Una propuesta para mejorar la educación matemática

José Luis Abreu y Javier Bracho

1 de julio de 2016

¿Cuáles son las causas del bajo nivel educativo en matemáticas? ¿Qué se puede hacer para mejorarlo? Son dos de las preguntas que enfrentó el Grupo de Estándares del SUMEM, formado por decenas de profesores e investigadores de varias escuelas, facultades e institutos de la UNAM. Este artículo presenta una versión resumida y generalizada de sus conclusiones. *Resumida* porque el análisis de la situación no se presenta en profundidad, para ello ya se tiene el libro de Estándares para el Bachillerato[1]. *Generalizada* porque intenta aplicar, en la medida de lo posible, sus conclusiones e ideas al problema de la educación matemática en general, sin especializarlas al nivel del bachillerato.

1. El problema

La prueba PISA ha mostrado que el nivel educativo de los jóvenes que constituyen el futuro de nuestro país es muy deficiente. Las estadísticas que lo demuestran son bien conocidas. También es bien sabido que el nivel de educación de un pueblo está íntimamente relacionado con el de su desarrollo económico. Por ejemplo, la OCDE estima que el nivel de desarrollo económico de México podría aumentar cinco veces si todos sus estudiantes adquirieran el nivel básico de educación, equivalente a 420 puntos en la prueba PISA[1].

Las instituciones educativas están preocupadas por esta situación y han tomado algunas medidas con las que pretenden revertirla. Señalan, en general, como causas la falta de preparación y de compromiso de los maestros y, en consecuencia, las medidas que adoptan van principalmente encaminadas a renovar el cuerpo docente, obligando a los maestros en activo a presentar exámenes, bajo la amenaza de que van a ser despedidos si no los aprueban. Algunas otras

[1] *http://www.bbc.co.uk/mundo/noticias/2015/05/150513_educacion_mapas_am*

de sus medidas, un poco más tímidas, van encaminadas a reformar los programas de estudio, los métodos de enseñanza y a utilizar las nuevas tecnologías en apoyo de la educación.

Aunque no corresponde a la comunidad matemática juzgar las medidas adoptadas por las autoridades, sí tiene la responsabilidad de hacer un análisis del estado de la educación en el área de las matemáticas y de señalar posibles estrategias para mejorarla. El Grupo de Estándares del SUMEM se abocó a esta tarea en el marco acotado del bachillerato de la UNAM. Sus conclusiones después de dos años de trabajo están por publicarse[1]. El objetivo de este artículo es presentar esos resultados y reflexionar sobre las implicaciones que tienen respecto al problema de la educación matemática de todo el país.

1.1. Las causas

Hay dos falsas creencias que son las principales causas del problema:

Creencia 1: Las matemáticas constan de procedimientos para realizar cálculos y hay que seguir reglas preestablecidas para obtener los resultados correctos.

Creencia 2: Sólo algunas personas tienen capacidad para las matemáticas; la mayoría no puede con ellas.

La primera es consecuencia de programas de estudio que durante décadas han dominado la enseñanza de las matemáticas y que las presentan como una especie de tecnología inmutable que hay que aprender a manejar sin referencia a su origen, su utilidad o su lógica. Su estudio se justifica en términos de su utilidad para estudios futuros. Obtener buenas calificaciones en el manejo de esos procedimientos de cálculo que se ha dado en llamar “matemáticas”se identifica con la inteligencia y la capacidad para las matemáticas.

Por otro lado, se cree que muy pocas personas tienen capacidad para dominar las matemáticas, y que en particular, los mexicanos, no son muy aptos para ellas. Baste, para ilustrar esta creencia, recordar un comentario que el periodista Carlos Lloret de Mola hace en en su película *De panzazo* de 2012, en el que muestra que no le escandaliza que los jóvenes mexicanos salgan mal en matemáticas, porque *ya se sabe, con ellas no podemos*.

Se pueden señalar otras causas del problema, por supuesto, pero estas dos están arraigadas en la mentalidad de nuestra población. Las reformas educativas que las ignoren están destinadas al fracaso. Un país en el que sus ciudadanos evitan a toda costa relacionarse con las matemáticas y creen que no tienen la capacidad para dominarlas está condenado a seguir obteniendo notas bajas en las pruebas PISA. Pero lo verdaderamente grave es que está condenado a rezagarse cada vez más respecto a aquellos en que sus estudiantes compiten por ser los mejores del mundo en matemáticas.

1.2. ¿Hay solución?

La solución está a la vista. No se trata de ponerle parches a la educación matemática y tomar medidas tímidas que den pequeños pasos para intentar sacarla del agujero en que está metida, sino de convencer a la población de que una buena preparación en matemáticas de sus ciudadanos es imprescindible para el desarrollo del país, y de que los mexicanos pueden ser tan buenos en matemáticas, o mejores, que los de cualquier parte del mundo.

El primer paso es convencernos a nosotros mismos, matemáticos profesionales y maestros de matemáticas de México, de que esto es posible. Si dudamos de nuestra capacidad para preparar muy bien a nuestros estudiantes en matemáticas, ¿cómo pueden ellos adquirir confianza en sí mismos? Esto requiere de una estrategia que debe planear cuidadosamente la Sociedad Matemática Mexicana conjuntamente con las diversas asociaciones de profesores de matemáticas.

En este artículo solo podemos señalar el camino que el Grupo de Estándares[1] sugiere, y que consiste en revisar a fondo por qué es importante que los ciudadanos de un país se apropien de ellas y presentar algunas ideas que pueden ayudarnos a lograrlo.

1.3. ¿Por qué es importante aprender (y enseñar) matemáticas?

