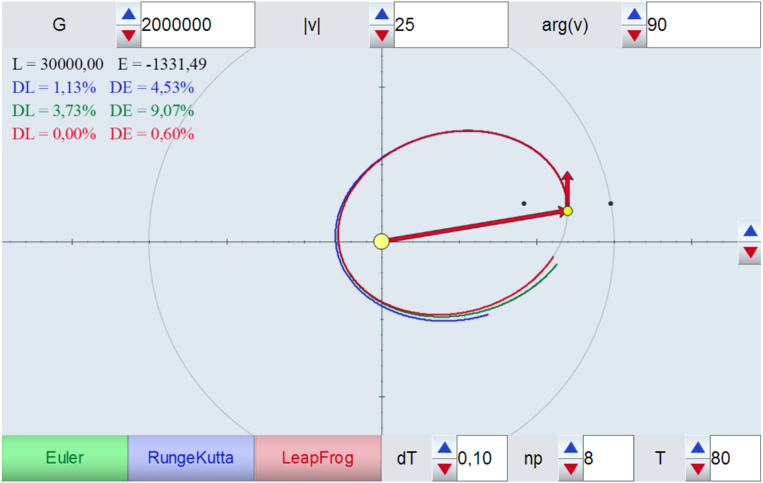


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/09_SistemasDinamicos/

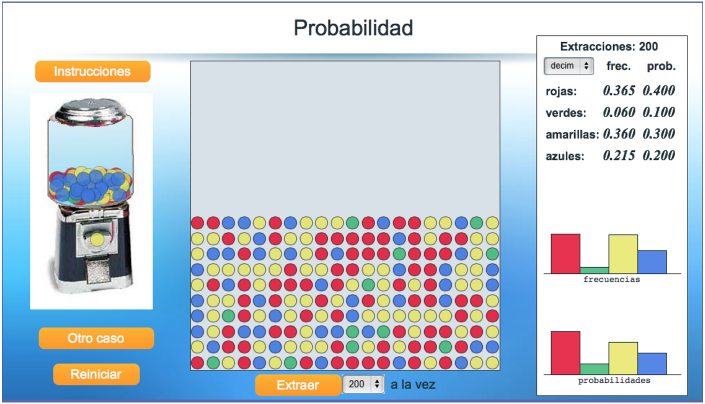


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/09_SistemasDinamicos/LotkaVolterra.html

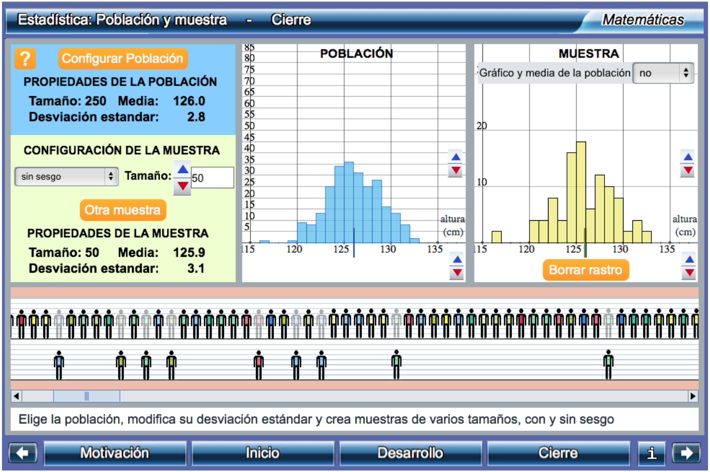
Kepler 2D (Leap-Frog)



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/09_SistemasDinamicos/Kepler2D.html

