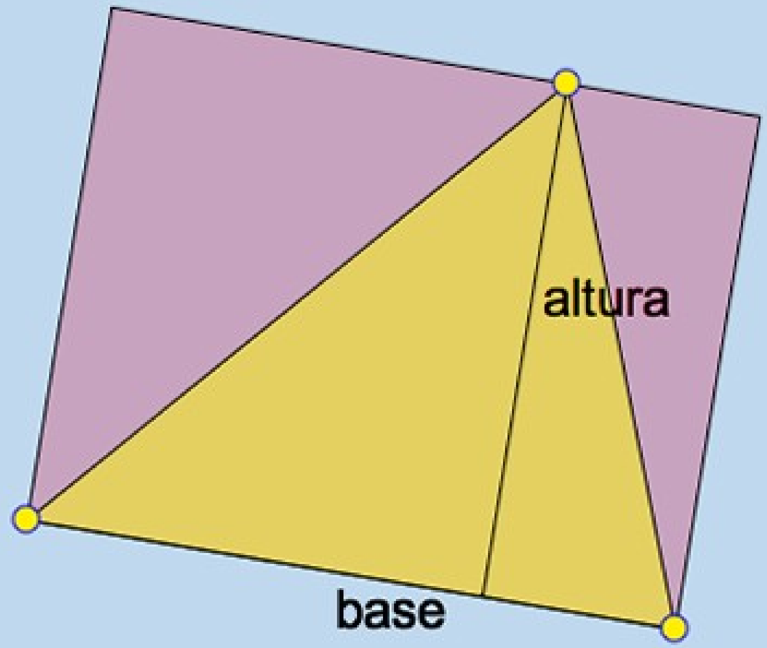
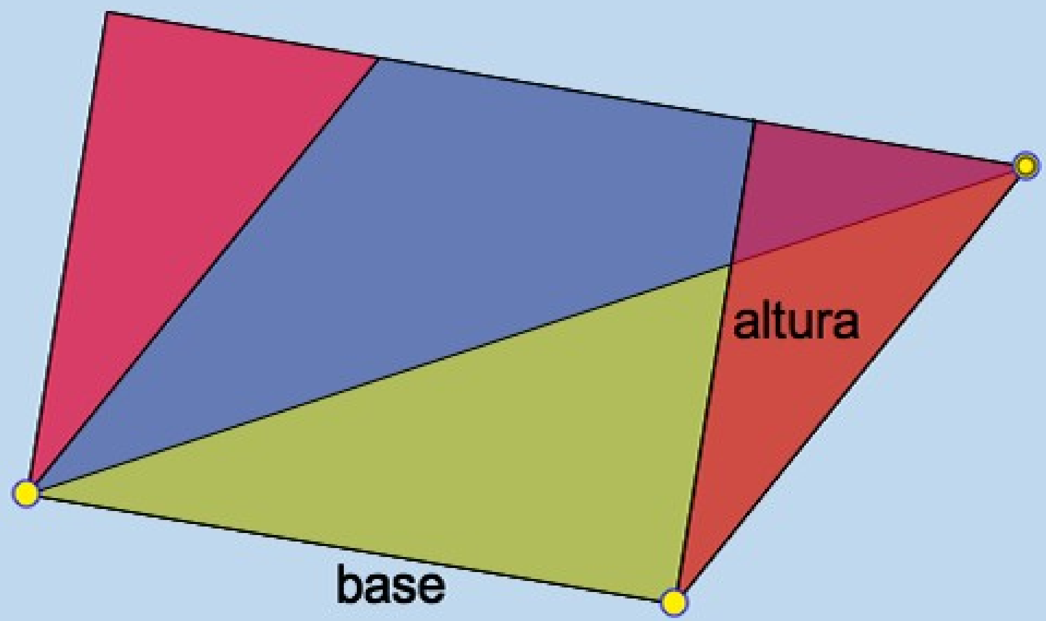
Área de un triángulo



El área del triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.
La fórmula para el área de un triángulo suele escribirse como:

$$\acute{A}rea = \frac{base \times altura}{2}$$

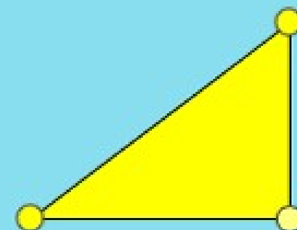
Área de un triángulo



El área del triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.
La fórmula para el área de un triángulo suele escribirse como:

$$Área = \frac{base \times altura}{2}$$

El teorema de Pitágoras



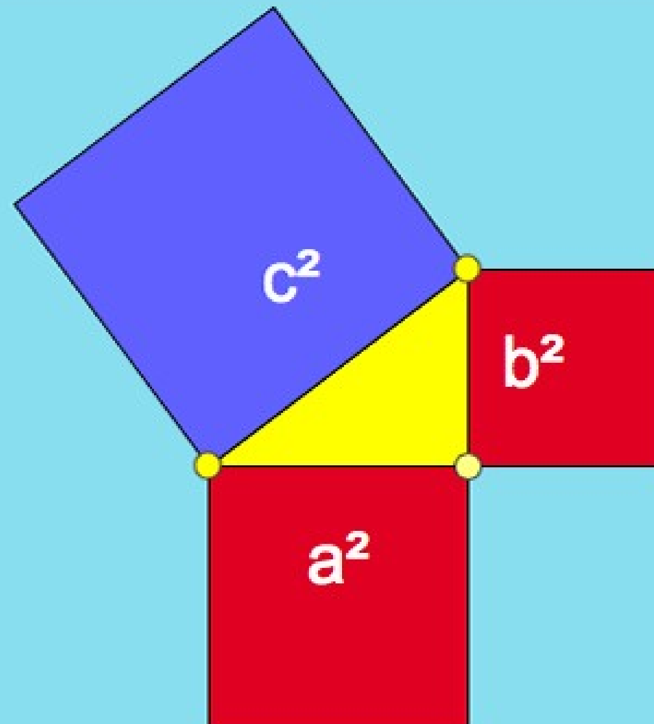
Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Interpretación

El teorema afirma que si los catetos de un triángulo rectángulo son a y b

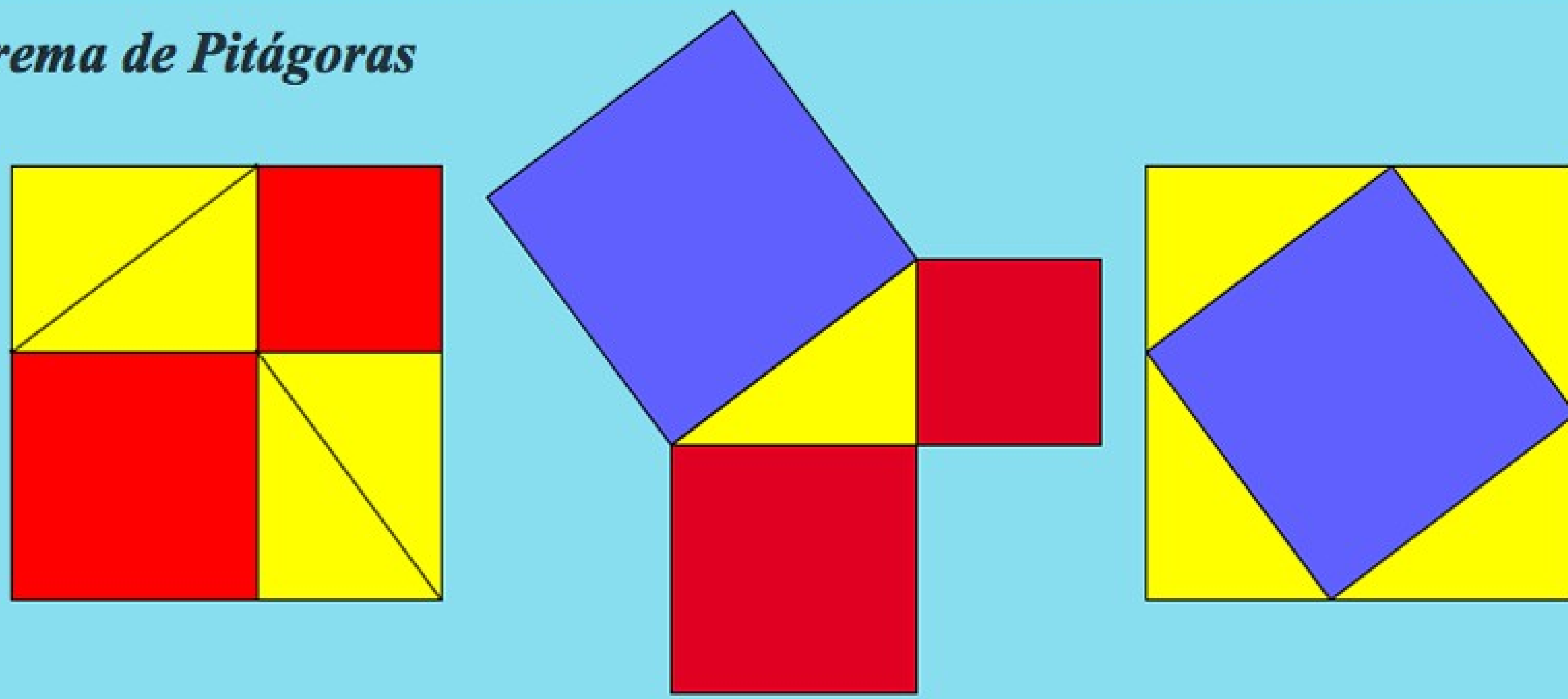
El teorema de Pitágoras



Interpretación

El teorema afirma que si los catetos de un triángulo rectángulo son a y b y su hipotenusa es c, entonces $a^2+b^2=c^2$ o, lo que es lo mismo, que la suma de las áreas de los cuadrados rojos es igual al área del cuadrado azul.

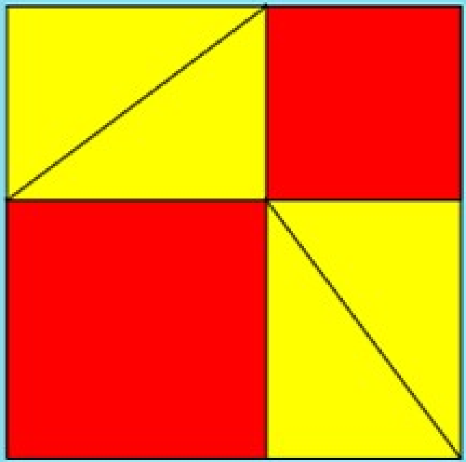
El teorema de Pitágoras

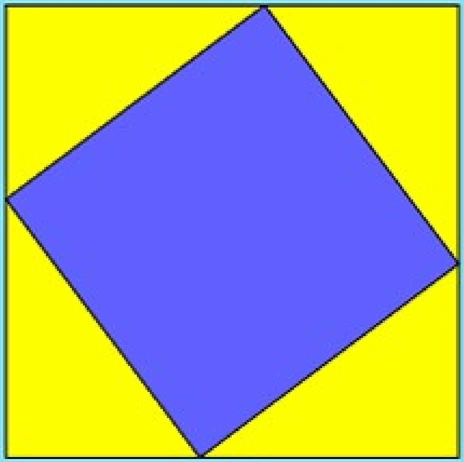


Demostración

Los cuadrados de ambas figuras tienen lado $a+b$ y, por tanto, la misma área. Cada figura tiene cuatro triángulos rectángulos amarillos que son todos iguales. Entonces, si eliminamos todos esos triángulos, las áreas de lo que queda en cada figura deben ser iguales. Como lo que queda en la figura de la izquierda

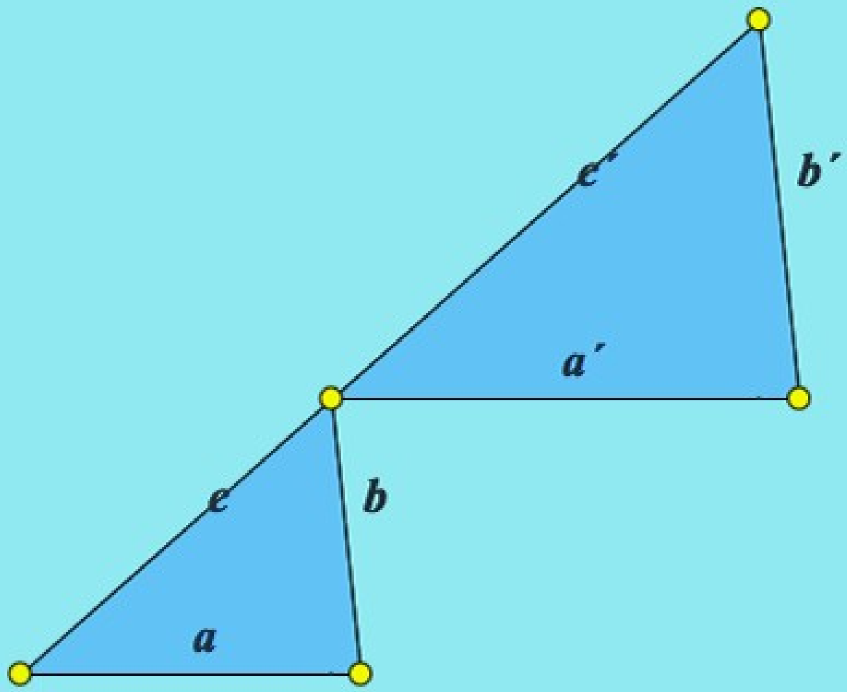
El teorema de Pitágoras





Los cuadrados de ambas figuras tienen lado $a+b$ y, por tanto, la misma área. Cada figura tiene cuatro triángulos rectángulos amarillos que son todos iguales. Entonces, si eliminamos todos esos triángulos, las áreas de lo que queda en cada figura deben ser iguales. Como lo que queda en la figura de la izquierda es a^2+b^2 y lo que queda en la de la derecha es c^2, resulta que $a^2+b^2=c^2$, que es lo que queríamos demostrar.

La ley de las proporciones



La ***ley de las proporciones*** dice que los lados de dos triángulos semejantes son proporcionales.

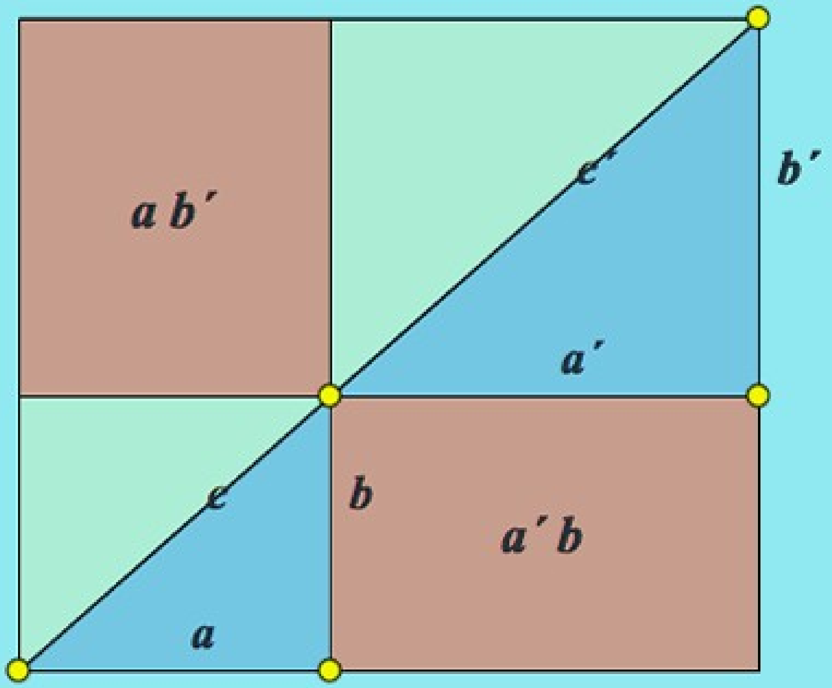
La figura exhibe dos triángulos semejantes. La ***ley de las proporciones*** dice que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Demostraremos la ley de las proporciones para triángulos rectángulos usando argumentos de partición de figuras planas y áreas. Luego extenderemos el resultado obtenido al caso de triángulos arbitrarios.

paso

La ley de las proporciones



paso

Los rectángulos de lados ***a b´*** y ***a´ b,*** tienen áreas iguales.

$$\therefore\ a\,b' = a'\,b \qquad \text{(A)}$$

Esto demuestra que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad y \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \text{(B)}$$

Usando el Teorema de Pitágoras y (B),

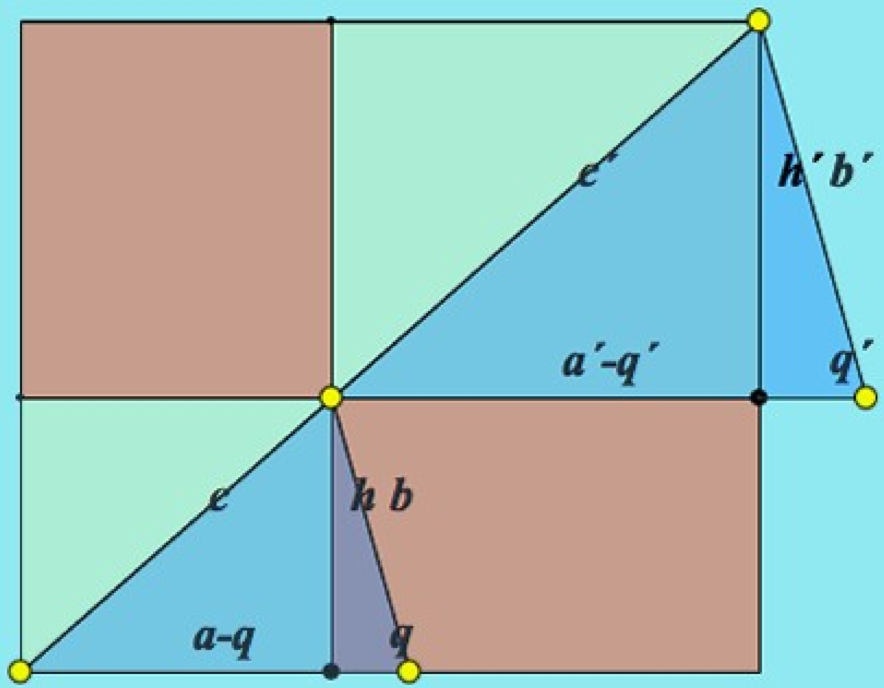
$$\frac{c^2}{c'^2} = \frac{a^2+b^2}{a'^2+b'^2} = \frac{a^2}{a'^2}\,\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b'^2}{a'^2}} = \frac{a^2}{a'^2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Lo cual demuestra la ley de las proporciones para triángulos rectángulos.