Las razones principales para aprender matemáticas que distingue el SUMEM[25] son:

1) La importancia de las matemáticas como parte de nuestra cultura,

2) El hecho de que las matemáticas son tremendamente útiles e imprescindibles para el mundo moderno y

3) El hecho de que la formación en matemáticas ayuda a desarrollar el pensamiento racional, tan necesario en cualquier actividad humana.

No entraremos aquí en detalles sobre estas razones que están bien documentadas en [25]. Observemos únicamente que son razones que sugieren una buena educación en matemáticas para todos los ciudadanos y no sólo para una elite que tal vez vaya a utilizarlas en su actividad profesional. Lo que sí analizaremos con mayor profundidad es el objeto de aprendizaje y enseñanza del que estamos hablando. Lo haremos de manera resumida, se puede encontrar un análisis más completo de este tema en [1].

2. ¿Qué son las matemáticas?

La filosofía de las matemáticas que imperó en nuestro medio profesional durante el siglo XX fue el formalismo, con su énfasis en los sistemas axiomáticos y la demostración de teoremas, asuntos que están muy alejados de la experiencia vital del individuo y que han demostrado una y otra vez ser poco aptos para interesar a los jóvenes, salvo en casos excepcionales, en el pensamiento matemático. Para nuestra tarea es imprescindible contar con una filosofía de las matemáticas que invite al individuo a interesarse por ellas y que lo haga con honestidad, sin engaños ni falsas promesas. En esta sección intentamos delinear tal filosofía.

La palabra matemáticas viene del griego *MATHEMATA* que significa aquello que se puede entender porque es lógico y racional y, por lo tanto, se puede enseñar. Para los griegos las matemáticas eran aquel conocimiento que no era revelado por una autoridad divina ni provenía de alguna otra fuente de conocimiento ajena al ser humano. Es decir, las matemáticas son lo que el humano puede conocer gracias a su propia capacidad de pensar racionalmente. En casi todos los idiomas europeos las matemáticas tienen un nombre con la misma raíz griega, sin embargo en holandés el nombre es WIESKUNDE que quiere decir ciencia de la certidumbre. El nombre que acuñó originalmente Simon Stevin, el “Arquímedes flamenco”, es WIESKUNST, arte de la certidumbre. Con el tiempo pasó de arte a ciencia. Lo interesante es que ambas etimologías coinciden en el tema que señalan. Ninguna de las dos habla de números, figuras geométricas, fórmulas, algoritmos o teoremas. El énfasis etimológico está en que las matemáticas tratan con aquello que podemos conocer con certidumbre a través de nuestra capacidad de razonar, y que por tanto podemos enseñar, no en el sentido de transmitir información, sino de ayudar al estudiante a entenderlo, a apropiarse de ello.

2.1. Las matemáticas son abstractas

Todo pensamiento racional implica algún grado de abstracción. Abstraer consiste en extraer propiedades simples de algún sistema u objeto de la realidad, y construir con ellas conceptos y modelos simplificados de ese sistema u objeto. El proceso de abstracción en la evolución de la humanidad no se dio primero en las matemáticas sino en el lenguaje ordinario, y es precisamente nuestra capacidad para adquirir el lenguaje y usarlo para comunicarnos lo que ha formado en nuestro cerebro la capacidad de construir abstracciones y utilizarlas en nuestro beneficio[6]. El concepto de *mesa* es una abstracción, al igual que lo es el de *hijo*, *vecino*, *rojo*, *color*, *perro*, *animal*, *mamífero*, *ser vivo*, etcétera. Cada uno de los conceptos que manejamos con el lenguaje es siempre una abstracción. Hay abstracciones de distinto nivel. *Perro* es menos abstracto que *cuadrúpedo*, *pino* es menos abstracto que *árbol*, y *árbol* es, a su vez, menos abstracto que *vegetal*. *Pelota* es menos abstracto que *esfera*, y *esfera* es menos abstracto que *cuerpo sin esquinas*. *Los cinco dedos de mi mano izquierda* son menos abstractos que el *número cinco*, y éste es menos abstracto que el concepto general de *número*.

Los conceptos matemáticos no son más que algunas de las abstracciones que aparecen inicialmente en el lenguaje natural, pero que luego se van refinando y generando abstracciones de mayor nivel. Los primeros conceptos matemáticos constan de abstracciones cuyas propiedades son mucho más simples que las que manejamos en el lenguaje ordinario. Por ejemplo, la *esfera* es muy sencilla, sus propiedades son pocas y muy claras. Una *pelota*, en cambio, es mucho más compleja que una *esfera* abstracta, está hecha de un material concreto, tiene muchas pequeñas irregularidades, tiene un olor, es de uno o varios colores, tiene un tamaño y probablemente un dueño. La esfera no tiene ninguna de esas complicaciones, su única propiedad es la de que todos sus puntos están a una misma distancia del centro. A cambio de esta simplicidad extrema, el concepto pierde concreción, en el sentido de que no lo podemos tocar, señalar, patear, ni oler. Al construir el concepto de *esfera* ganamos simplicidad y perdemos concreción. Y ésta es la esencia de las abstracciones matemáticas: son objetos que no tienen una realidad material, pero en cambio son muy simples y sus propiedades están definidas de manera clara y sin ambigüedades. Y es gracias a esa simplicidad que los podemos conocer y manejar con absoluta certeza y precisión.