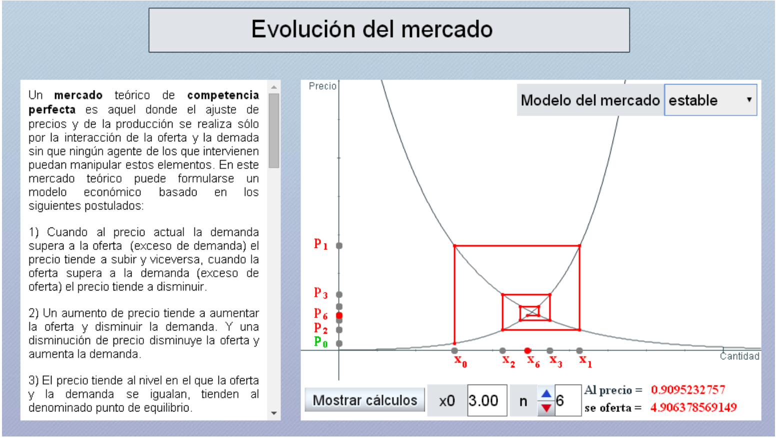


http://arquimedes.matem.unam.mx/chile/R3_Probabilidad/



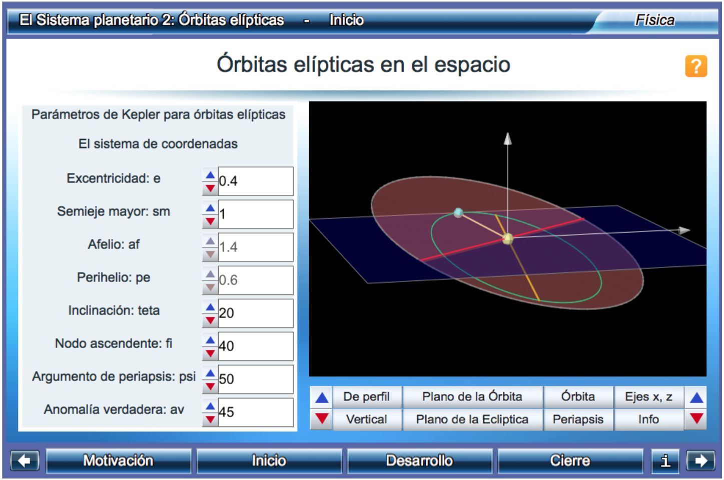
http://arquimedes.matem.unam.mx/chile/R2_Muestreo/

Modelos matemáticos en la economía



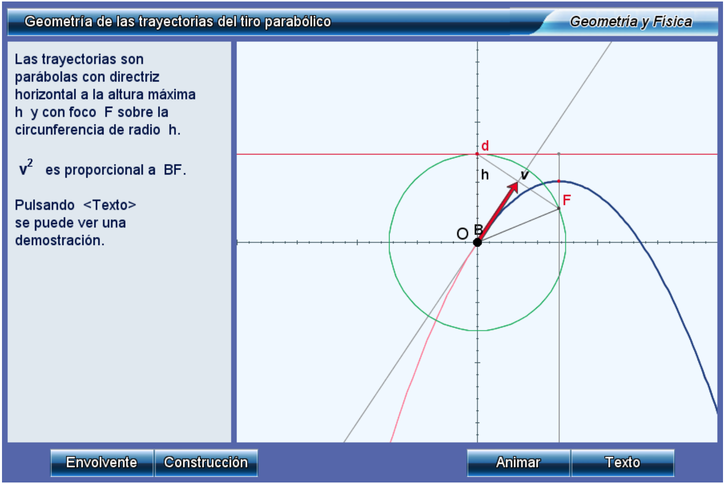
http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/_Un_048_LeyOfertaDemanda/

Astronomía

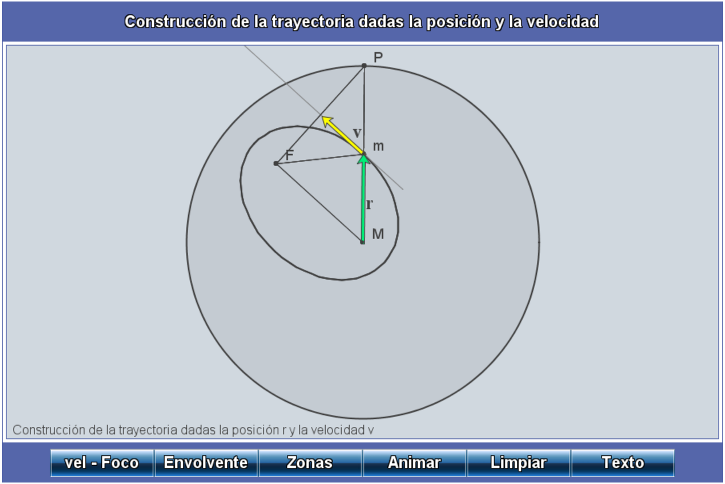


http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/_Un_054_ElSistemaPlanetario_2/