La ley de las proporciones



Para cubrir el caso general realizamos la construcción que se muestra en la figura. Dado que los triángulos de lados

$$h\ ,\ a\text{-}q\ ,\ c \quad \text{y} \quad h',\ a'\text{-}q',\ c$$

son semejantes y rectángulos, sabemos que

$$\frac{h}{h'} = \frac{c}{c'} = \frac{a-q}{a'-q'}$$

Y dado que los triángulos de lados

$$h\ ,\ q\ ,\ b \quad \text{y} \quad h',\ q',\ b'$$

son semejantes y rectángulos, tenemos que

$$\frac{h}{h'} = \frac{b}{b'} = \frac{q}{q'}$$

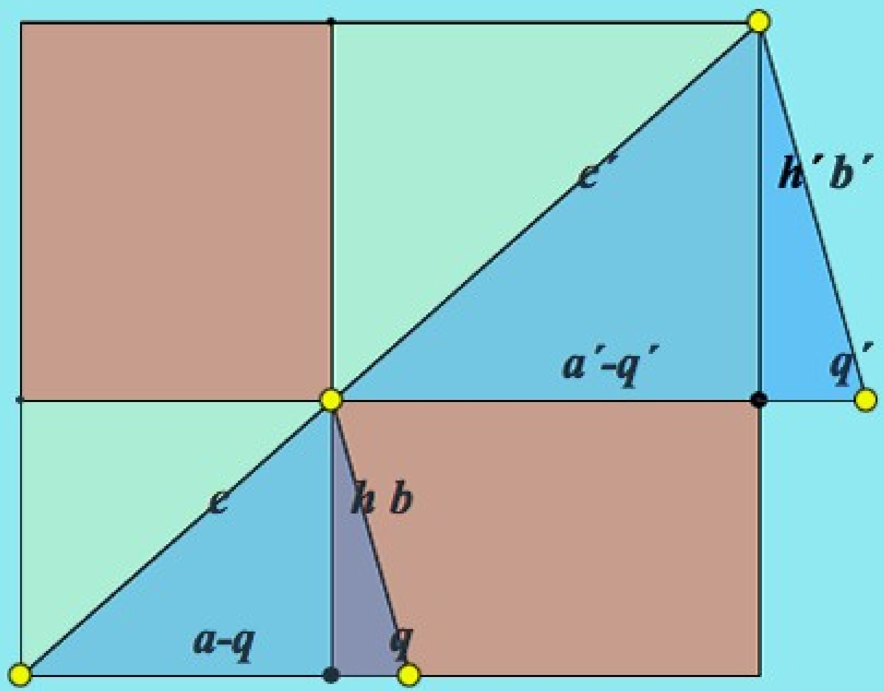
Por lo tanto:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} = \frac{a}{a'}$$

Q.E.D.

paso

La ley de las proporciones



paso

Lema

Si $$\frac{n_1}{d_1}=\frac{n_2}{d_2} \qquad \text{(A)}$$

entonces: $$\frac{n_1+n_2}{d_1+d_2}=\frac{n_1}{d_1}=\frac{n_2}{d_2}$$

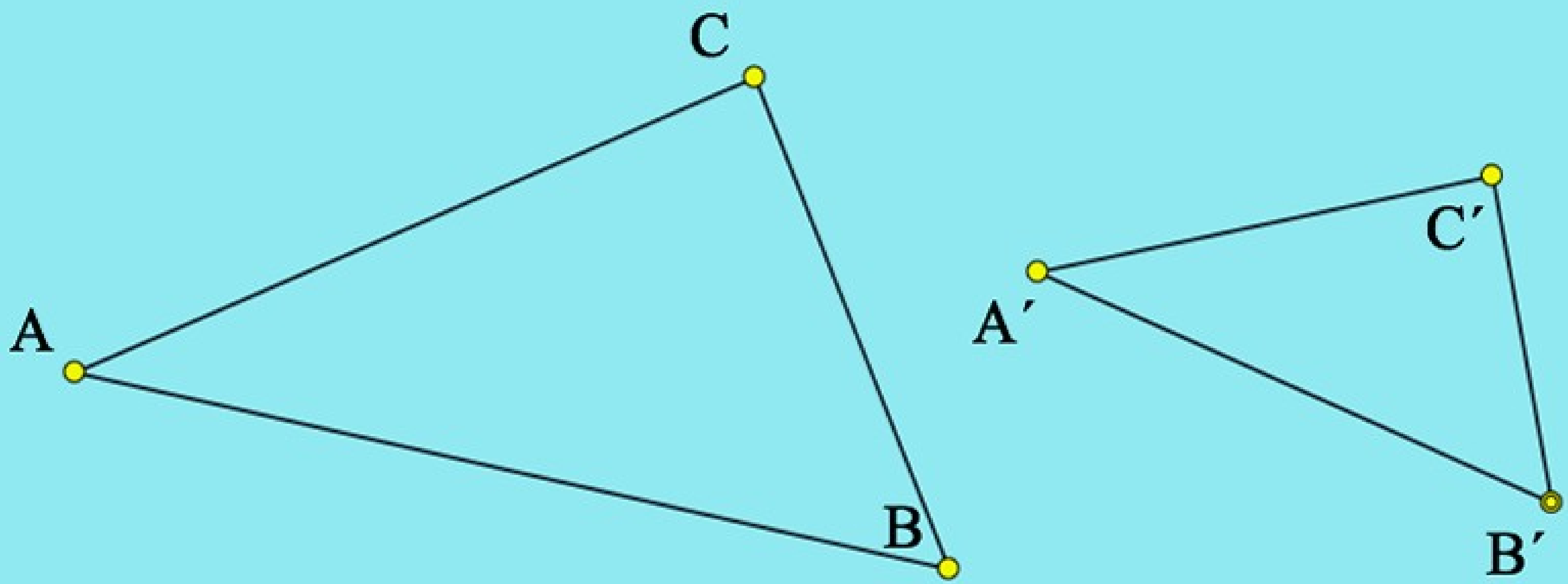
Demostración

$$\frac{n_1+n_2}{d_1+d_2}=\frac{n_1+n_1\dfrac{d_2}{d_1}}{d_1+d_1\dfrac{n_2}{n_1}}=\frac{n_1\left(1+\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{d_1\left(1+\dfrac{d_2}{d_1}\right)}$$

porque de (A) es obvio que: $$\frac{n_2}{n_1}=\frac{d_2}{d_1}$$

Por lo tanto $$\frac{n_1+n_2}{d_1+d_2}=\frac{n_1}{d_1} \qquad \text{Q.E.D.}$$

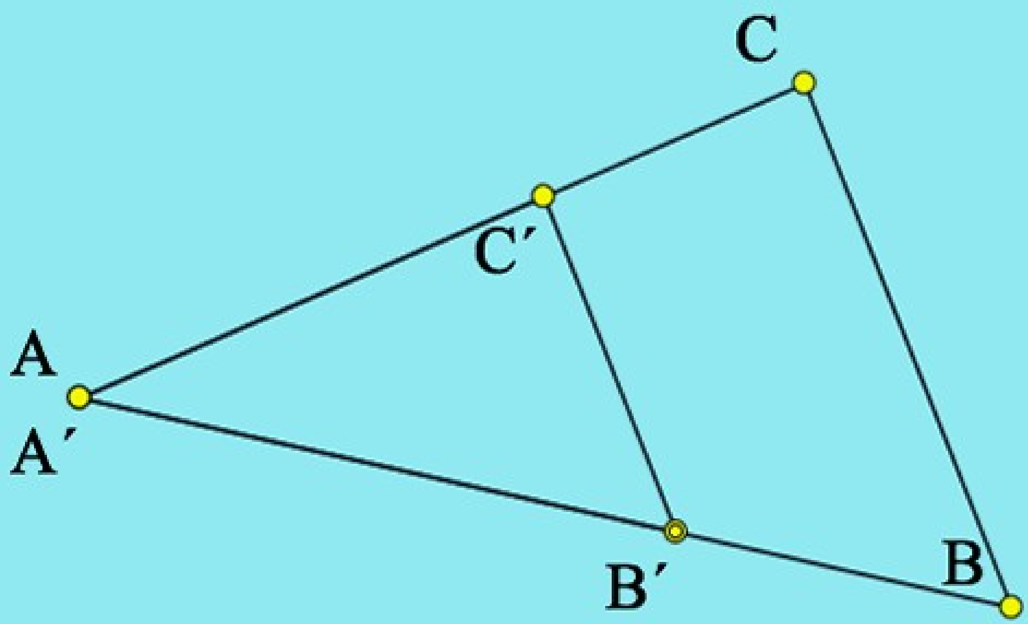
La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)



Reflejar

paso

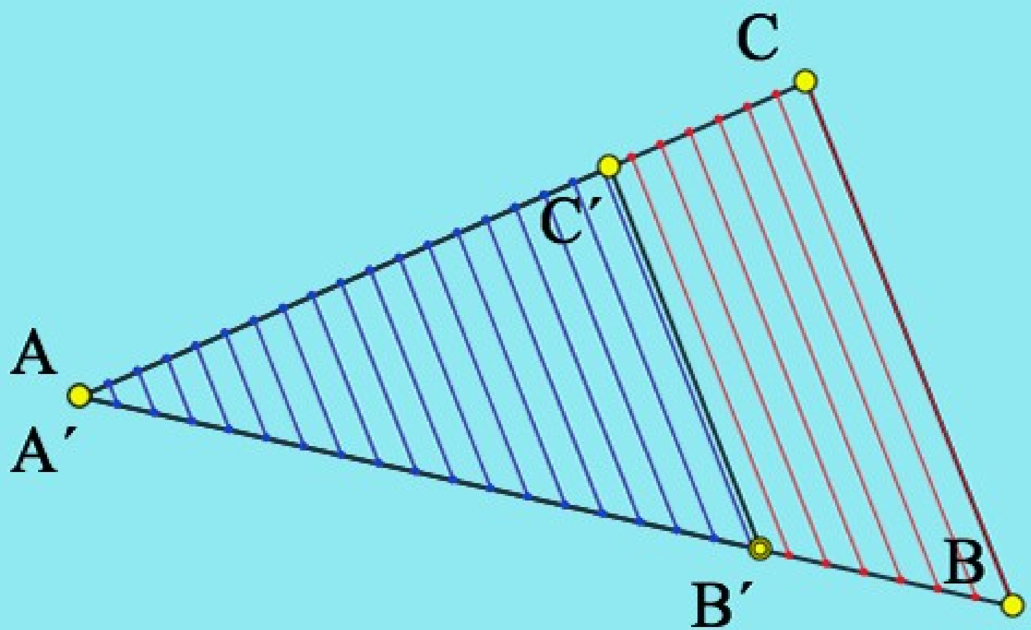
La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)



Reflejar

paso

La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)

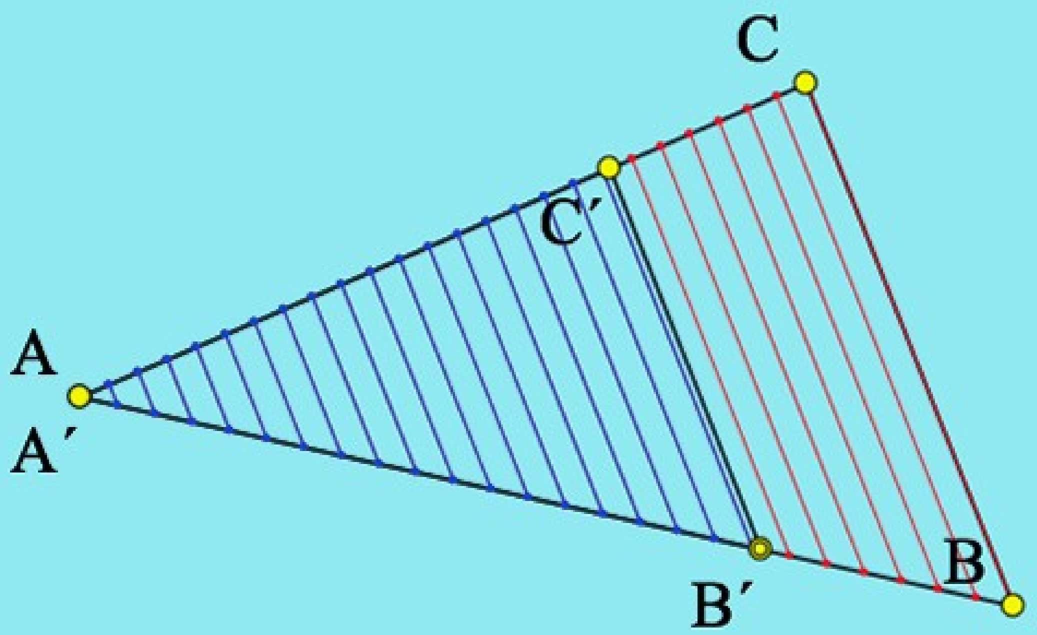


AB= 25 AX   A′B′≈ 18 AX

AC= 25 AY   A′C′≈ 18 AY

Reflejar   *n=25 m=18*   *paso*

La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)



AB= 25 AX A′B′≈ 18 AX

AC= 25 AY A′C′≈ 18 AY

Reflejar

$n=25 \quad m=18$

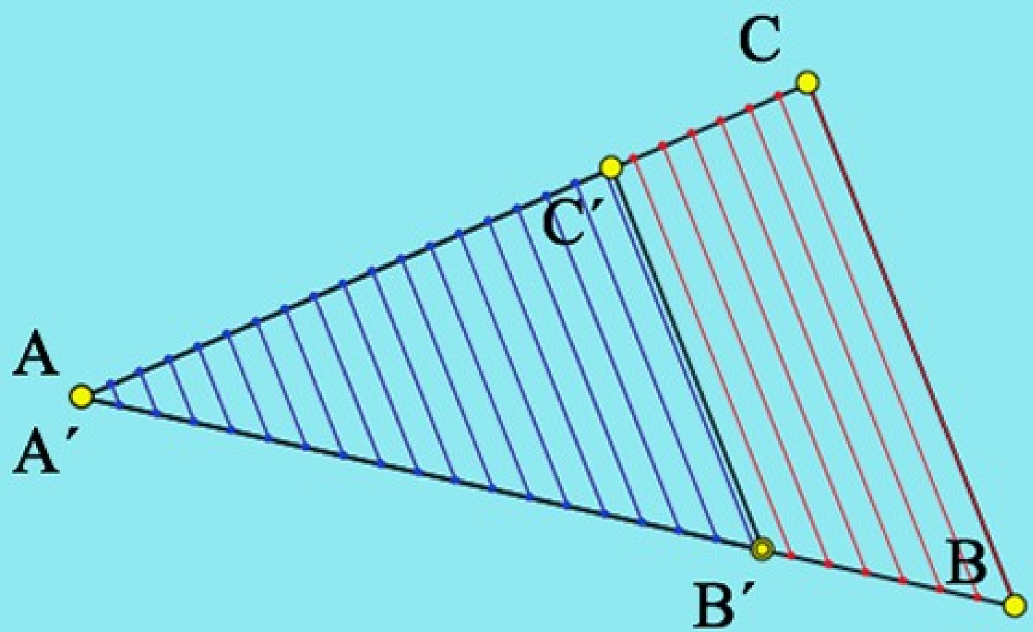
$$m\,AX \leq A'B' < (m+1)AX$$

$$n\,AX = AB = n\,AX$$

$$\therefore \quad \frac{m}{n} \leq \frac{A'B'}{AB} < \frac{m+1}{n}$$

paso

La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)



$AB = 25\ AX \quad A'B' \approx 18\ AX$

$AC = 25\ AY \quad A'C' \approx 18\ AY$

Reflejar

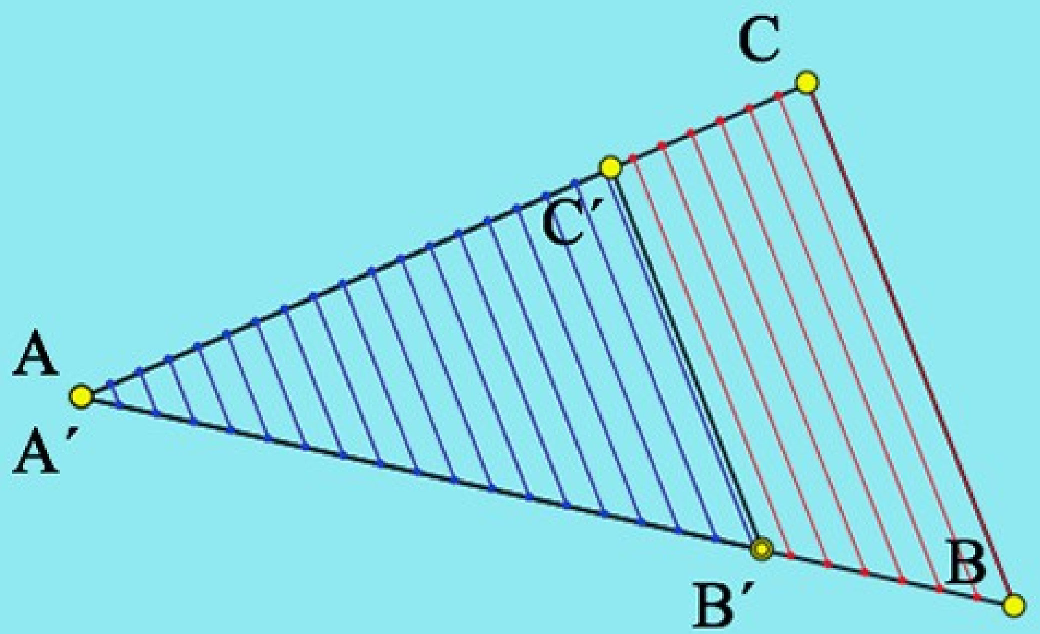
$n=25 \quad m=18$

$$m\,AX \leq A'B' < (m+1)AX$$
$$n\,AX = AB = n\,AX$$
$$\therefore \quad \frac{m}{n} \leq \frac{A'B'}{AB} < \frac{m+1}{n}$$

$$m\,AY \leq A'C' < (m+1)AY$$
$$n\,AY = AC = n\,AY$$
$$\therefore \quad \frac{m}{n} \leq \frac{A'C'}{AC} < \frac{m+1}{n}$$

paso

La ley de las proporciones (Eudoxio y Euclides)