Gracias a ello el pensamiento matemático puede ser muy riguroso y ofrecer conclusiones absolutas. Su contraparte, el pensamiento no matemático, trata de objetos o conceptos que no están bien definidos y cuentan con muchas peculiaridades que no siempre se mencionan explícitamente. Es difícil o más bien imposible conocer algo seguro en tales condiciones. Por ejemplo, si lanzo una pelota al aire y la dejo rebotar, puedo predecir más o menos dónde va a caer y dónde se va a detener, pero debido a cosas incontrolables como sus propias irregularidades, las del suelo, el viento que puede soplar y la posibilidad de que alguien pase y la patee proyectándola en otra dirección, nunca puedo saber con absoluta seguridad adónde irá a parar. Pero si en lugar de una pelota pienso en una esfera perfecta que se lanza a un aire en reposo absoluto y conozco sus propiedades de elasticidad y la resistencia del aire, y sé que el suelo es perfectamente plano, entonces sí puedo predecir con exactitud adónde va a ir a parar la esfera. Gano seguridad, pero pierdo cercanía con la realidad. Tales esfera, aire y suelo ideales no existen en el mundo real, pero en cambio mi conocimiento sobre ellos es total y puedo hacer predicciones perfectas sobre su comportamiento.

Pero si las matemáticas tratan de abstracciones puras, ¿cómo pueden ser útiles?

El lenguaje natural trata siempre con abstracciones y es muy útil. Igual sucede con las matemáticas, cuya utilidad radica en que puede llegar a conclusiones seguras sobre entes abstractos que se parecen, en lo esencial, a determinados objetos reales. Tales conclusiones pueden decirnos mucho sobre el mundo real. Las abstracciones matemáticas pueden ser de cualquier tipo, pero en la práctica los matemáticos y los científicos usan preferentemente aquellas que representan partes de la realidad. Por ejemplo, representan el sistema solar como puntos que giran alrededor del Sol, y gracias a ello han descubierto que sus órbitas son elipses. ¿Lo son en realidad? Pues sí y no. Los planetas no son puntos, ni siquiera esferas, sino cuerpos grandes e irregulares y por tanto resulta imposible hablar con absoluta propiedad y precisión de sus trayectorias. Sin embargo, las trayectorias de esos puntos abstractos con los que representamos a los planetas son, en el modelo newtoniano, sin lugar a duda, elipses. Se da aquí una extraordinaria y muy íntima relación entre los objetos matemáticos que hemos creado para representar el movimiento de los planetas con el comportamiento de los verdaderos planetas, esas bolas enormes que están allá en el espacio y giran alrededor del Sol. Esa relación es suficientemente cercana para ofrecernos consecuencias lógicas de utilidad práctica y es un claro ejemplo de por qué las abstracciones matemáticas son útiles e importantes.

Hemos comprobado en infinidad de situaciones que somos capaces de construir abstracciones cuya relación con el mundo real es tan cercana, que las conclusiones que obtenemos de ellas son tremendamente útiles para ayudarnos a entender y, a veces, hasta controlar el mundo material. El pensamiento matemático nos permite conocer con precisión absoluta cómo se comportan los objetos abstractos, y ese comportamiento nos da información muy pertinente sobre nuestra realidad. Es aquí donde la famosa sentencia de Galileo Galilei resulta tan reveladora. Nos referimos a aquella en la que dice (parafraseando) que *el universo es un libro abierto que podemos leer si aprendemos el idioma en que está escrito, el cual es el de las abstracciones matemáticas*.

La abstracción es esencial en la computación. Los lenguajes de programación, funcionan por capas de abstracción, desde los más sencillos que controlan los bits y las instrucciones de un microprocesador, hasta los de más alto nivel y más abstractos como los lenguajes orientados a objetos, las bases de datos y las hojas de cálculo. Las computadoras y los programas informáticos se diseñan para manipular abstracciones como números y todo tipo de información. El humano moderno vive en un mundo de información que consta de abstracciones que se almacenan, se codifican y se transmiten utilizando otras abstracciones. Cosas tan cotidianas como una clave de acceso o *password*, la nube y Google son, hoy en día, tan reales como una manzana o una ciudad, y sin embargo son completamente abstractas.

2.2. ¿De dónde vienen las matemáticas?

Entender y apreciar tanto el uso contemporáneo de las matemáticas como su importancia cultural no se limita, al enseñarlas, a enfrentar la pregunta de ¿para qué son útiles? sino también la de ¿por qué se crean, cómo nacen y cómo se desarrollan? Hay que poner esta disciplina en su contexto, el de algo que surge naturalmente del ser humano y a la vez erradicar la idea de que son arbitrarias, divinas o creadas por superhombres. Al mismo tiempo se debe convencer al estudiante de que las matemáticas son producto del pensamiento normal y, por tanto, perfectamente accesibles para cualquier miembro del género humano; es decir, que todo individuo las puede entender y hasta llegar a hacer su propia aportación al caudal matemático de la humanidad.

Podemos identificar tres impulsos y dos pasiones del ser humano como fuentes de las que brotan las matemáticas[2].
Los impulsos son

1) el de controlar y facilitar las actividades productivas y artísticas,
2) el de comprender (y controlar) la naturaleza y
3) el de comprender mejor las propias matemáticas.
Las pasiones son
a) la curiosidad y
b) la afición a los desafíos.

La actividad humana

Los principios fundamentales de la aritmética y la geometría, contar y medir, son producto principalmente de la actividad productiva y artística del ser humano. Se desarrollaron para ayudar a cubrir necesidades elementales (construcción de viviendas) o necesidades sociales (construcción de acueductos, medición de terrenos) o para mejorar la calidad de la producción artística (recordemos la relación entre la música y las fracciones que hallaron los pitagóricos, y la aplicación de la geometría a la pintura por medio de la perspectiva). La vida moderna está llena de avances tecnológicos, al grado que es difícil imaginarla sin ellos, y es un hecho que buena parte de esta tecnología se basa en desarrollos matemáticos, tanto de siglos pasados como recientes, e incluso algunos desarrollos matemáticos se han realizado específicamente para ella. Muchos de estos avances fueron motivados por las necesidades y los problemas propios de la vida en sociedad. Con el paso del tiempo, se hicieron indispensables para la vida diaria, y terminaron integrándose a la cultura mínima del ciudadano civilizado. Es el caso de, por ejemplo, el uso del lenguaje estadístico y probabilístico o los conceptos informáticos como byte, ancho de banda, programa y codificación.