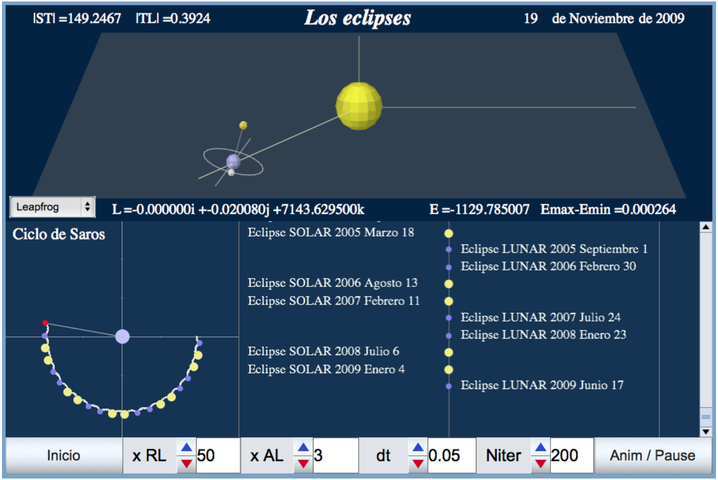
El tiro parabólico



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/07_ElTiroParabolico/

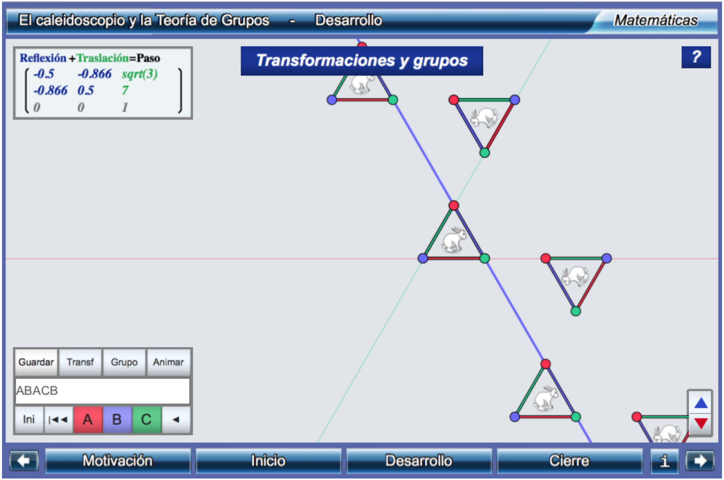


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/03_EjemplosParaLicenciatura/07_LeyesDeKepler/



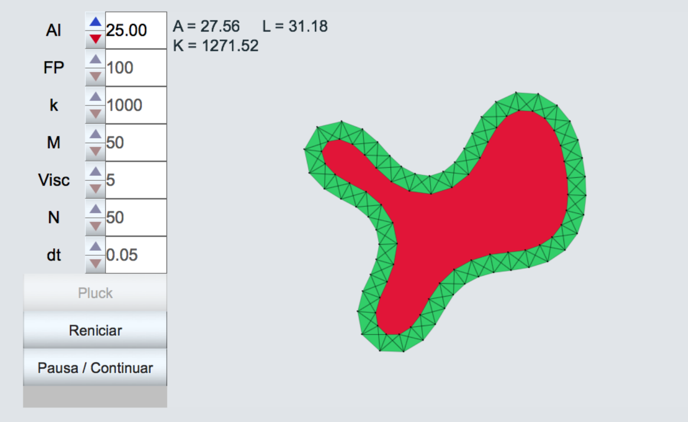
http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/04_EjemplosParaPosgrado/03_Eclipses3D/