$AB = 25\ AX \quad A'B' \approx 18\ AX$

$AC = 25\ AY \quad A'C' \approx 18\ AY$

Reflejar

$n = 25 \quad m = 18$

$$m\,AX \le A'B' < (m+1)AX$$
$$n\,AX = AB = n\,AX$$
$$\therefore \quad \frac{m}{n} \le \frac{A'B'}{AB} < \frac{m+1}{n}$$

$$m\,AY \le A'C' < (m+1)AY$$
$$n\,AY = AC = n\,AY$$
$$\therefore \quad \frac{m}{n} \le \frac{A'C'}{AC} < \frac{m+1}{n}$$

Entonces:

$$\left| \frac{A'C'}{AC} - \frac{A'B'}{AB} \right| < \frac{1}{n} \quad \forall\, n > 0$$

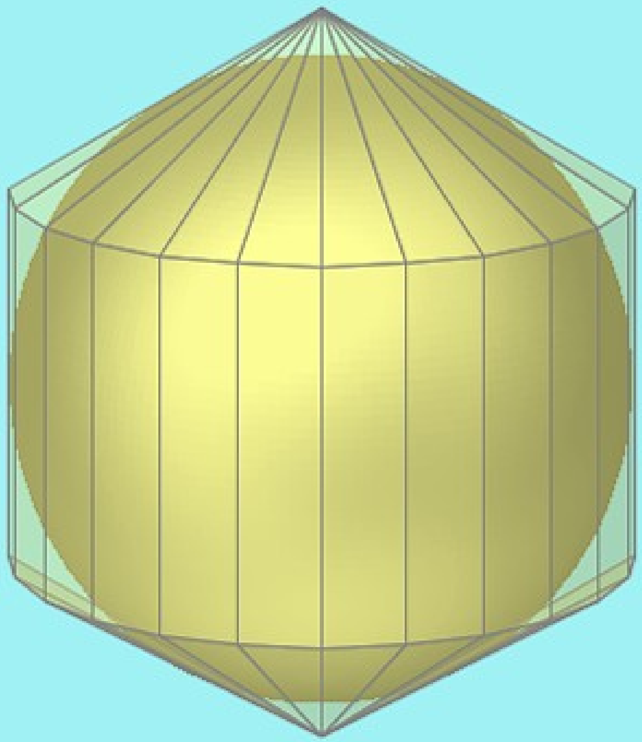
Por lo tanto:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} \quad \text{Q.E.D.}$$

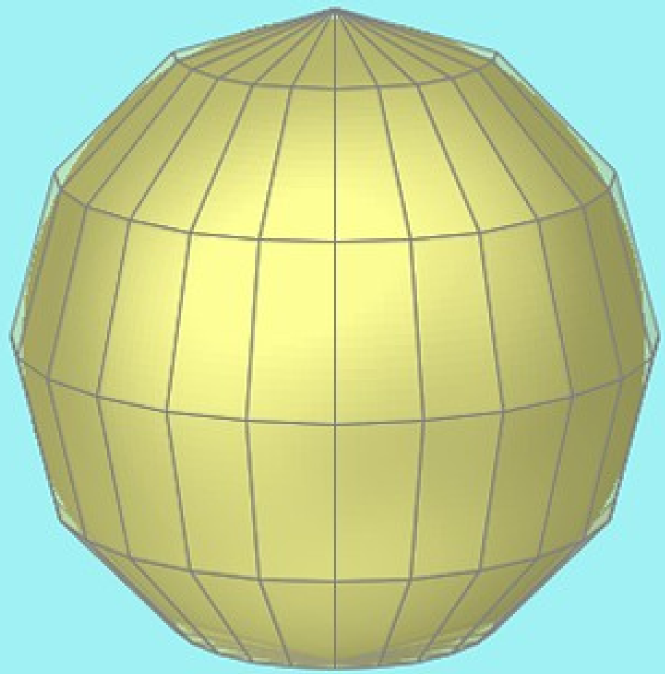
paso

Superficie de la esfera

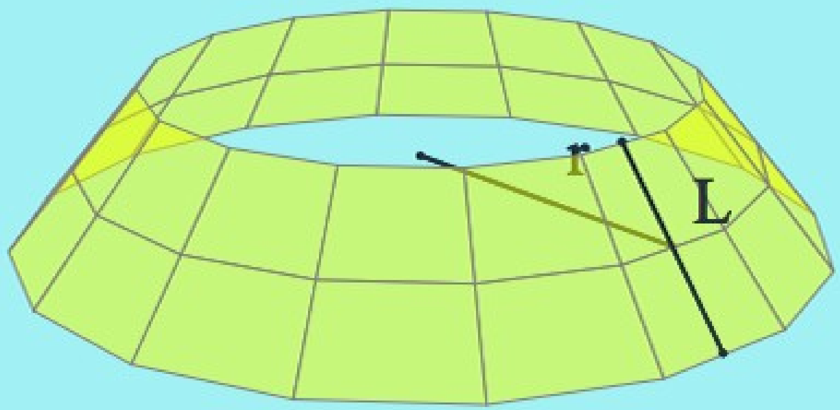
Superficie de la esfera



Superficie de la esfera

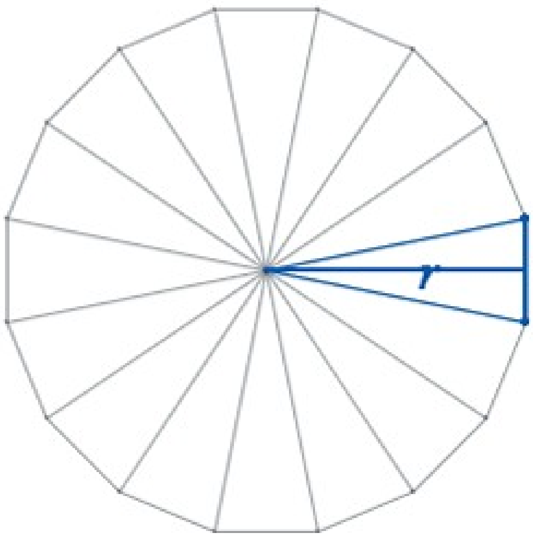


Superficie de la esfera

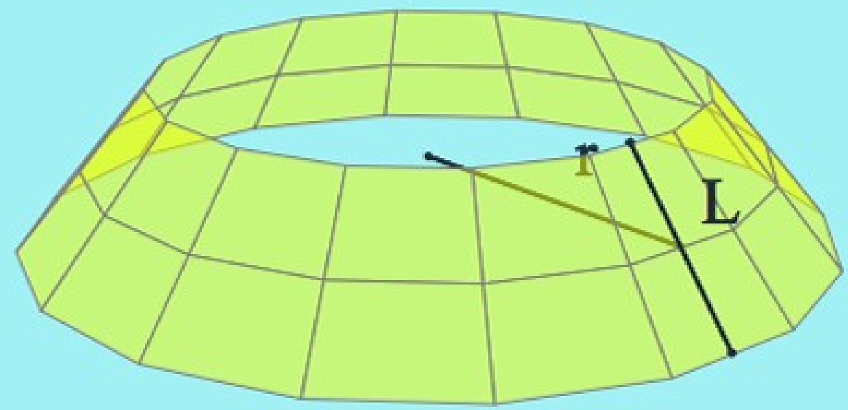


r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

$$A_n = p_n \cdot L = n \cdot l_n \cdot L$$



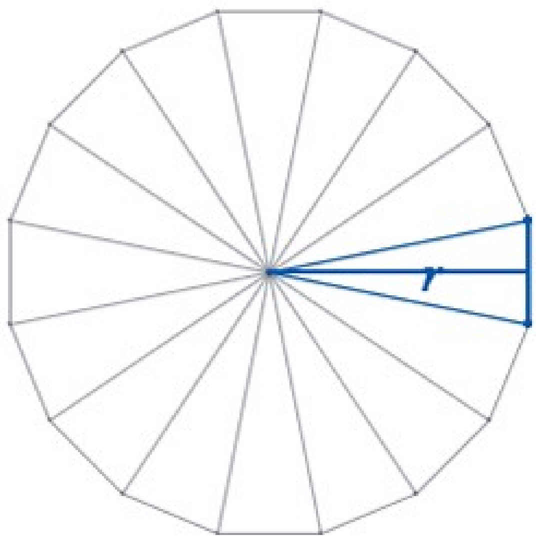
$$l_n = 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) r$$



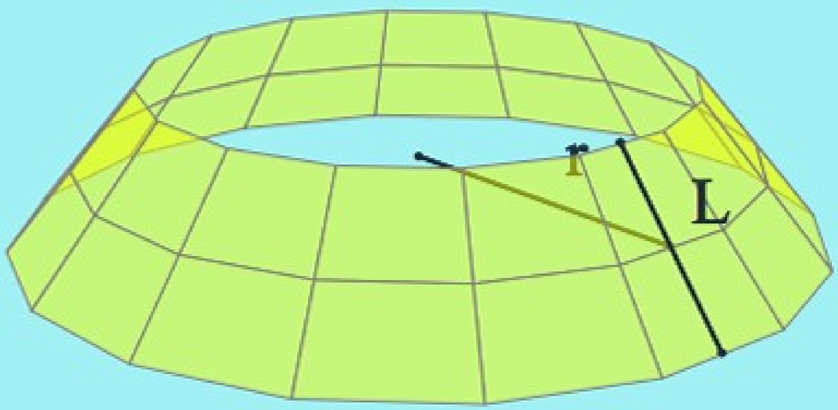
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot L = 2\pi\, r\, L$$

r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

$$A_n = p_n \cdot L = n \cdot l_n \cdot L$$



$$l_n = 2\ \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) r$$

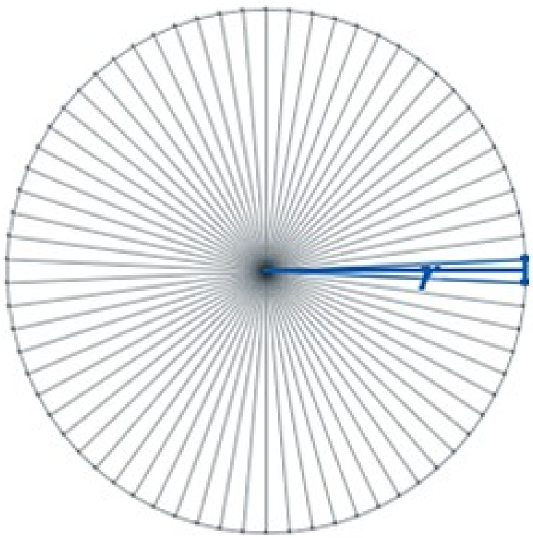


$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} p_n \cdot L = 2\pi\, r\, L$$

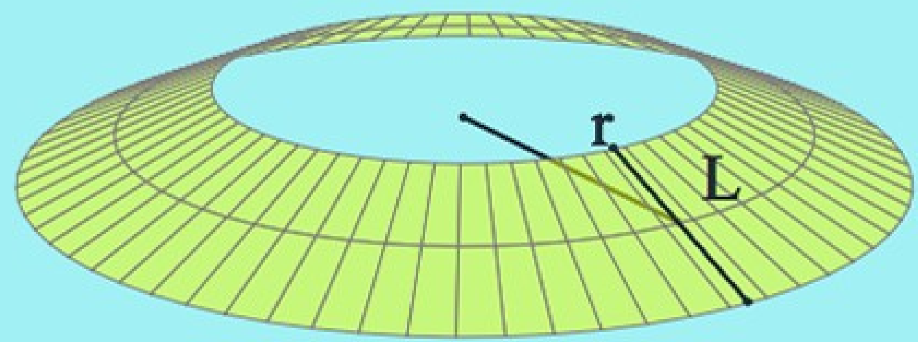
$A_n = 15.276$ $2\pi\, r\, L = 15.080$

r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

$$A_n = p_n \cdot L = n \cdot l_n \cdot L$$



$$l_n = 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) r$$

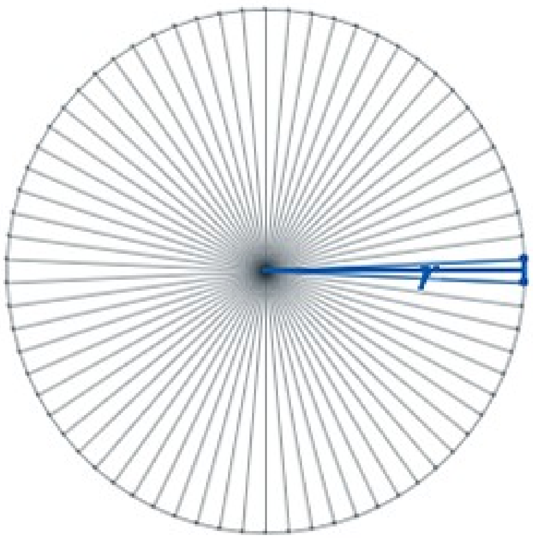


$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot L = 2\pi\, r\, L$$

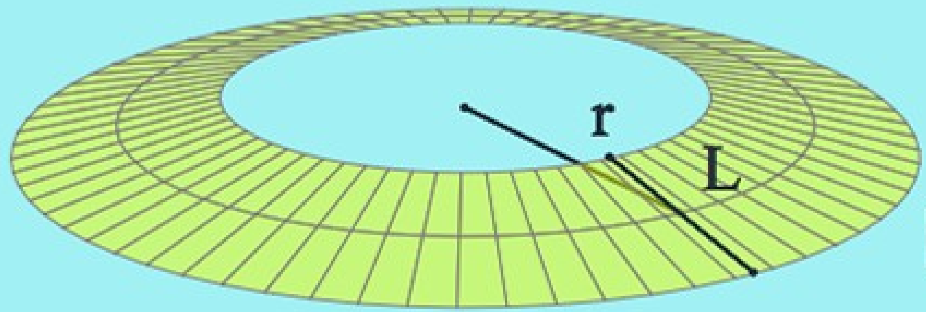
$A_n = 15.090$ $\quad$ $2\pi\, r\, L = 15.080$

r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

$$A_n = p_n \cdot L = n \cdot l_n \cdot L$$



$$l_n = 2\ tan\left(\frac{\pi}{n}\right) r$$

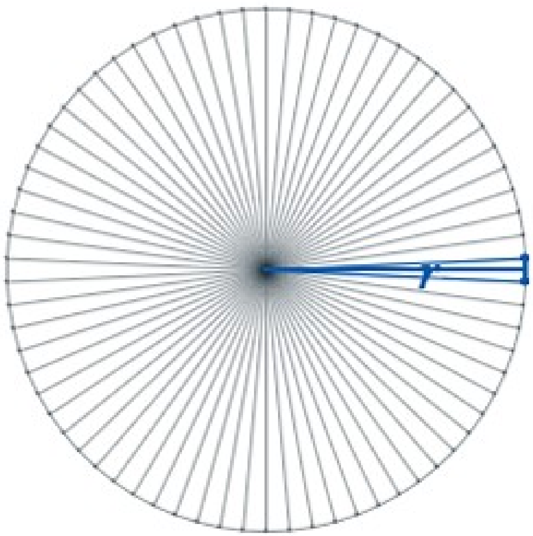


$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} p_n \cdot L = 2\pi\, r\, L$$

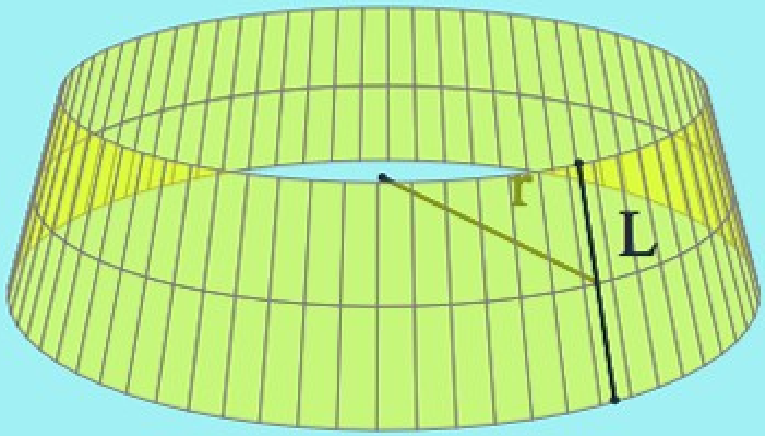
$A_n = 15.090$ $\quad$ $2\pi\, r\, L = 15.080$

r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

$$A_n = p_n \cdot L = n \cdot l_n \cdot L$$



$$l_n = 2\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) r$$

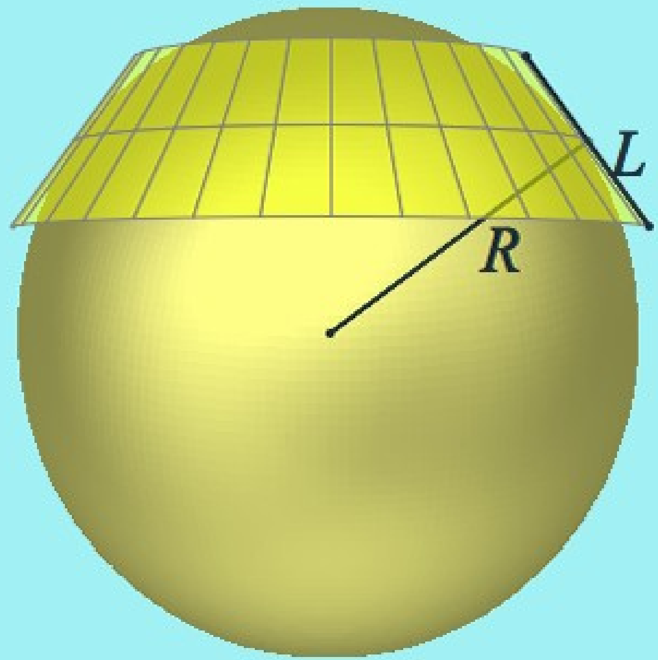


$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} p_n \cdot L = 2\pi\, r\, L$$