El impulso por comprender la naturaleza

Otra fuente prolífica y aparentemente inagotable para el desarrollo de las matemáticas ha sido el tratar de entender, describir y predecir los sucesos de la naturaleza. Es en este sentido que hemos hablado de su “utilidad”, en párrafos anteriores al referirnos a Galileo, que las consideró indispensables para satisfacer ese afán por comprender la naturaleza, tan característico del ser humano, y que ha generado lo que llamamos ciencia. Es claro que el desarrollo de las ciencias impulsa continuamente al de las matemáticas y aquí no hace falta insistir más en ello, pero sí debemos convenir en que es algo que debe tomarse en cuenta al enseñarlas.

El impulso por comprender las propias matemáticas

Hay además otra fuente del desarrollo matemático que no se debe soslayar y que son las propias matemáticas. Muchos de sus avances más espectaculares han surgido al resolver problemas que ellas mismas se han planteado alrededor de abstracciones ya establecidas. Siendo por necesidad abstractas, parecería que, a la larga, este ensimismamiento las alejaría de la realidad. Por el contrario, la historia ha demostrado que muchas ideas matemáticas creadas en ese espíritu se han convertido en herramientas útiles para entender fenómenos y resolver problemas de la ciencia o de algún otro aspecto de la actividad humana. El ejemplo clásico es el de las curvas cónicas que fueron estudiadas en la antigua Grecia por mero interés en ellas mismas, por conocer y entender sus propiedades y como herramientas para algunas construcciones geométricas que no podían realizarse solamente con regla y compás. Y he aquí que veinte siglos después resultan ser la herramienta perfecta para describir el movimiento de los cuerpos celestes dentro del modelo newtoniano de la mecánica celeste.

La curiosidad y los desafíos

No obstante lo expuesto anteriormente, las fuentes de creación matemática más fructíferas son, probablemente, la curiosidad innata del humano y la irresistible atracción que siente ante los retos de todo tipo, y en especial, los intelectuales. El deseo de resolver un problema, de entender una nueva idea, de que las piezas de un rompecabezas encajen en su sitio es, quizás, la motivación individual más profunda y el motor más potente que hay detrás de los grandes y de los pequeños avances matemáticos. Por ello, es importante lograr que en los estudiantes nazca la curiosidad por las cuestiones matemáticas y plantearles retos matemáticos que les lleven a descubrir la emoción y el placer que se experimentan al resolverlos.

Uno de los grandes errores que pueden cometerse en la educación del individuo es el de enfrentarlo únicamente a tareas simples, sosas, que no constituyen desafíos al raciocinio, a la inventiva o al ingenio. Muchas veces, con la intención de facilitarle la vida al estudiante (y de paso al maestro) y de mejorar los resultados de las evaluaciones, se eliminan de los planes de estudio algunos temas que se les dificultan. Así han desaparecido del currículum los problemas de trigonometría en tres dimensiones, las demostraciones de teoremas de geometría, las aplicaciones del cálculo a la mecánica y muchos otros temas. Pero sabemos muy bien que “quien no aspira a general, ni a sargento llega”. Toda concesión a la mediocridad no hace más que fomentarla.

Por ello, los estándares de matemáticas, en los diversos niveles educativos, deben ser elevados y deben presentar retos importantes para los maestros y para los estudiantes. Los estándares de bajo nivel provocan desinterés e indudablemente no ayudan a elevar el desempeño. Lo que planteamos en esta propuesta es proponernos el ideal de que los estudiantes de nuestro país sean los mejores del mundo en matemáticas. Para alcanzar tal finalidad, de nada sirve bajar el nivel ni hacer más blandos o más duros los exámenes. El único medio para conquistar tal meta es lograr que los estudiantes se apropien del pensamiento matemático y aprendan a usarlo y a disfrutarlo.

2.3. ¿Cómo son las matemáticas?

A grandes rasgos se puede decir que las matemáticas constan fundamentalmente de conceptos con los cuales construimos ***modelos***, demostramos ***teoremas*** y diseñamos ***algoritmos***.

Los **modelos** son abstracciones de algún aspecto de la realidad inmediata, de la naturaleza o de otras abstracciones.

Los **teoremas** son consecuencias o verdades acerca de los conceptos implícitos en un modelo, las cuales pueden deducirse por razonamiento lógico de los postulados (o axiomas) del modelo.

Los **algoritmos** son procedimientos que permiten calcular u obtener cierta información a partir de otra, siempre dentro de un modelo.

Las matemáticas no constan únicamente de procedimientos o algoritmos que el estudiante deba aprender a aplicar; tampoco constan sólo de teoremas y sus demostraciones; ni únicamente de modelos abstractos sobre algunos aspectos de la realidad. Las matemáticas son, más bien, una combinación de los tres aspectos citados y, para conocerlas y entenderlas, es necesario practicar todas las modalidades de la actividad matemática, comprender su importancia y sus relaciones recíprocas.

Desde un principio el estudiante debe entrenar su capacidad para utilizar y crear modelos abstractos que le permitan analizar y entender situaciones concretas de su entono. No hay razón para escandalizarse porque apliquemos esta idea en la educación básica. De hecho creemos que es precisamente allí donde debe comenzar la educación matemática verdadera, y éste es su punto de inicio. Saltarse este principio es lo que lleva a una educación matemática en la que se privilegia el aprendizaje de procedimientos sobre el uso de la razón.