Teoría de grupos

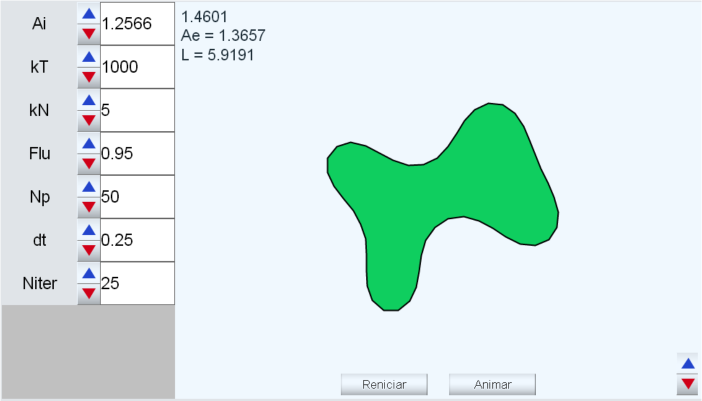


http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/_Un_040_CaleidoscopioYTeoriaDeGrupos/

Investigación: La célula, 1 de 2

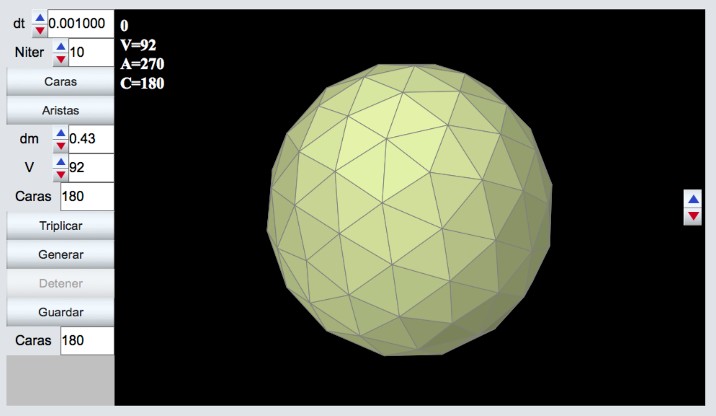


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/04_EjemplosParaPosgrado/01_CadenasDeParticulas/01_Globulo_1.html

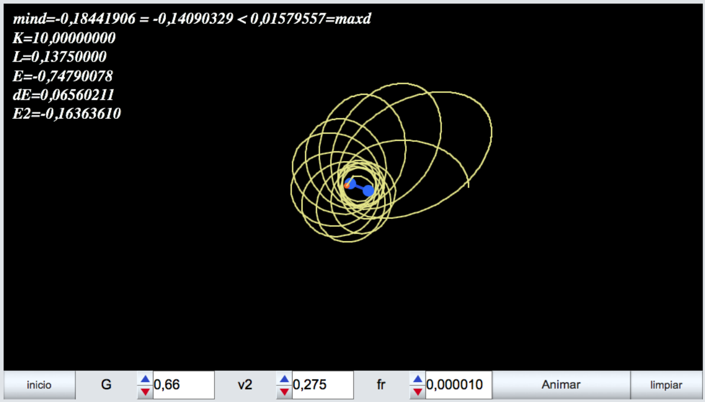


http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/04_EjemplosParaPosgrado/01_CadenasDeParticulas/02_Globulo_2.html

Investigación: Poliedros inscritos en la esfera



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/04_EjemplosParaPosgrado/01_CadenasDeParticulas/



http://arquimedes.matem.unam.mx/EJEMPLOS/04_EjemplosParaPosgrado/04_Cuerpos_celestes/

¿Cómo es que DESCARTES promueve la comprensión?

- Cuando el maestro desarrolla una unidad interactiva con DESCARTES, tiene que planear una secuencia didáctica. Eso le da oportunidad de reflexionar sobre el origen, la importancia y la utilidad del tema, así como sobre su lógica interna. Cosas todas que deben quedar reflejadas en la unidad.
- Luego, el maestro crea simulaciones que ilustran algunas ideas matemáticas. Al hacerlo con DESCARTES descubre posibles malentendidos y tiene la oportunidad de analizarlos y realizar los ajustes necesarios para profundizar en el tema de estudio. Con suerte, puede descubrir también alguna nueva propiedad desconocida para él o incluso para el resto del mundo.

¿Cómo es que Descartes promueve la comprensión?