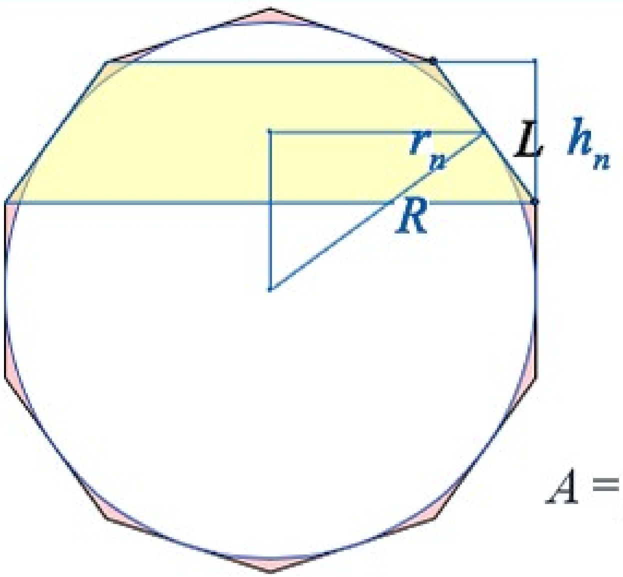
$A_n = 15.090$ $\quad$ $2\pi\, r\, L = 15.080$

r *L* *n* *ángulo* *escala* *paso*

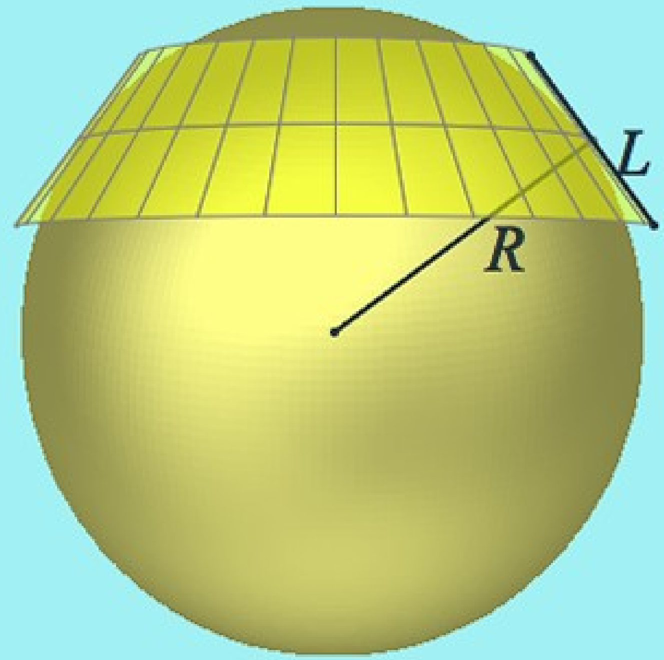
Superficie de la esfera



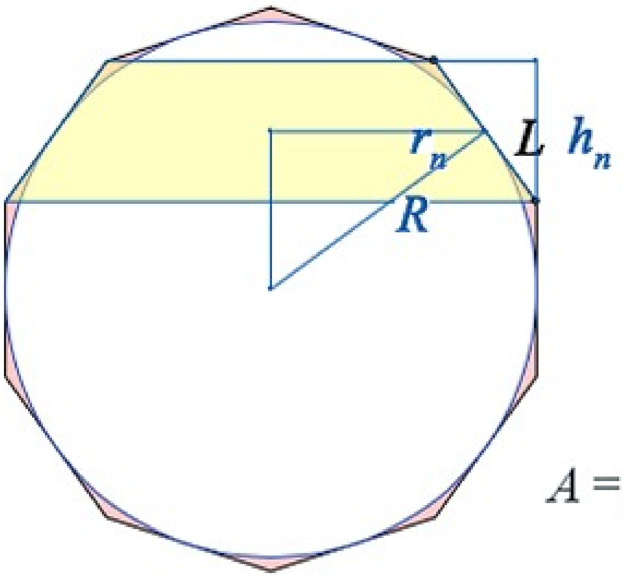
n *fi* *escala* *paso*



$$A = \sum_{n} 2\pi\, r_n \cdot L$$



n *fi* *escala* *paso*

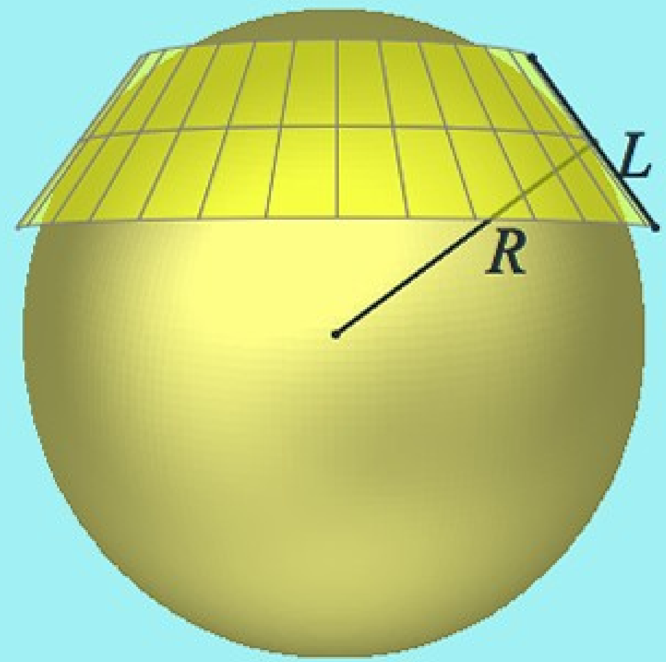


$$A = \sum_n 2\pi\, r_n \cdot L$$

Por triángulos semejantes,

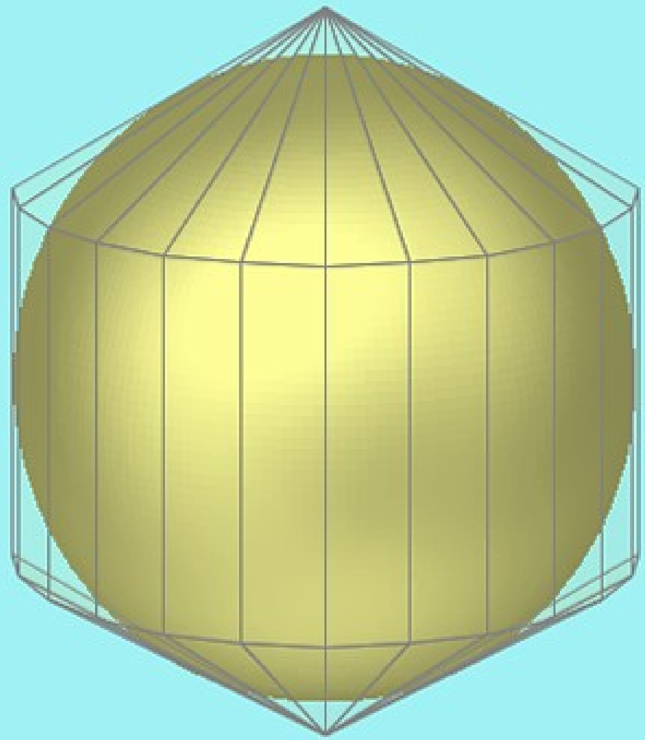
$$\frac{r_n}{R} = \frac{h_n}{L} \quad \text{y, } \therefore \quad r_n \cdot L = R \cdot h_n$$

$$\therefore\ A = \sum_n 2\pi\, r_n \cdot L = 2\pi R \sum_n h_n \simeq 4\pi R^2$$