El enfoque que proponemos para iniciar este tipo de formación es parecido a lo que se llama *resolución de problemas*, pero sin limitarlo a la aplicación de procedimientos. Se puede empezar con los problemas tradicionales, simples ejercicios, en que se le dan al estudiante los datos de una situación concreta y él debe reconocer un modelo adecuado que ya conoce (a veces una simple suma o un producto) para tratarla, utilizando los datos que se le proporcionan. Luego debe pasar a situaciones de mayor complejidad que requieran, por ejemplo, la investigación de datos que no aparecen en el planteamiento del problema. Más adelante deberá enfrentar problemas con datos desconocidos, lo que incrementa el grado de abstracción en el que deberá desenvolverse. Finalmente estará listo para afrontar situaciones en las que los problemas no están bien definidos y en las que deberá proponer, y hasta crear, modelos abstractos que las representen y ayuden a entenderlas. Hay que evitar a toda costa mantener al estudiante en el nivel en el que sólo aplica fórmulas o procedimientos, debe evolucionar hacia situaciones en las que se enfrente explícitamente críticamente con los modelos que emplea e incluso en las que él mismo tenga que crear un modelo.

A través de este tipo de actividad se le irán aclarando al estudiante las ideas de modelo, teorema y algoritmo. Entenderá lo que es una demostración racional y lógica, aprenderá a construirla y a analizar y criticar demostraciones propuestas por otras personas. Deberá aprender que los resultados obtenidos por razonamiento lógico en un modelo, los teoremas, se aplican al modelo abstracto, pero que la realidad puede comportarse de manera diferente y, por tanto, los teoremas, a pesar de ser conocimiento indudable acerca del modelo abstracto, son sólo conocimiento tentativo con respecto a la realidad. Pero también aprenderá a crear algoritmos, no solo a aplicarlos, y a aprovechar la computación cuando le convenga. El estudiante debe adquirir la capacidad de describir con precisión un algoritmo, comprender la secuencia de pasos que llevan a un resultado buscado. Debe entender que cada uno de los pasos de un algoritmo o procedimiento debe estar bien definido y libre de ambigüedades. Debe saber explicar por qué el algoritmo produce el resultado buscado y debe saber analizarlo desde el punto de vista de su factibilidad y eficiencia. También debe ser capaz de descubrir errores, si los hay, en la aplicación de un algoritmo. Quizás la mejor manera de llegar a dominar todo esto sea aprendiendo a programar sus algoritmos en una computadora.

Las matemáticas son autocríticas (¡no al repaso!)

Cuando se discute el rendimiento en matemáticas, es común atribuir las deficiencias detectadas en un ciclo escolar a defectos de los ciclos anteriores. "Repasar" es el término que se usa para dedicar tiempo en clase a ver lo que "ya debería saberse". Recurrir al repaso para remediar esas deficiencias provoca una sensación de estancamiento, de que no hay nada nuevo que aprender. Sin duda, hay que tomar en cuenta las deficiencias pretéritas con el objetivo de superarlas. Pero las deficiencias no se superan con el *repaso* que consiste en volver a ver *los mismos* temas de *la misma* manera. ¿Si ese enfoque no funcionó la primera vez, por qué esperamos que funcione la segunda o la tercera?

La manera natural de superar las deficiencias acarreadas de ciclos anteriores es abordar los temas propios del ciclo escolar actual del estudiante y que seguramente requieren de aquello que ya debería saber pero no ha logrado dominar. Al enfrentar los temas nuevos el estudiante descubre al mismo tiempo que esas ideas matemáticas son útiles y que no las domina. Es en ese momento que tiene la oportunidad de superar sus deficiencias, por supuesto mediante un esfuerzo de su parte, para el que debe contar con el apoyo incondicional del profesor y del sistema educativo. Descubrir la utilidad de las matemáticas ayuda mucho a tener la motivación suficiente para esforzarse en comprenderlas y apropiarse de ellas. Con este enfoque se evita la sensación de estancamiento y se da una oportunidad real al estudiante rezagado de incorporarse a la discusión en curso. Además se es fiel al principio de profundizar en las matemáticas cuestionando sus ideas y aplicándolas en nuevos contextos.

Las matemáticas son cambiantes

Las matemáticas no son un cuerpo estático y lineal de conocimientos, pero además conforme crecen, va cambiando también la manera en que se piensa en ellas[26]. En las últimas décadas, se han transformado como nunca antes por la computadora. Y esto no sólo se nota en el crecimiento exponencial de su utilización en la sociedad moderna, como se mencionó anteriormente, sino también en el efecto que la computadora ha tenido en el interior de las propias matemáticas. La presencia de esa máquina programable, capaz de calcular con precisión a velocidades increíbles, las ha afectado en todos los niveles. En particular, ha fomentado el crecimiento y la importancia de las matemáticas discretas y de nuevas áreas como, por ejemplo, la computación teórica.

Durante casi todo el siglo pasado, y hasta la fecha, la enseñanza de las matemáticas a nivel preuniversitario se concibe como el recorrido lineal que lleva a las ideas fundamentales del Cálculo. Se debe cuestionar, a nivel curricular, si es éste realmente su único objetivo. Como consecuencia lógica de lo que anteriormente hemos planteado, creemos que no, que se deben incorporar al currículo nuevas temáticas acordes a los cambios recientes en la matemática misma, la mayoría de las cuales no tienen nada que ver con el Cálculo. Por ejemplo, algunos de los Estándares planteados en [1], aunque aún son pocos, van en esta dirección. Pero creemos que aún hace falta experimentar con éstas y otras propuestas. Más aún, creemos que las revisiones curriculares deben ser más agresivas e innovadoras de lo que han venido siendo en las décadas recientes, preocupándose más por los cambios de las matemáticas y su efecto en la sociedad, que por el orden en que conviene presentar al estudiante los temas tradicionales.