- Estas actividades hacen que el profesor se sienta creativo, orgulloso se sus desarrollos y deseoso de mostrarlos a sus colegas y alumnos. Se interesa en descubrir si su unidad es útil, y en encontrar formas de mejorarla. Todo esto mejora su autoestima y redunda en beneficio de la educación.
- Durante la clase, mientras los estudiantes están interactuando con la unidad en una computadora o una tableta, el maestro queda libre para prestar atención especial a aquellos estudiantes que lo requieran. Al mismo tiempo, esto proporciona una valiosa retroalimentación acerca de las unidades didácticas que se están aplicando.

Esto ha ocurrido en los proyectos Descartes y EDA en España (ver informes de esto en http://recursostic.educacion.es/eda/web/descartes/descartes_descartes2.html) y continúa sucediendo en la Red Educativa Digital Descartes.

El desarrollo y uso de unidades didácticas interactivas puede ser muy útil en la educación matemática. Pero no deben olvidarse estos tres puntos:

- Es necesario involucrar a los maestros en el desarrollo de las unidades.
- Los maestros deben apropiarse de las unidades.
- Las unidades deben mejorarse continuamente.

Bibliografía

- ABREU, J.L., APODACA, N.P., BRACHO, J., FAUTSCH, E., GUEVARA, M.C., HERNÁNDEZ, D., HERNÁNDEZ, M., MARMOLEJO, E., MIRANDA, A.I. Y RAJSBAUM, S., *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* UNAM, México (2016).
- ABREU, J.L., BAROT, M. Y BRACHO, J., *Matemáticas, Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales UNAM - Siglo XXI*, Siglo XXI Editores, 2010.
- DAVIS, P. AND HERSH, R., *The Mathematical Experience*, Birkhauser, 1981.
- FREUDENTHAL, HANS, *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-London, 1991.
- DEVLIN, KEITH, *The Math Gene, How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books, 1999.

Bibliografía

- Hersh, Reuben, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Advances in Mathematics 31, 1979, pp. 31-50.
- Hersh, Reuben, *What Is Mathematics Really?*, Oxford University Press, 1997.
- Klein, Felix, *Elementarmathematic vom höhere Standpunkte aus*, Arithmetik, Algebra, Analysis, 1908 (Spanish translation published by NIVOLA, 2006).
- Klein, Morris, *Mathematics, The Loss of Certainty*, Oxford University Press, New York, 1980.
- Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 (Pruebas y refutaciones, Madrid, Alianza, 1981).
- Meavilla, Vicente, *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros*, Almuzara, 2010.

Webografía

- ABREU, J.L., BRACHO, J., *Una propuesta para mejorar la educación matemática*, 2016 http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/UnaPropuesta.pdf
- ABREU, J.L., APODACA, N.P., BRACHO, J., FAUTSCH, E., GUEVARA, M.C., HERNÁNDEZ, D., HERNÁNDEZ, M., MARMOLEJO, E., MIRANDA, A.I. Y RAJSBAUM, S., *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* UNAM, México, 2016 http://arquimedes.matem.unam.mx/estandares/Estandares-Bachillerato.pdf
- ABREU, J.L., *Calculando el número* π, 2015 http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/CalculoDePi.pdf
- ABREU, J.L., BAROT, M., *A Geometric Approach to Planetary Motion and Kepler Laws*, 2015 http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/GeomKepler.pdf
- ABREU, J.L., BAROT, M., *Los sistemas de numeración de la antigüedad*, 2014 http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/SistemasDeNumeracion.pdf

Webografía

- ABREU, J.L., *The General 2nd Degree Equation in Two Variables*, 2016
  http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/descartes/gral2ndegequ.html
- ABREU, J.L., *Curriculum Vitae*, 2016
  http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/jlabreu/JLAbreu_CV.pdf
- ABREU, J.L., *Anexo al Curriculum Vitae*, 2016
  http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/jlabreu/JLAbreu_CV_Anexo.pdf
- RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES **http://proyectodescartes.org**
- PROYECTO UN100 **http://arquimedes.matem.unam.mx/lite/2013/1.1_Un100/indice.html**

Esta presentación puede descargarse de:

http://arquimedes.matem.unam.mx/TIME2016/