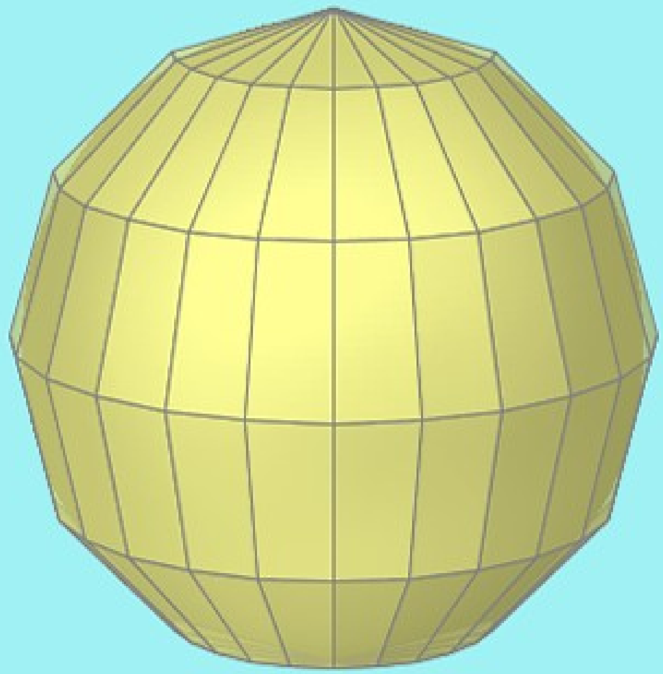


n   *fi*   *escala*   *paso*

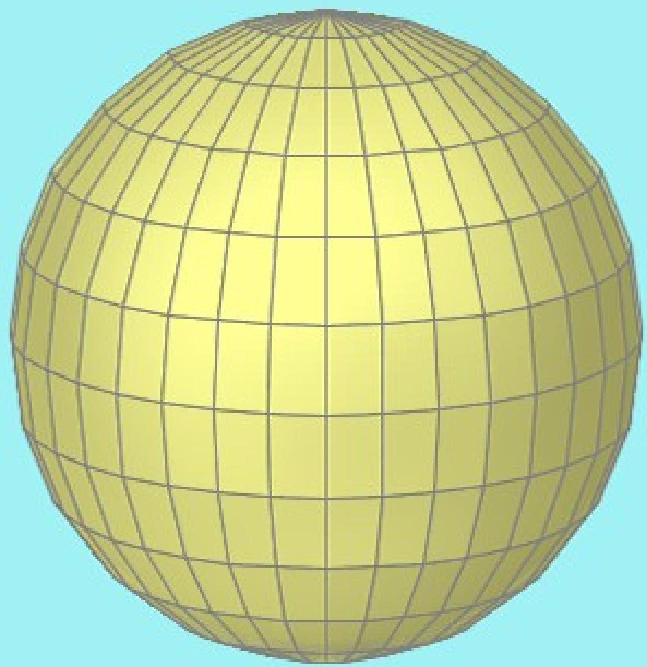
Superficie de la esfera



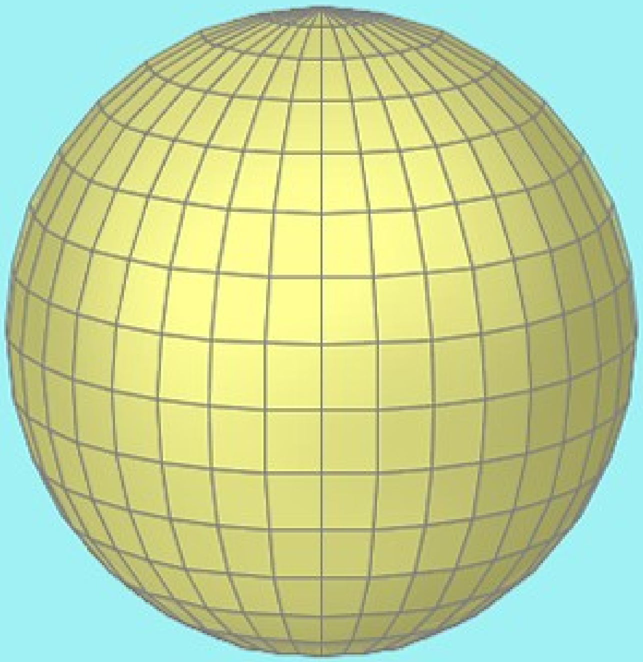
Superficie de la esfera

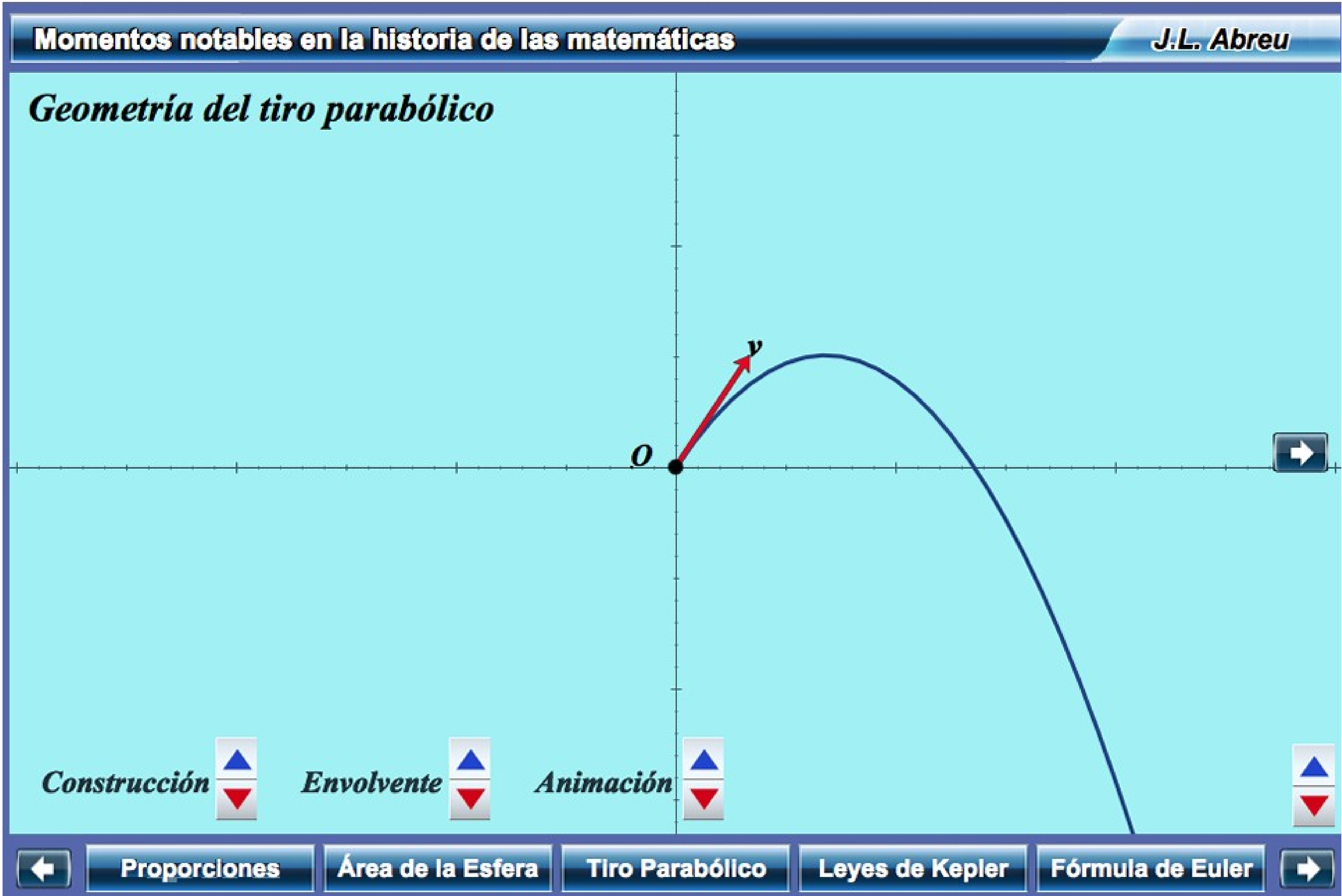


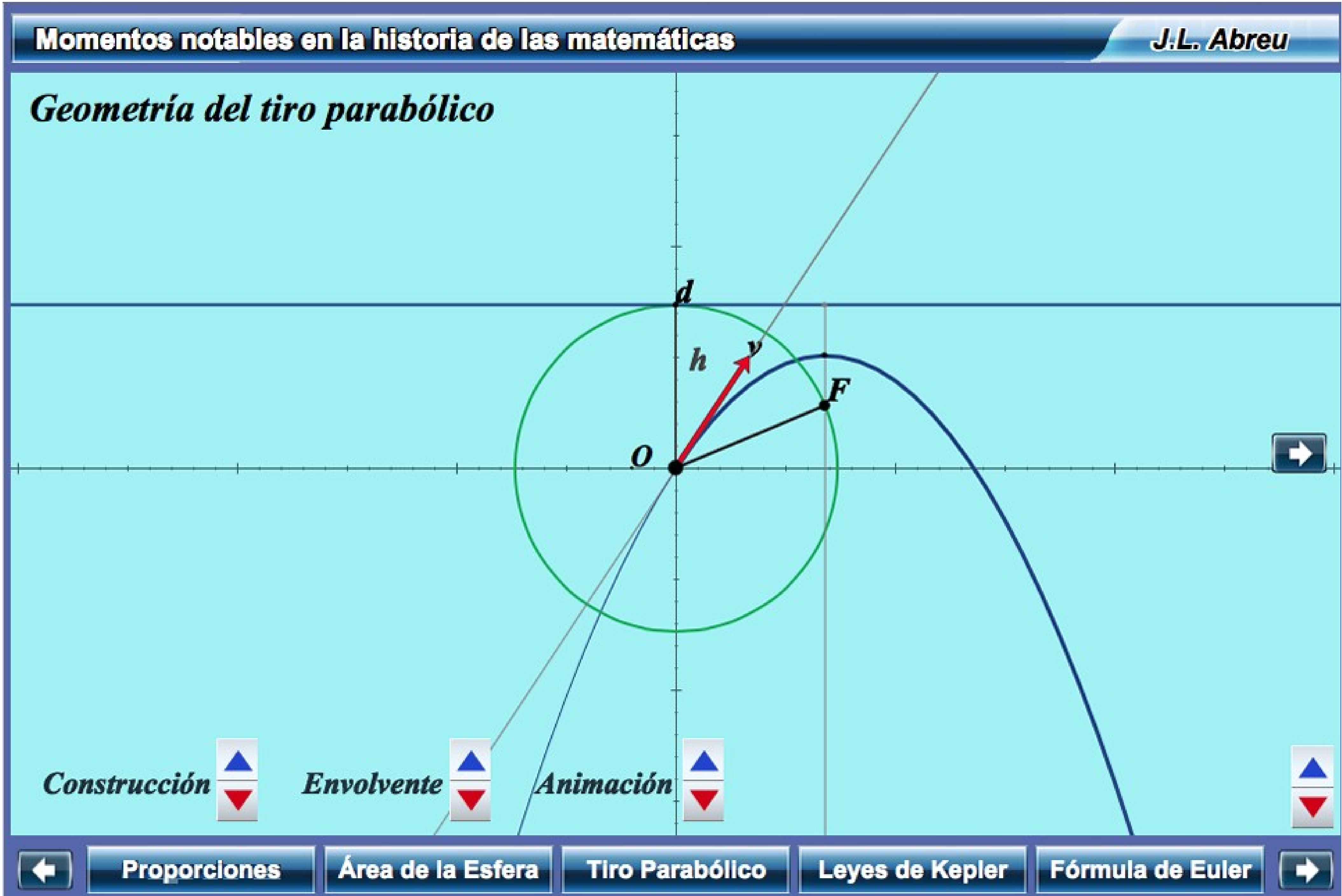
Superficie de la esfera



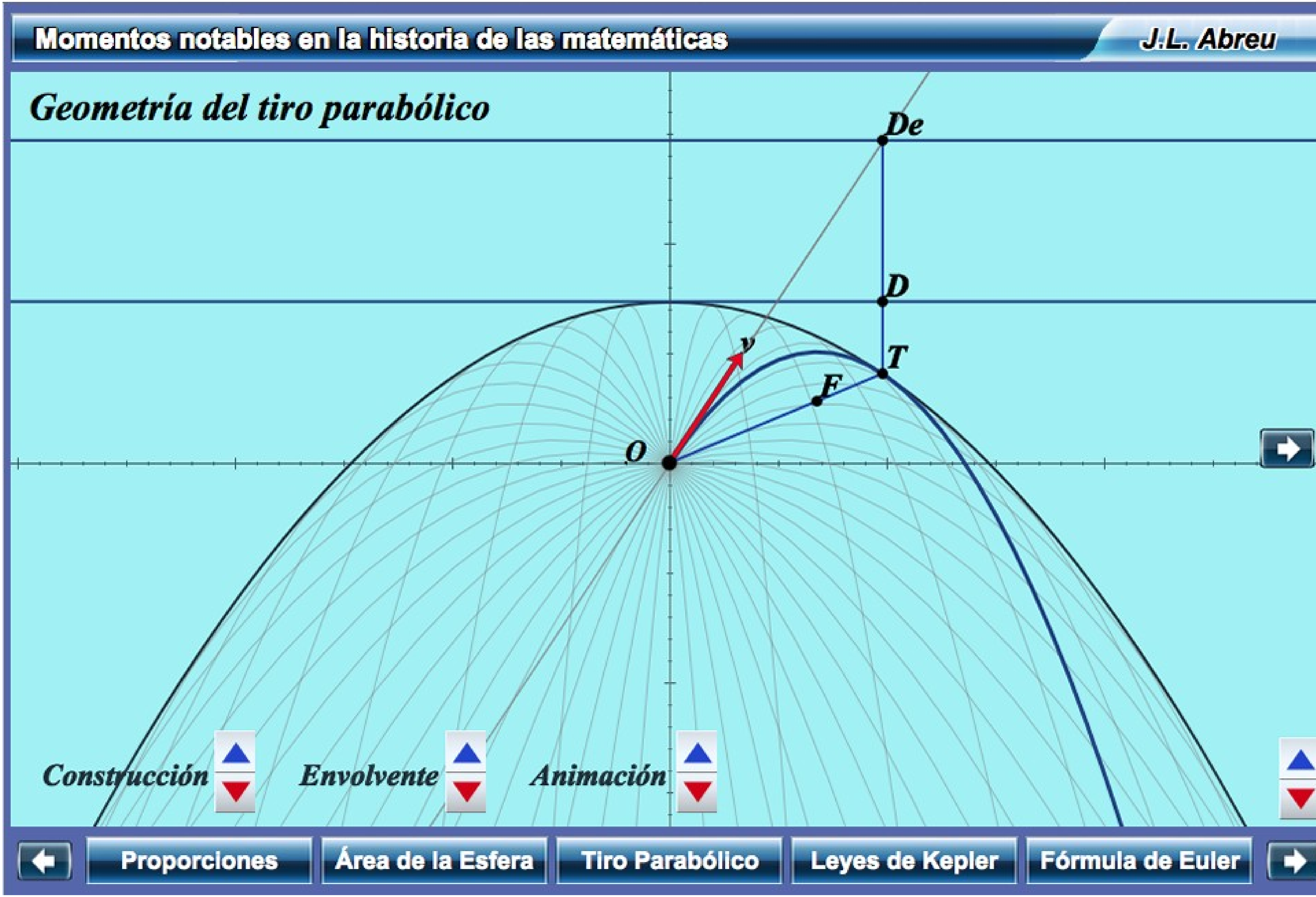
Superficie de la esfera




Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Geometría del tiro parabólico
v
O
Construcción
Envolvente
Animación
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

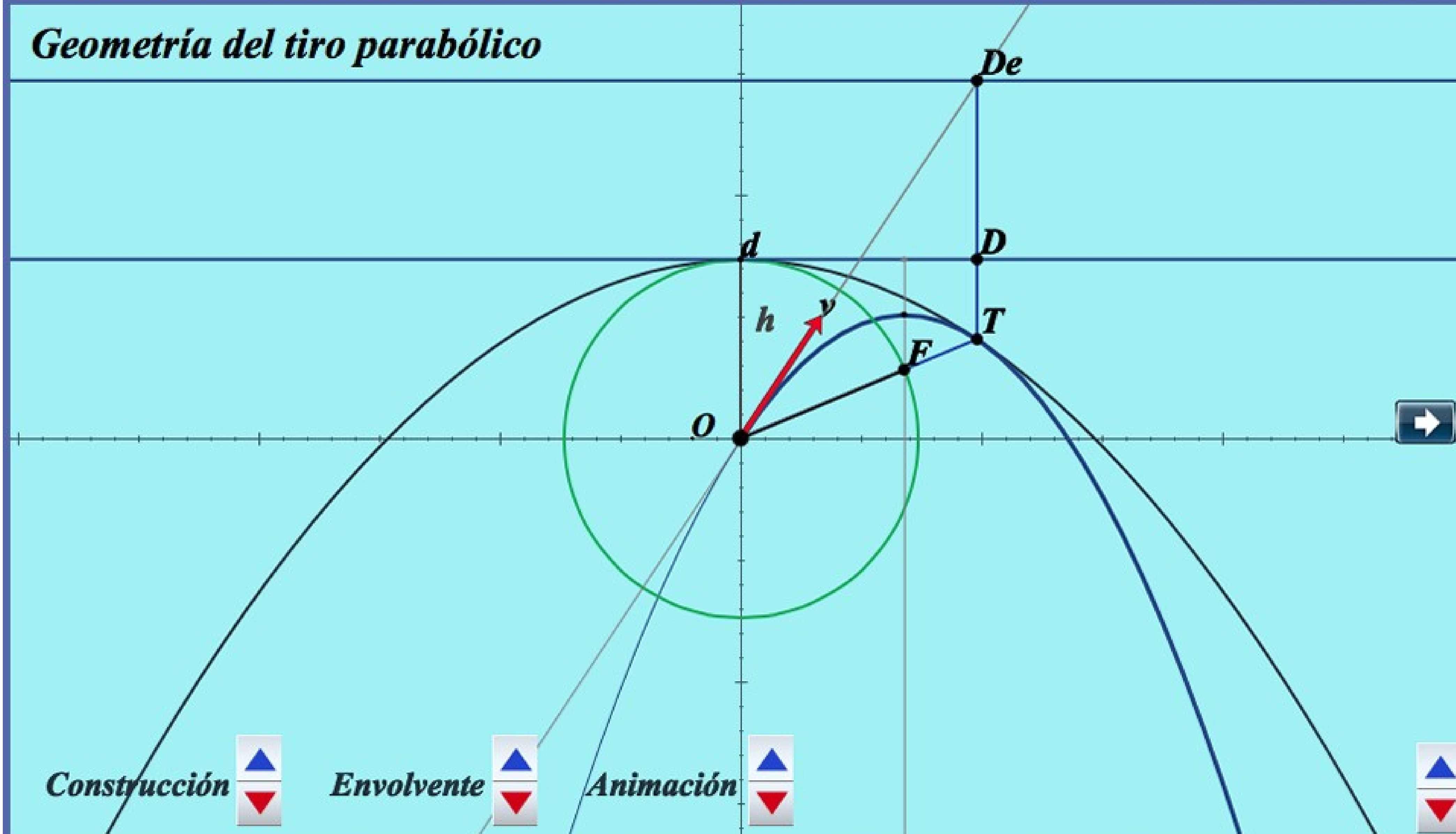


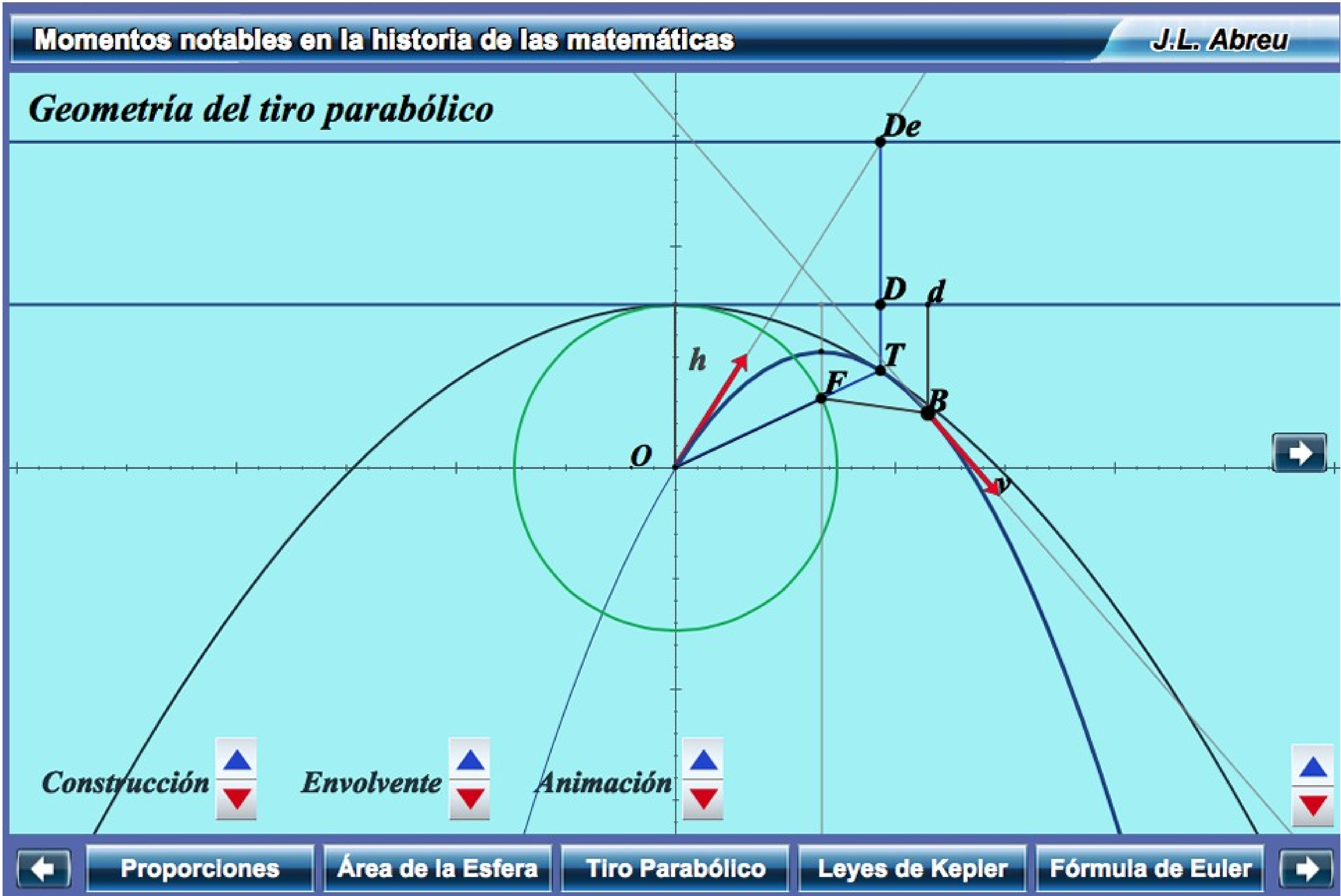
Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Geometría del tiro parabólico
d
h
v
F
O
Construcción
Envolvente
Animación
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler



Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Geometría del tiro parabólico
De
D
T
v
F
O
Construcción
Envolvente
Animación
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

Geometría del tiro parabólico

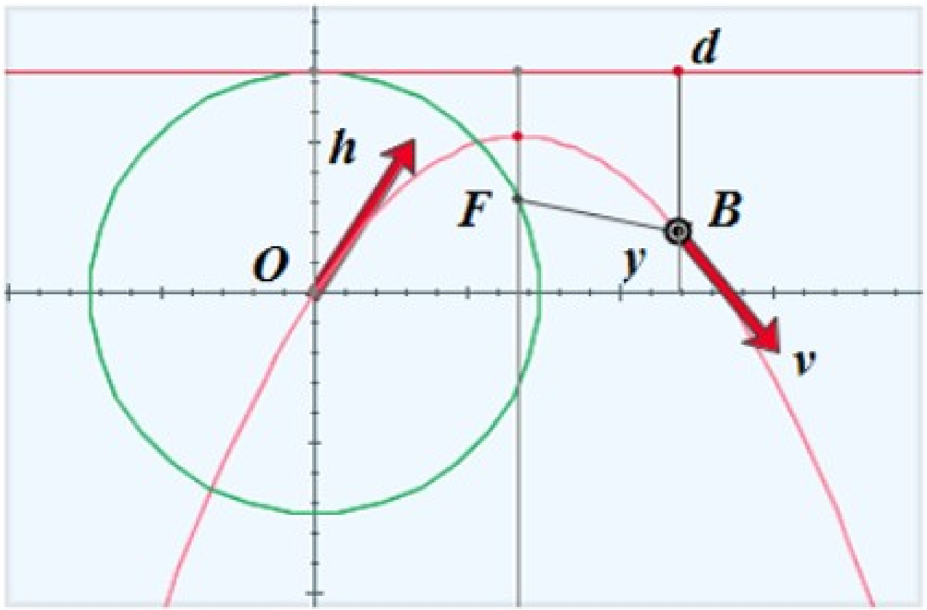



Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Geometría del tiro parabólico
De
D
d
h
T
F
B
O
v
Construcción
Envolvente
Animación
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

Construcción de las trayectorias parabólicas

Sea h la altura máxima que puede alcanzar una bala disparada verticalmente, la cual se calcula como la altura donde toda la energía, que inicalmente es sólo cinética, se convierte en potencial, es decir: $E = mgh = \frac{mv_0^2}{2}$

Se construye una circunferencia con centro en O y de radio h. Dada una dirección de disparo cualquiera, se refleja el punto sobre el cañón a una altura h y se llama F. Construimos la parábola con foco F y directriz horizontal a una altura h sobre el cañon. A cualquier posición B de la bala a lo largo de la parábola, le asignamos una velocidad en la dirección de la tangente a la parábola y de magnitud $v = \sqrt{\frac{BF}{h}}\, v_0$. Entonces:



Teorema. La trayectoria parabólica con la velocidad asignada satisface la ecuación

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh = \frac{mv^2}{2} + mgy$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh = \frac{mv^2}{2} + mgy$$

que corresponde a la conservación de la energía en el tiro parabólico.

Demostración. Sea d la directriz, es decir la recta horizontal con altura h sobre el cañón. Sean (x,y) las coordenadas de una posición arbitraria de B. Por construcción de la trayectoria, $BF = Bd = h - y$. Entonces se cumple la siguiente cadena de igualdades:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = \frac{m}{2}\frac{BF}{h}v_0^2 + mgy$$ por la definición $v = \sqrt{\frac{BF}{h}}\, v_0$.

$$= \frac{mv_0^2}{2}\frac{h-y}{h} + mgy$$ porque $BF = h - y$.

$$= mgh\frac{h-y}{h} + mgy$$ por la definición de h, tal que $mgh = \frac{mv_0^2}{2}$

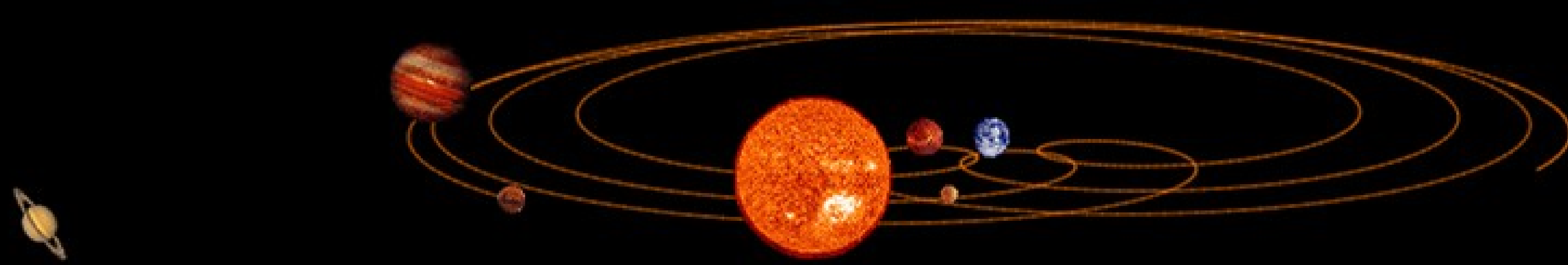
$$= mgh$$ por mera simplificación algebraica.