3. ¿Cómo enseñar las matemáticas?

El Grupo de Estándares del SUMEM ha señalado algunas ideas que pueden guiar la educación matemática y que presentamos en esta sección. No se trata de prescripciones didácticas sino de detalles que se recomienda tomar en cuenta para propiciar que el estudiante se interese en la materia y se apropie de ella.

Se dice que el aprendizaje de las matemáticas es una trama de cinco hilos: razón, entendimiento, cálculo, aplicación y aprecio. Juntos construyen lo que puede llamarse competencia matemática. Creemos que si la enseñanza de las matemáticas se apoya en las siguientes ideas, podemos lograr una formación matemática de excelencia en todos nuestros jóvenes.

1) Usar siempre ejemplos significativos para los alumnos. Gran parte de los temas de matemáticas contenidos en los actuales planes del bachillerato se presentan totalmente desvinculados de la relación que puedan tener con el mundo real. Se presentan desprovistos de interés práctico y social. Es necesario revertir esta tendencia que presenta las matemáticas como algo que hay que aprender aun sin tener la menor idea de su utilidad y sin referencia a los retos que las originaron. Es un asunto delicado, pues es fácil caer en la costumbre de sólo enseñar temas con utilidad inmediata, lo cual puede resultar contraproducente. Es bien sabido que la utilidad de las matemáticas casi nunca es inmediata, sino que resulta de profundizar en problemas, crear o encontrar los conceptos y las herramientas adecuadas para comprenderlos y atacarlos y, finalmente, resolverlos aplicando esos conceptos y herramientas.

2) Tomar siempre en cuenta tanto el origen histórico como el valor cultural y científico de los conceptos y las teorías matemáticas. Parte del desinterés que muestran los alumnos, y a veces los propios maestros, proviene de un desconocimiento del origen, evolución e importancia cultural, científica, social y filosófica de lo que se está estudiando. Los temas de matemáticas que se seleccionan para ser enseñados siempre tienen un pasado importante. Muy rara vez se plantea enseñar a los alumnos contenidos que parecen haber surgido de la nada. Y, con todo, es muy común presentar conceptos matemáticos sin relación con aquello que los hizo importantes. Valga como ejemplo la presentación del cálculo diferencial como una serie de procedimientos para aprender a derivar funciones, sin mencionar por qué la derivada es importante, qué problemas científicos y hasta filosóficos resolvió en cierto momento de la historia, y cómo es que saber de derivadas resulta útil, a través del Teorema fundamental del cálculo, para resolver muchos problemas de aplicación, especialmente en el cálculo de áreas, volúmenes, momentos de inercia y probabilidades de eventos.

3) Poner el acento en la comprensión por encima del manejo de procedimientos y fórmulas. El estudiante actual va a desenvolverse en un mundo en el que abunda la información sobre cualquier tema, inclusive la de cómo llevar a cabo tal o cual cálculo. Por tanto aprender procedimientos resulta poco formativo en la actualidad. Lo verdaderamente formativo es desarrollar la vocación de plantear racionalmente los problemas para entenderlos bien; de aprender tanto a analizarlos como a buscar herramientas y procedimientos para resolverlos. El aprendizaje de procedimientos en la escuela resulta poco útil porque ello significa que se tendrían que asimilar demasiados detalles que, de cualquier forma, están en manuales y en cientos de documentos escritos y multimedia que abundan en Internet. Esa información que está al alcance de todo mundo sólo es útil si se sabe buscar, evaluar, entender y aplicar. Y esto se logra precisamente con una formación que privilegie el razonamiento, el pensamiento lógico, la aproximación crítica y analítica a los problemas, la perseverancia en el trabajo intelectual y la capacidad de buscar ideas y herramientas matemáticas adecuadas.

4) Tomar en cuenta y aprovechar los entornos social y tecnológico del estudiante. El mundo en el que se mueve actualmente el estudiante va desde las redes sociales hasta los videojuegos, pasando por el acceso a Internet con su gran cantidad de contenidos (muchos de ellos de excelente calidad).

Un alumno debe aprender física, química y biología para entender su entorno y poder interactuar con él de manera satisfactoria, pero hoy en día su interacción más frecuente e íntima es con el entorno virtual de los datos, las comunicaciones, los videojuegos y otros sistemas de cómputo. La escuela tiene que cambiar su papel de proveedora de contenidos a formadora de ciudadanos que estén capacitados para seleccionar y aprovechar toda esa información y posibilidades de comunicación. En la actualidad es más probable que un joven músico componga e interprete su música con una computadora que con un instrumento tradicional. La omnipresencia de los sistemas de cómputo en el mundo moderno hace indispensable que se eduque a nuestros niños y jóvenes de manera que sean capaces de entender y adaptarse a este entorno.

5) Tomar en cuenta la importancia creciente de la computación y la presencia de las matemáticas en ella. Es cada vez más evidente en el mundo contemporáneo la ubicuidad de los dispositivos y sistemas de cómputo, sin cuya asistencia nuestras actividades cotidianas son ya impensables y abarcan casi todos los ámbitos de nuestra vida. Estos sistemas forman hoy parte integral de nuestra experiencia, y son fundamentalmente objetos matemáticos. Como ejemplo podemos mencionar los que controlan los medios de transporte y de comunicación, los de predicción del tiempo, que involucran satélites y sensores, y los que controlan las transacciones financieras o el acceso a bibliotecas digitales y acervos de información. Es este el mundo que debe comprender el estudiante y cualquier ciudadano. Todos estos sistemas usan modelos y métodos matemáticos cada vez más refinados y complejos y es necesario que el estudiante sea consciente de ello. En gran medida la computación es una parte de las matemáticas y esto debe reflejarse tanto en los programas de estudio como en el salón de clases, relacionando tanto como sea posible el pensamiento matemáticos con el aprovechamiento de las computadoras.

6) Dedicar esfuerzos para fomentar en el estudiante una actitud positiva hacia las matemáticas. Quizás sea ésta la idea más importante que podemos ofrecer. Los egresados de nuestro sistema educativo deben tener una actitud de aprecio y respeto hacia las matemáticas, y la sensación de que son algo que les pertenece para toda la vida, como parte de su cultura, igual que saber leer o apreciar la literatura y el arte. Una sociedad en desarrollo como la nuestra no puede permitir que sus ciudadanos se sientan incapacitados para el razonamiento lógico y el pensamiento matemático. Tanto la educación matemática enfocada a la habilidad para aplicar fórmulas y procedimientos como el sistema de evaluación que infunde miedo ante los exámenes han generado en nuestra población una actitud negativa hacia las matemáticas, una de las causas directas del bajo desempeño en torno a esta materia.

Cualquiera que vaya a ser su futura profesión o actividad, el egresado debe llevarse consigo un recuerdo agradable de las matemáticas y sentir que el pensamiento matemático es una de sus capacidades, de la cual podrá disponer en el momento en que la necesite e incluso recurrir a ella como valioso entretenimiento intelectual.

Gran parte del aprecio por las matemáticas se logra cuando el estudiante adquiere confianza al verse capaz de aprovechar el pensamiento matemático para enfrentar y resolver problemas. Esto sólo se logra dedicando tiempo y esfuerzo. Enfrentar problemas exige mantener vivo el ánimo y aprender a sortear los pequeños fracasos que se dan al ensayar ideas que no dan resultado hasta llegar a una que sí funciona. Es labor del profesor cuidar que el estudiante persevere hasta lograr el éxito y así evitar la frustración que provoca inseguridad, miedo y rechazo. Por ello consideramos que se debe buscar un sistema de evaluación que propicie el aprecio por las matemáticas sin infundir temor. Diseñarlo no es uno de los objetivos de este artículo, como tampoco lo es recomendar métodos específicos de enseñanza. Ambas cosas son tarea de los profesores, que son quienes más pueden influir en el proceso de mejorar la educación matemática de los futuros ciudadanos.

3.1. La evaluación

Podríamos hacerlo todo bien en la educación matemática, pero si aplicamos métodos de evaluación que produzcan rechazo y destruyan el amor hacia las matemáticas, que con tanto cuidado vamos sembrando, todo será en vano.

Los exámenes representan uno de los aspectos que más temor y rechazo producen hacia las matemáticas y que llevan a muchos estudiantes incluso a odiarlas. Son pocos los estudiantes que ven en ellos un reto estimulante. Para la mayoría no son más que una fuente de miedo y ansiedad. Si queremos que todos nuestros jóvenes aprecien las matemáticas, se adueñen de ellas y las perciban como una herramienta útil, es evidente que algo debemos hacer para cambiar su percepción de los exámenes o, de plano, nuestros métodos de evaluación.

Hay sociedades, por ejemplo las de algunos países asiáticos, en las que los exámenes de matemáticas son mucho más estresantes que en México y en las que, a pesar de ello, o precisamente por ello, el aprovechamiento estudiantil en matemáticas es muy bueno. Pero también hay sociedades con excelente aprovechamiento en matemáticas, como las de Finlandia y Suiza, en las que los exámenes casi no existen o no representan, salvo en algunos momentos decisivos en la vida del estudiante (como al acceder a la universidad) situaciones de alto estrés. ¿Cuál de los dos extremos es más adecuado en nuestro país? O ¿hay un punto medio que pudiera dar mejores resultados?

No tenemos una respuesta que ofrecer y de la que estemos plenamente convencidos, pero creemos que se trata de un tema que hay que debatir a fondo. Con el propósito de motivar ese debate presentamos a continuación un par de ideas al respecto.

Tal vez convenga promover un *sistema de evaluación exclusivamente formativa*, en el que los exámenes sólo se usen para que el profesor conozca el grado de avance de sus grupos y el alumno conozca el suyo propio, pero que no puedan utilizarse nunca como castigo, por ejemplo, para impedir al estudiante avanzar a los grados superiores. El objetivo de los exámenes sería obtener información para regular y dirigir los estudios. Aquello que el grupo no ha logrado aprender, quizás deba volverse a ver desde otro punto de vista, con mayor profundidad, o con mejores explicaciones y ejemplos diferentes. Y si un estudiante percibe, a través de estos exámenes, que está retrasado en algún tema con respecto a sus compañeros, quizás se esfuerce en ponerse al corriente y busque ayuda para ello. Éste sería el sentido práctico de los exámenes. Pero nunca se usarían para castigar a nadie, ni para obligarlo a hacer más ejercicios de un tema, ni para castigarlo sin ir el sábado a esa fiesta que tanto le interesa, ni para impedirle el pase al siguiente grado escolar.

Es inevitable, por la limitaciones de espacio y presupuesto en las escuelas superiores y universidades, aplicar exámenes de admisión. Saber que, para acceder a una educación superior, el estudiante va a tener que aprobar un examen, es un estímulo que puede motivarlo a esforzarse en mejorar su educación matemática, como aparentemente ocurre en Finlandia, Suiza y otros países. Pero pasar por el suplicio de exámenes periódicos, por ejemplo cada mes, temiendo ser reprendido y castigado por obtener malos resultados, puede resultar demasiado duro para los jóvenes, y contribuir a que rechacen los estudios en lugar de abrazarlos como una oportunidad para acceder a una vida mejor. Así que eliminar el aspecto punitivo de los exámenes podría resultar beneficioso.