Lo cual demuestra el teorema. ***QED.***

Momentos notables en la historia de las matemáticas

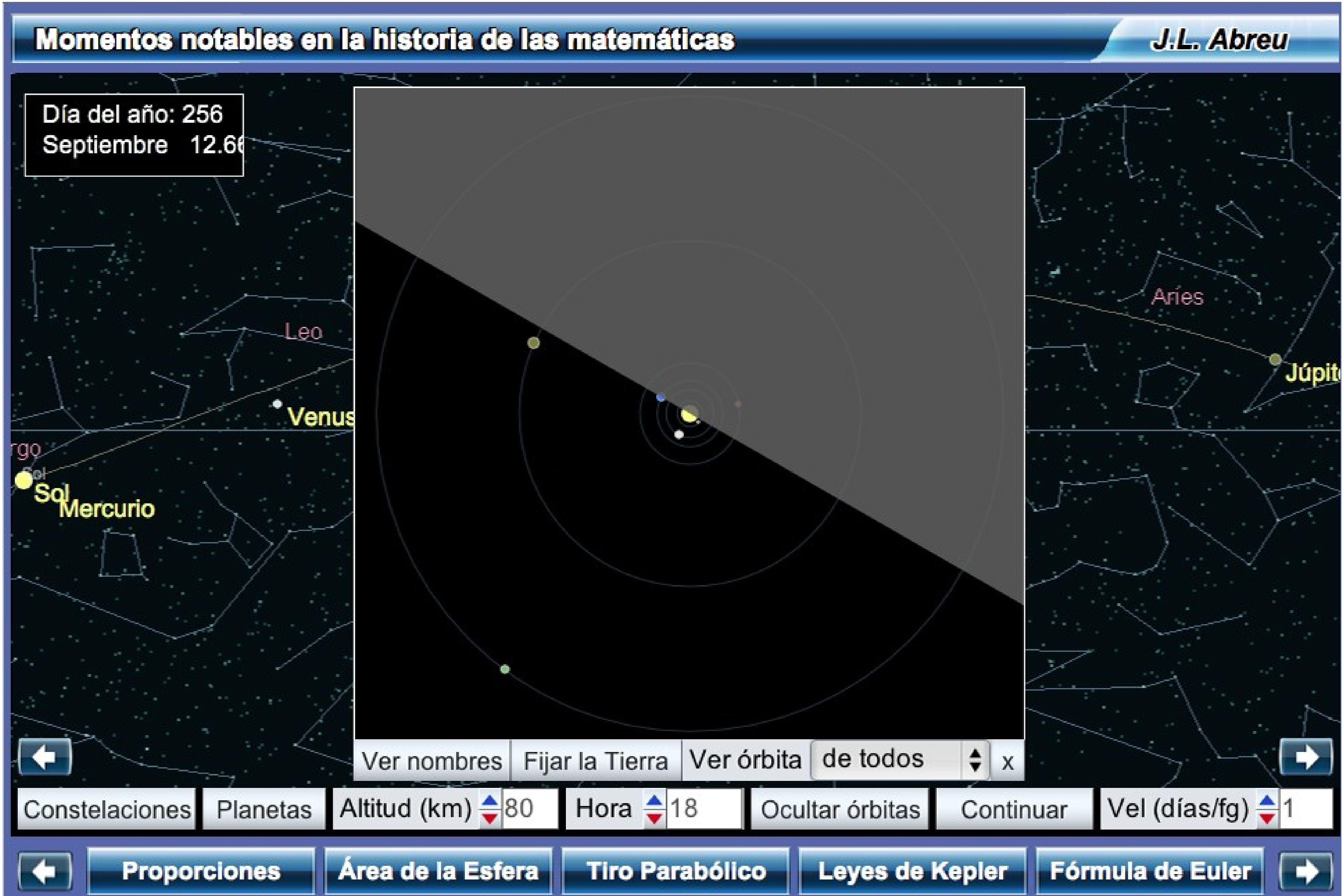
J.L. Abreu

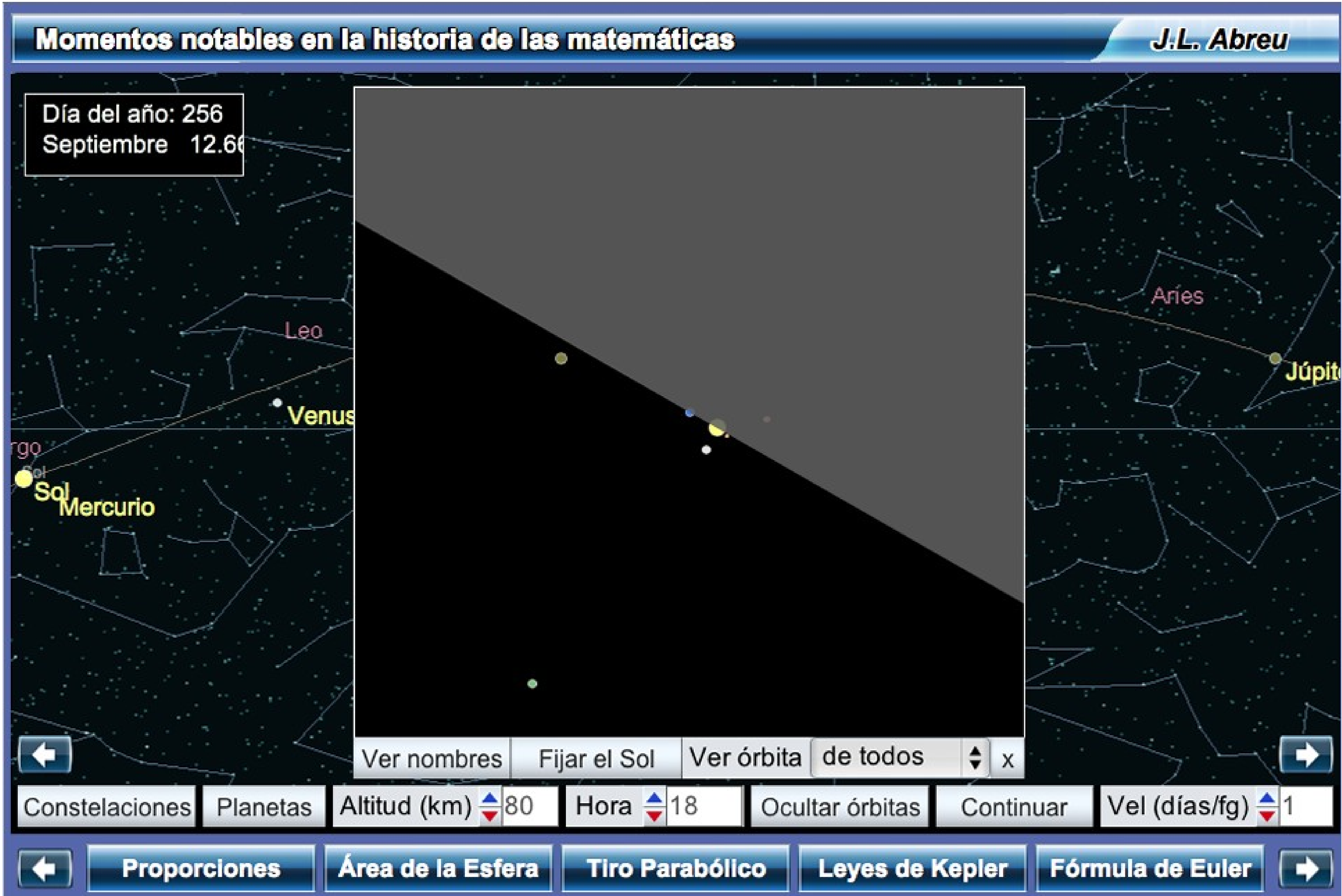
Órbita: de Marte | Sol al centro no | Animar / Pausa | Velocidad (días/fg) 3



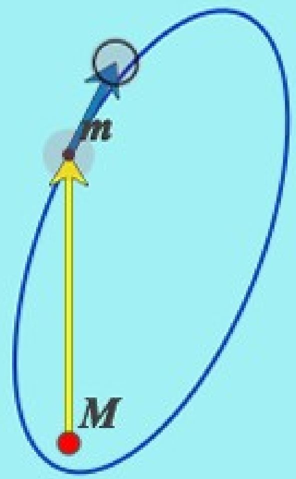
Arriba aparece una escena interactiva que muestra al Sol y los planetas en movimiento.
Se puede ver el movimiento desde el punto de vista del Sol o de la Tierra.
Para cambiar el punto de vista basta elegirlo en el menú desplegable.


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Día del año: 256
Septiembre 12.6
Gemini
Saturno
Cancer
Leo
Taurus
Aries
Júpit
Venus
rgo
Sol
Sol
Mercurio
Constelaciones
Planetas
Altitud (km)
80
Hora
18
Ver órbitas
Continuar
Vel (días/fg)
1
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Día del año: 256
Septiembre 12.66
Leo
Venus
rgo
Sol
Mercurio
Aries
Júpit
Ver nombres
Fijar la Tierra
Ver órbita
de todos
x
Constelaciones
Planetas
Altitud (km)
80
Hora
18
Ocultar órbitas
Continuar
Vel (días/fg)
1
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Día del año: 256
Septiembre 12.6
Leo
Venus
Sol
Mercurio
Aries
Júpit
Ver nombres
Fijar el Sol
Ver órbita
de todos
x
Constelaciones
Planetas
Altitud (km)
80
Hora
18
Ocultar órbitas
Continuar
Vel (días/fg)
1
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