La frecuencia de las evaluaciones también es un tema a debatir. Poner muy pocos exámenes puede quitar la presión negativa que inevitablemente producen los exámenes, aunque no sean punitivos, pero también da poca información para guiar el proceso educativo. El extremo opuesto, por ejemplo, evaluación diaria o semanal, daría mejor información para guiar los estudios y también podría disminuir el filo agresor de los exámenes. Si el estudiante se acostumbra a ser evaluado continuamente, para que tanto él como el profesor sepan cómo va progresando, quizás disminuya su estrés. Como se dice por allí, a todo se acostumbra uno, menos a no comer.

Dudamos que, si los exámenes se usan para generar castigos, puedan llegar a ser beneficiosos en la educación matemática de la mayoría de nuestros jóvenes. Con ese carácter solo benefician a unos cuantos estudiantes, quienes suelen obtener buenas calificaciones y que incluso los toman como una oportunidad para sobresalir. Pero si las evaluaciones solo se usaran como generadoras de información para el profesor y para el mismo estudiante, podrían llegar a ser bien aceptadas y, en vez de resultar contraproducentes, podrían ayudar a mejorar la educación matemática en general.

Hay otros métodos o mecanismos de evaluación, que no son exámenes, como pedir al estudiante preparar un tema y presentarlo en clase, o escribir un ensayo, o simplemente hacer tareas. Todos ellos pueden ser valiosos y, por supuesto, conviene aprovecharlos. Pero esos mecanismos también pueden emplearse en forma punitiva, y en tal caso, provocar el mismo rechazo que los exámenes. Por tanto la alternativa que planteamos es la de considerar la eliminación de los métodos de evaluación punitiva y la adopción de un *sistema de evaluación exclusivamente formativa*, independientemente de los mecanismos que emplee.

Referencias

[1] Abreu León, J.L., Apodaca Alvarez, N.P., Bracho Carpizo, J., Fautsch Tapia, E., Guevara Aguirre, M.C., Hernández Pérez, D., Hernández Rosales, M., Marmolejo Rivas, E., Miranda Vitela, A.I. y Rajsbaum Gorodezky, S., *Estándares de Matemáticas para el Bachillerato de la UNAM.* UNAM, México 2016.

[2] Abreu, J.L., Barot, M. y Bracho, J., *Matemáticas, Enciclopedia de Conocimientos Fundamentales UNAM - Siglo XXI*, Siglo XXI Editores, 2010.

[3] Collete, Jean Paul, *Historia de las matemáticas, Vol. I y Vol. II*, Siglo XXI Editores, 1985.

[4] COMMON CORE STATE STANDARDS FOR MATHEMATICS, 2010. [En línea. Recuperado de http://www.corestandards.org/Math/, el 23 de abril de 2015].

[5] DAVIS, P. AND HERSH, R., *The Mathematical Experience*, Birkhauser, 1981.

[6] DEVLIN, KEITH, *The Math Gene, How Mathematical Thinking Evolved and Why Numbers Are Like Gossip*, Basic Books, 1999.

[7] DEVLIN, KEITH, *Introduction to Mathematical Thinking*, Keith Devlin, 2012.

[8] DRIVER, R. D., *Why Math?*, Springer, 1984.

[9] DUNHAM, WILLIAM, *Journey Through Genius, The Great Theorems of Mathematics*, Wiley, 1990.

[10] GOLDENBERG, P. ET AL., *Making Sense of Algebra: Developing Student's Mathematical Habits of Mind*, Heinemann Portsmouth, NH 2015.

[11] HEATH, SIR THOMAS, *A History of Greek Mathematics, Vol 1. and Vol 2.*, Dover Publications, Inc. New York, 1981.

[12] HERSH, REUBEN, *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, Advances in Mathematics 31, 1979, pp. 31-50.

[13] HERSH, REUBEN, *What Is Mathematics Really?*, Oxford University Press, 1997.

[14] INEE 2013, *México en PISA 2012. 1ª edición.* México: INEE. Recuperado de http://publicaciones.inee.edu.mx/detallePub.action?clave=P1CI125.

[15] KLEIN, FELIX, *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Nivola, 2006 (Originalmente publicado en 1908).

[16] MINISTERIO DE EDUCACIÓN, REPÚBLICA DE CHILE: *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.* Recuperado de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/ 2012.

[17] KLEIN, MORRIS, *Mathemtics in Western Culture*, Oxford University Press, 1953.

[18] KLEIN, MORRIS, *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

[19] Klein, Morris, *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI Editores, 2006.

[20] Lakatos, Imre, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, 1976 (Pruebas y refutaciones, Madrid, Alianza, 1981).

[21] Meavilla, Vicente, *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros*, Almuzara, 2010.

[22] OECD 2013, *PISA 2012 Assesment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, OECD Publishing. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en.

[23] Stillwell, John, *Mathematics and its History*, Springer, 2010.

[24] Sultan, A. and Artzt, A., *The Mathematics that Every Secondary School Teacher Needs to Know*, Routledge New York and London, 2011.

[25] SUMEM, *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM*, [En línea. Primera edición (México), Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM, 2014. Disponible en Internet].

[26] Thurston, William P., *On Proof and Progress in Mathematics*, Bulletin of the AMS, Vol. 30, Number 2, April 1994.

[27] Weismann, Friedrich, *Introduction to Mathematical Thinking: The Formation of Concepts in Modern Mathematics*, Dover Publications, Inc. New York, 2003. (Originally published by Friedrich Ungar Co., New York in 1951).