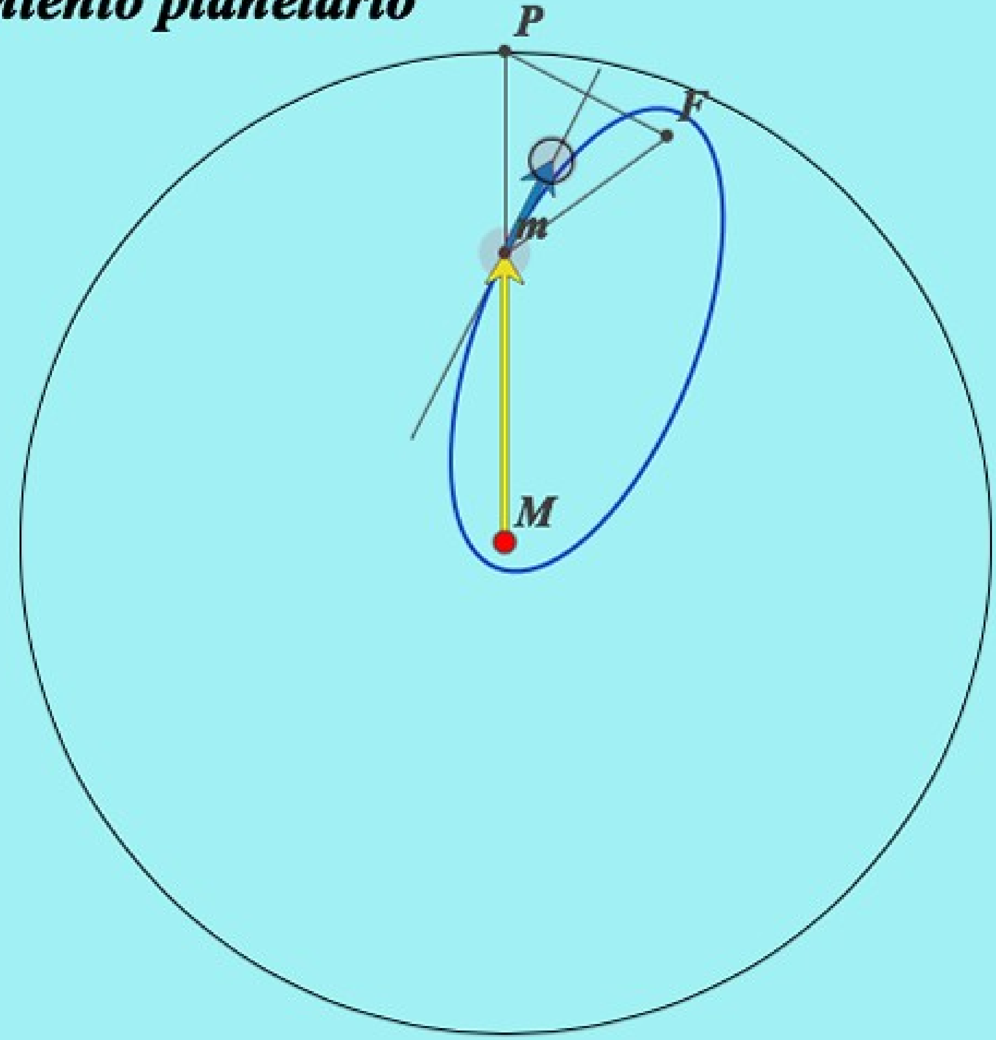
Geometría del movimiento planetario



E
-0.2

Trayectoria
Construcción
Fijar órbita
Ver áreas
Animar

Geometría del movimiento planetario



E

-0.2

Trayectoria

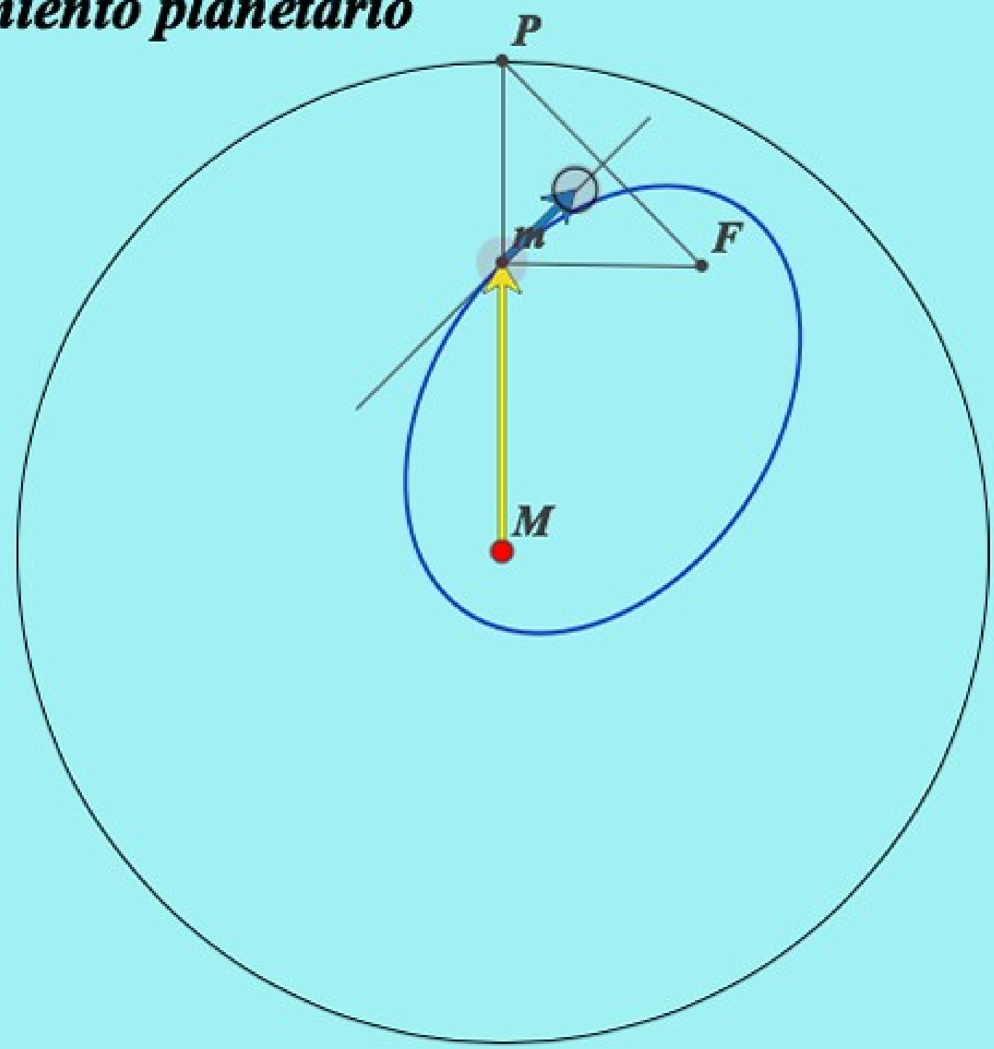
Construcción

Fijar órbita

Ver áreas

Animar

Geometría del movimiento planetario



E

-0.2

Trayectoria

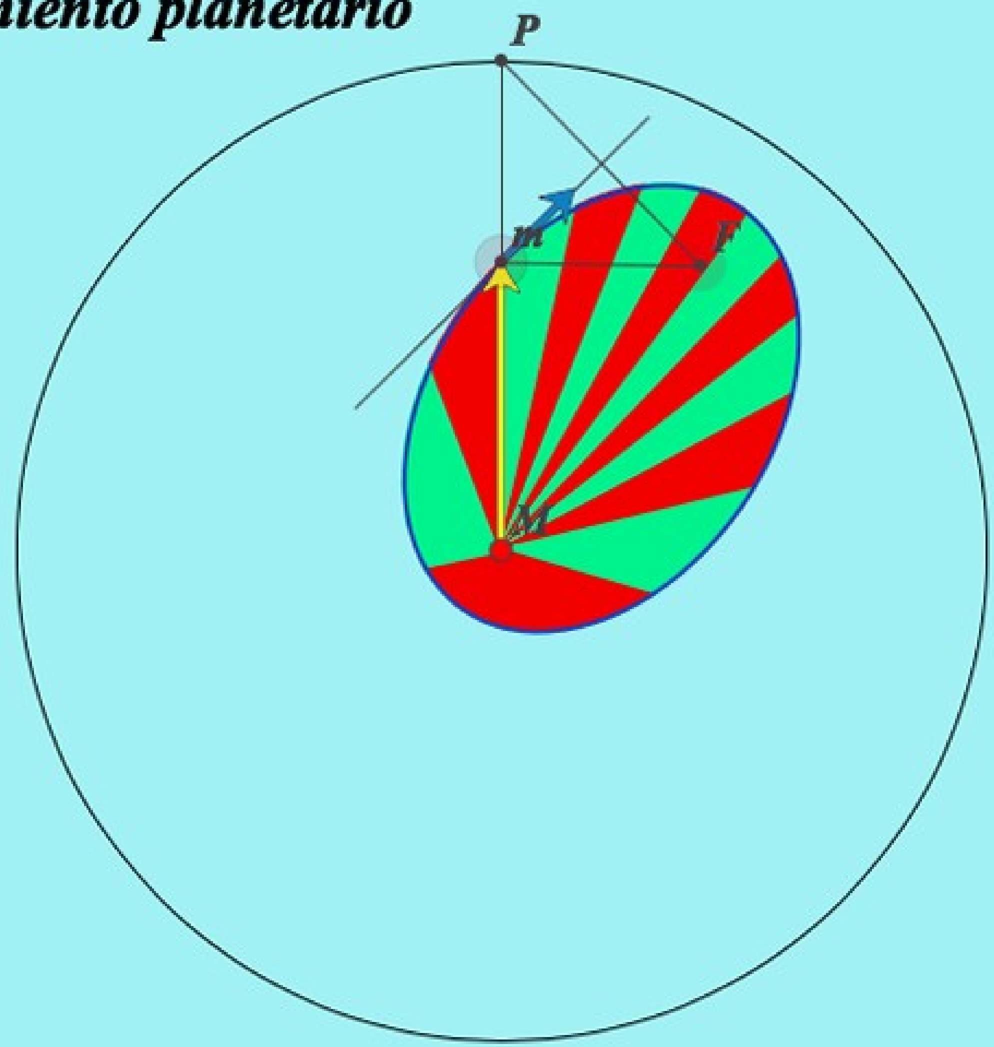
Construcción

Fijar órbita

Ver áreas

Animar

Geometría del movimiento planetario



E
-0.2

Trayectoria

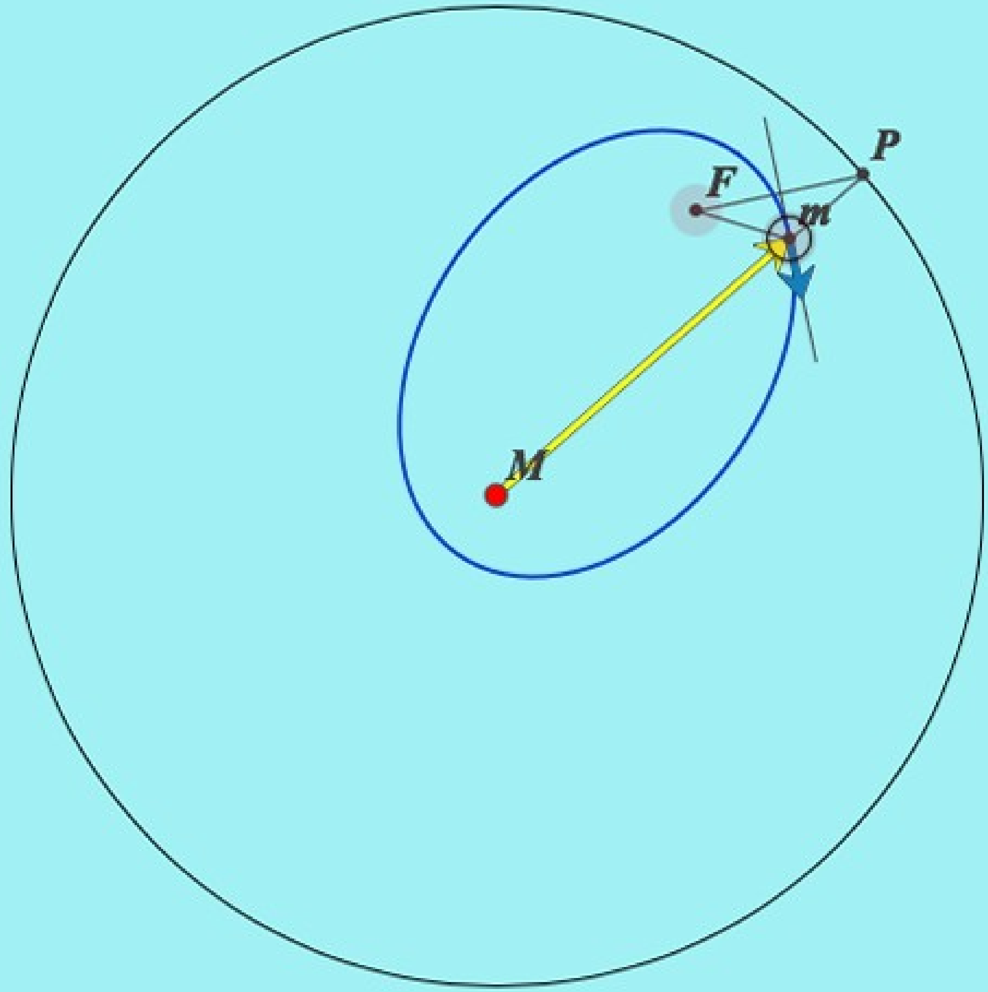
Construcción

Liberar óbita

Ocultar áreas

Animar

Geometría del movimiento planetario



E -0.2

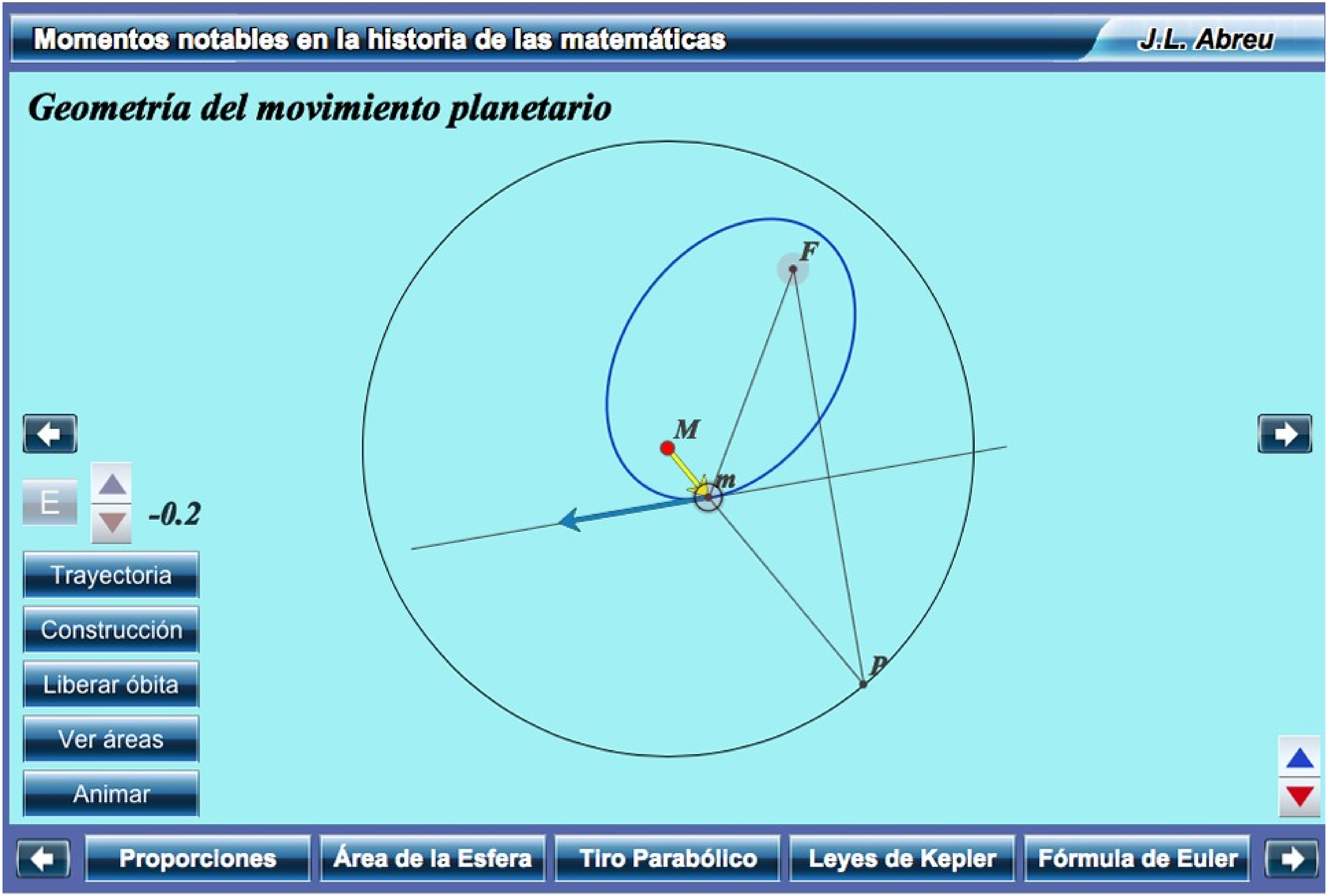
Trayectoria

Construcción

Liberar óbita

Ver áreas

Animar


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
Geometría del movimiento planetario
F
M
m
P
E
-0.2
Trayectoria
Construcción
Liberar óbita
Ver áreas
Animar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

Teorema:

Sean:

$f = |\overline{MF}|$, es decir, la distancia entre los focos de la elipse,

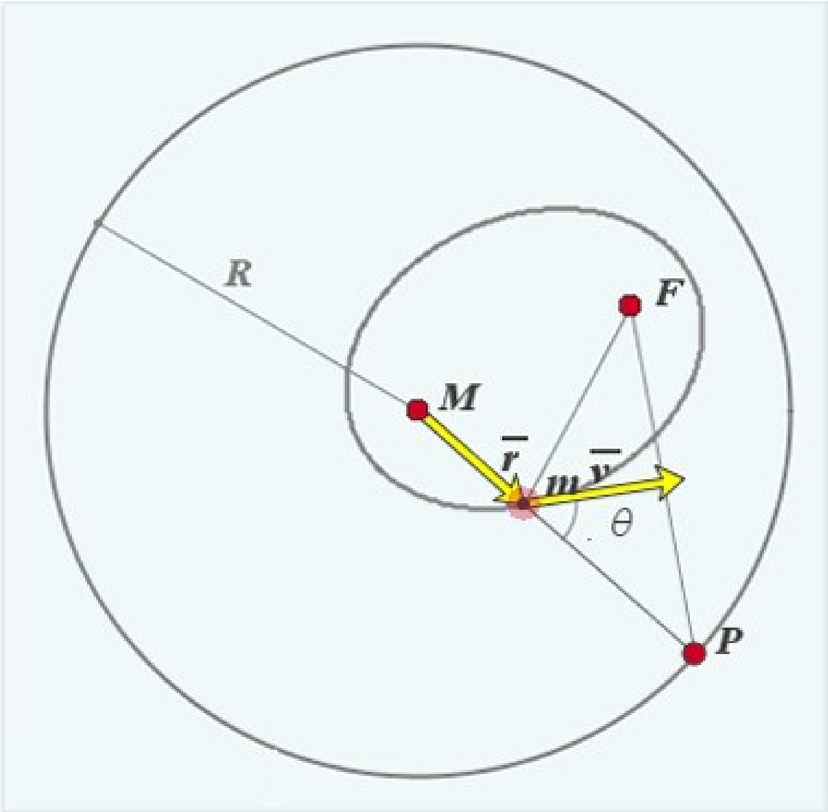
m un punto cualquiera de la elipse,

$\bar{r} = \overline{Mm}$ y $r = |\overline{Mm}|$,

P el punto de intersección de la recta por M y m, con la circunferencia de radio R,

$\bar{q} = \overline{FP}$ y $q = |\overline{FP}|$.

θ el ángulo formado por r y v.



Entonces:

$$q^2 = \frac{(R^2-f^2)(R-r)}{r} \quad (1)$$

y

$$r\, q\, sen\, \theta = \frac{R^2-f^2}{2} \quad (2)$$

Demostración

Es fácil ver que $|\overline{mP}| = |\overline{mF}| = R - r$. Sea θ el ángulo formado por $\bar{r}$ y $\bar{v}$. Entonces:

$$sen\ \theta = \frac{q}{2(R-r)} \qquad (A)$$

Sea φ el ángulo FPM. Usando la ley de los cosenos en el triángulo MPF, cuyos lado son R, q y f, obtenemos:

$$f^2 = R^2 + q^2 - 2Rq\cos\varphi$$

despejando $\cos\varphi$ y observando que es igual a $sen\ \theta$, tenemos que:

$$sen\ \theta = \frac{R^2 + q^2 - f^2}{2Rq} \qquad (B)$$

Combinando (A) con (B), obtenemos:

$$\frac{q}{2(R-r)} = \frac{R^2 + q^2 - f^2}{2Rq}$$

Multiplicando ambos miembros por los denominadores y eliminando el 2, obtenemos:

$$Rq^2 = (R^2 + q^2 - f^2)(R - r)$$

Extrayendo q de la suma,

$$Rq^2 = (R^2 - f^2)(R - r) + q^2(R - r)$$

Pasando el término en q^2 al miembro izquierdo de la igualdad y eliminando términos iguales de signo contrario, obtenemos:

$$rq^2 = (R^2 - f^2)(R - r)$$

Dividiendo ambos miembros por r se obtiene (**1**).

Para demostrar (**2**) multiplicamos (**A**) por $r\,q$ obteniendo:

$$r\,q\,sen\,\theta = \frac{r}{2(R-r)}q^2$$

Sustiyendo el valor de q^2 dado en (**1**), obtenemos las siguientes igualdades:

$$r\,q\,sen\,\theta = \frac{r}{2(R-r)}\,\frac{(R^2-f^2)(R-r)}{r}$$

que al simplificarse (2), lo cual completa la demostración del teorema.

Q.E.D.

Interpretación física

Supongamos que el punto M representa una masa grande y m una pequeña. Sea $\bar{v}$ un vector tangente a la elipse en m, cuya magnitud es proporcional a q, concretamente:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R(R^2-f^2)}}\, q \qquad \text{(C)}$$

Entonces:

$$\frac{m}{2}v^2 = \frac{2GMm}{2R(R^2-f^2)}q^2$$

y sustituyendo q^2 por su expersión dada en (**1**), obtenemos:

$$\frac{m}{2}v^2 = GMm\frac{R-r}{rR} \quad .$$

que puede escribirse como la fórmula de la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{R}$$

Esto demuestra que la trayectoria definida conserva la energía. Por otro lado, el momento angular es claramente perpendicular al plano de la elipse y su magnitud es:

Esto demuestra que la trayectoria definida conserva la energía. Por otro lado, el momento angular es claramente perpendicular al plano de la elipse y su magnitud es:

$$L = m\, r\, v\, sen\ \theta = m\sqrt{\frac{2GM}{R\left(R^2 - f^2\right)}}\, r\, q\, sen\ \theta$$

que, usando (**2**), puede escribirse:

$$L = m\sqrt{\frac{GM\left(R^2 - f^2\right)}{2R}} \qquad (\mathbf{D})$$

lo cual es constante a lo largo de toda la trayectoria y por tanto el movimiento definido conserva también el momento angular. En particular, queda claro que la trayectoria elíptica que construimos geométricamente con la velocidad dada por (**C**), satisface las dos primera leyes de Kepler.

Veremos ahora que la tercera ley de Kepler es una consecuencia de (**2**). El área de la elipse es:

$$A = \frac{\pi R\sqrt{R^2 - f^2}}{4}$$

Usando (**D**) obtenemos que la velocidad es:

$$v_A = \frac{L}{2m} = \sqrt{\frac{GM\left(R^2 - f^2\right)}{8R}}$$

El movimiento definido satisface la segunda ley de Newton

A continuación probaremos que este movimiento también satisface la segunda ley de Newton::

$$\bar{F} = m\,\bar{a} \qquad (\text{F})$$

donde $\bar{F} = -\frac{GMm}{r^3}\,\bar{r}$ y $\bar{a}$ es la aceleración, i.e. $\bar{a} = \frac{d^2}{dt^2}\,\bar{r}$.

La definición vectorial del momento angular es: $\bar{L} = \bar{r} \times m\,\bar{v}$. Por (**L**), la magnitud L de $\bar{L}$ es constante, y como su dirección siempre es perpendicular al plano del movimiento, $\bar{L}$ es constante. Derivando con respecto al tiempo obtenemos que $\bar{r} \times \bar{a} = 0$, ya que $\bar{v} \times \bar{v} = 0$. Esto implica que $\bar{a}$ es paralelo a $\bar{r}$ y por lo tanto $\bar{F}$ y $\bar{a}$ son paralelos.

Recordando que E es constante y derivando (**E**) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$0 = m\,\bar{v}\cdot\bar{a} - \frac{GMm}{r^3}\,\bar{r}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\left(m\,\bar{a} - \frac{GMm}{r^3}\,\bar{r}\right) = \bar{v}\cdot\left(m\,\bar{a} - \bar{F}\right)$$

Esto demuestra que $\bar{F} = m\,\bar{a}$, excepto cuando ambos vectores son perpendiculares a $\bar{v}$, lo cual ocurre solo en dos puntos de una trayectoria elíptica no circular. Como $\bar{F}$ y $\bar{a}$ son funciones continuas y son iguales, excepto posiblemente en dos puntos, resulta que también deben ser iguales en esos puntos, es decir, son iguales a lo largo de toda la trayectoria. Esto demuestra (**F**) para trayectorias no circulares.

Recordando que E es constante y derivando (**E**) con respecto al tiempo, obtenemos:

$$0 = m\,\bar{v}\cdot\bar{a} \;-\; \frac{GMm}{r^3}\,\bar{r}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\left(m\,\bar{a} \;-\; \frac{GMm}{r^3}\,\bar{r}\right) = \bar{v}\cdot\left(m\,\bar{a} \;-\; \bar{F}\right)$$

Esto demuestra que $\bar{F} = m\,\bar{a}$, excepto cuando ambos vectores son perpendiculares a $\bar{v}$, lo cual ocurre solo en dos puntos de una trayectoria elíptica no circular. Como $\bar{F}$ y $\bar{a}$ son funciones continuas y son iguales, excepto posiblemente en dos puntos, resulta que también deben ser iguales en esos puntos, es decir, son iguales a lo largo de toda la trayectoria. Esto demuestra (**F**) para trayectorias no circulares.

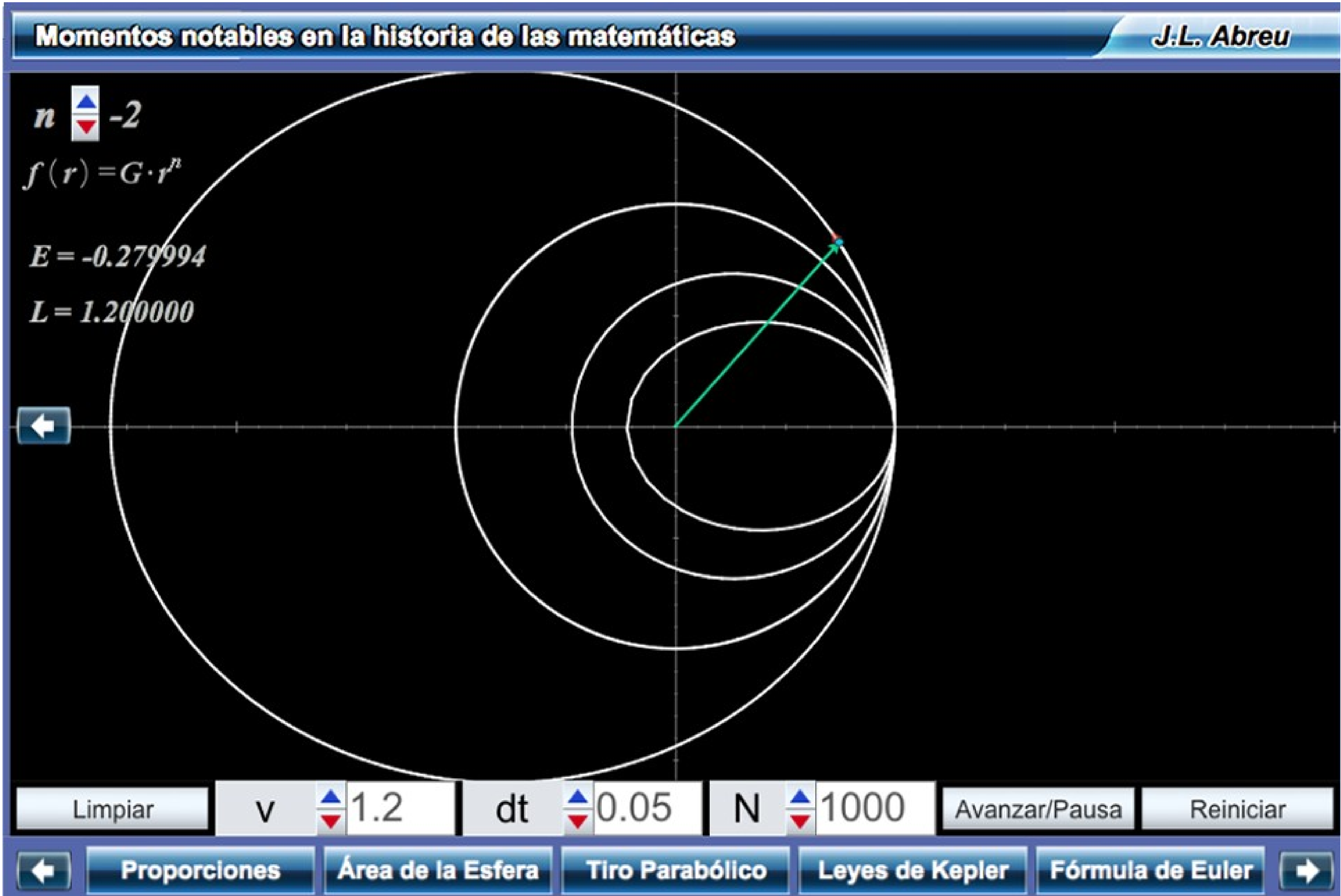
En caso de que la trayectoria sea circular, el argumento anterior no es válido. Para completar el argumento recurrimos a la definición (**D**) de v. En este caso la distancia entre los focos $f=0$, $q = R$ y la distancia de m al origen $r = \dfrac{R}{2}$. Sustituyendo en (**D**) y elevando al cuadrado obtenemos:

$$v^2 = \frac{2GM}{R^3}\,q^2 = \frac{2GM}{R} = \frac{GM}{r}.$$

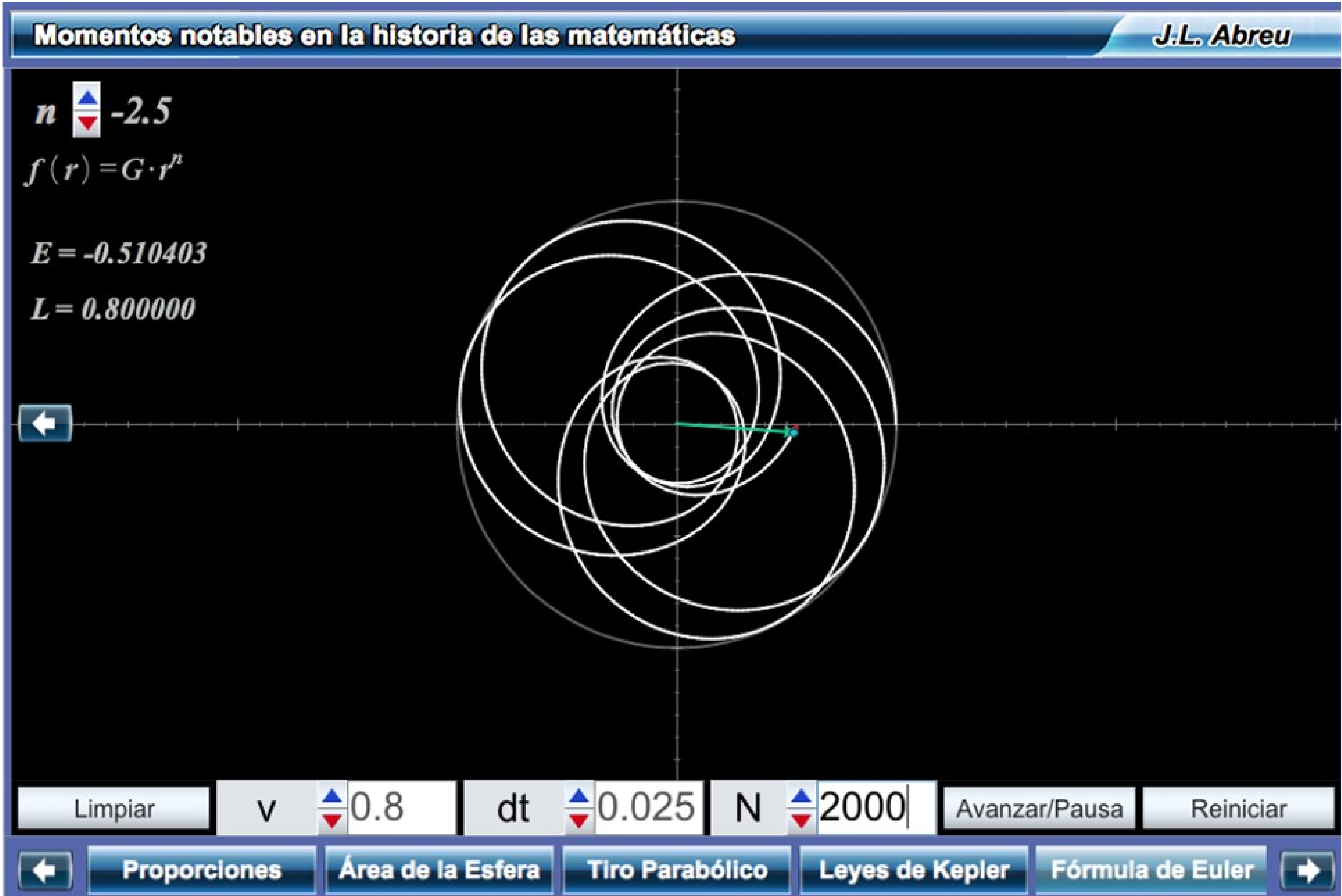
La aceleración centrípeta del movimiento circular uniforme es $a = \dfrac{v^2}{r}$, por lo tanto:

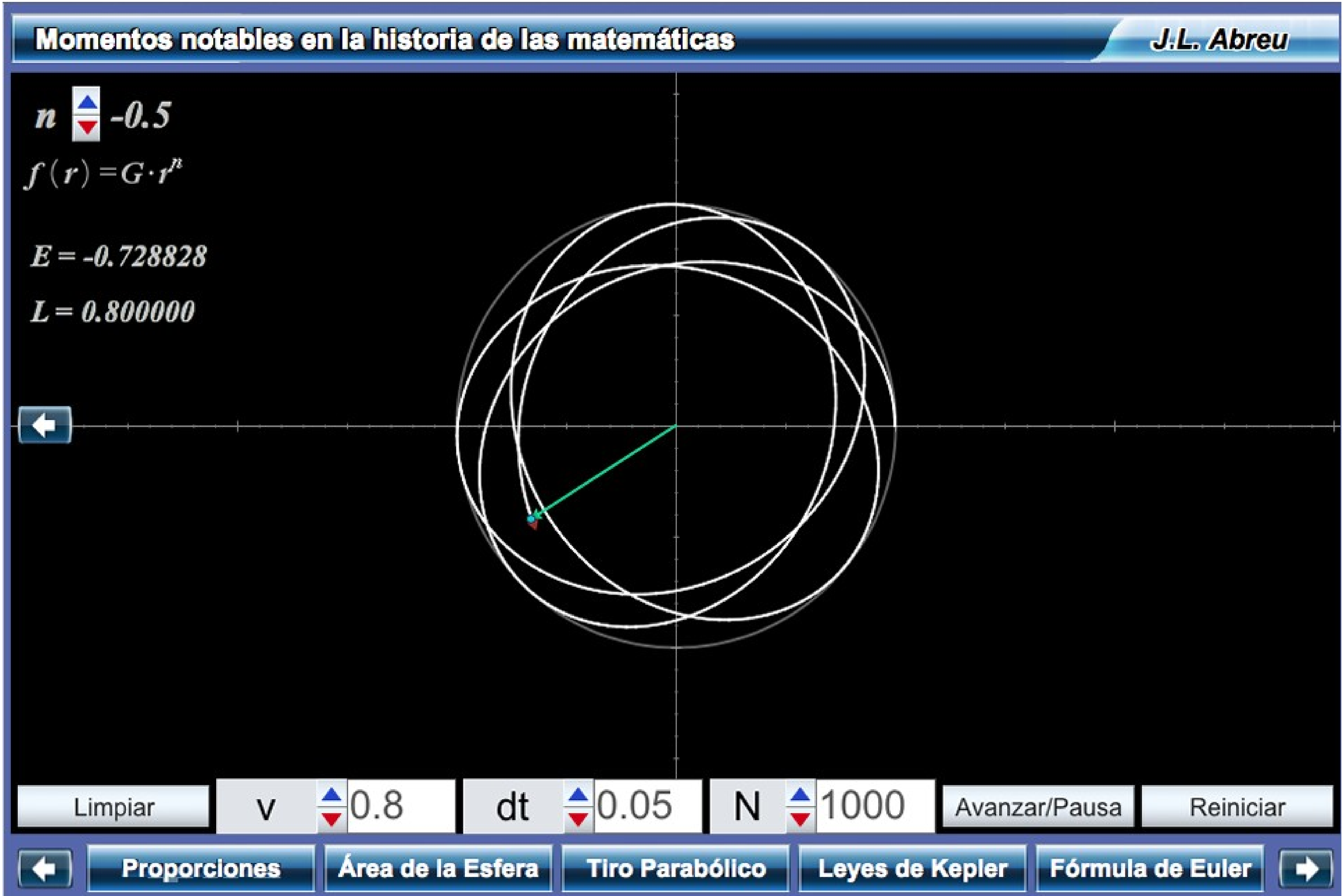
$$m\,a = m\frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} = F$$

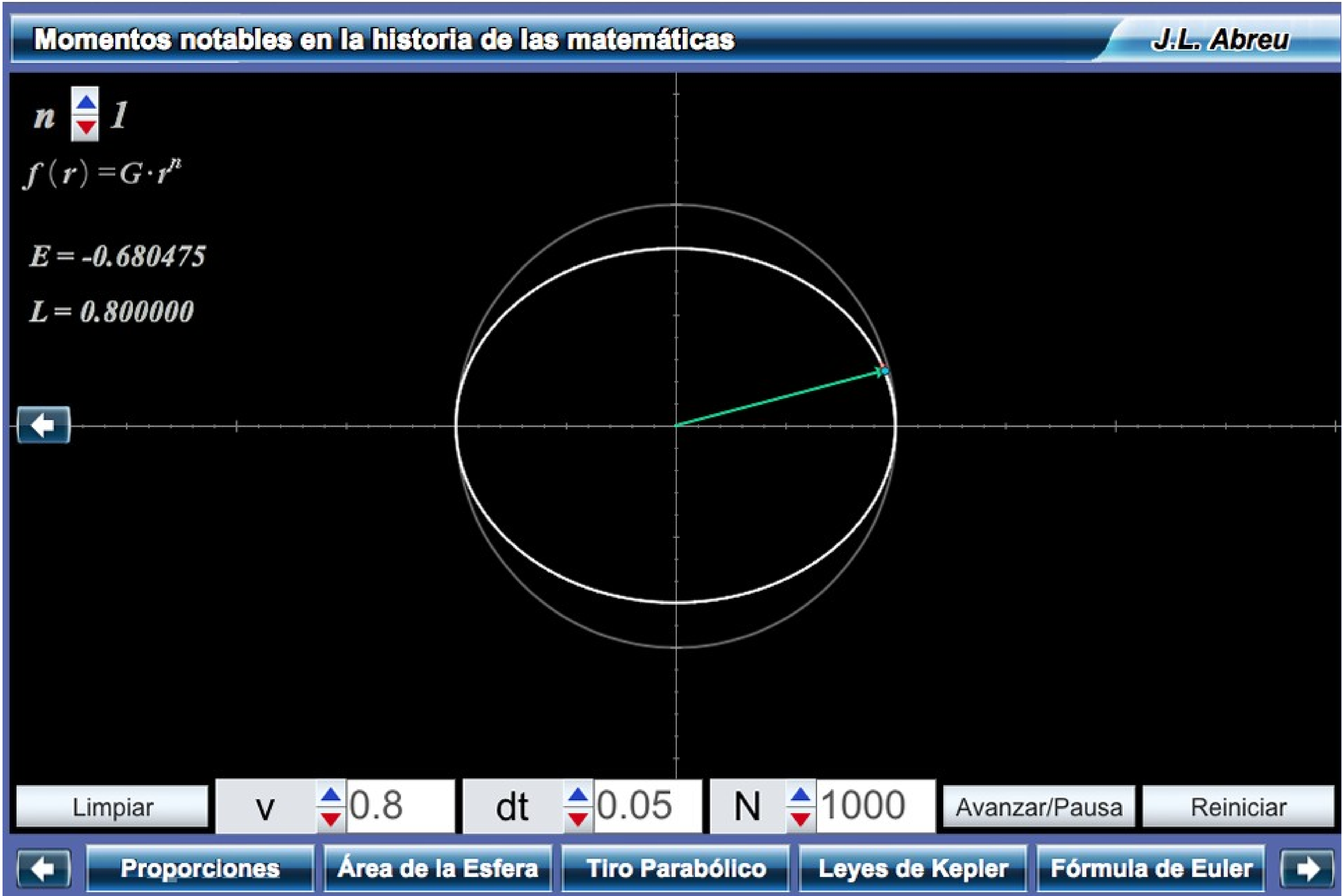
lo cual que demuestra que (**F**) se cumple también en el caso de una trayectoria es circular.


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n -2
f(r) = G·r^n
E = -0.279994
L = 1.200000
Limpiar
v 1.2
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n -2.5
f(r) = G·r^n
E = -0.679998
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.025
N 2000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n -2.5
$f(r) = G \cdot r^n$
E = -0.510403
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.025
N 2000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n -0.5
$f(r) = G \cdot r^n$
E = -0.728828
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n 1
f(r)=G·r^n
E = -0.680475
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n 4.5
f(r) = G·r^n
E = -0.720517
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n 20
$f(r) = G \cdot r^n$
E = -0.680346
L = 0.800000
Limpiar
v 0.8
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler


Momentos notables en la historia de las matemáticas
J.L. Abreu
n 20
f(r) = G·r^n
E = -0.862117
L = 0.600000
Limpiar
v 0.6
dt 0.05
N 1000
Avanzar/Pausa
Reiniciar
Proporciones
Área de la Esfera
Tiro Parabólico
Leyes de Kepler
Fórmula de Euler

Se dice que ésta:

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

es la fórmula más bella de las matemáticas.

La identidad de Euler

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

es consecuencia directa de la llamada fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

que todos conocemos de la teoría de las funciones complejas.

Pero, ¿la fórmula de Euler es un *teorema* o una *definición*?

Leonhard Euler obtuvo la fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

a partir de su definición de

$$e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!}$$

y de las expansiones en series de Taylor del seno y el coseno, con las cuales prueba que

$$e^{z} = \cos z + i\,\mathrm{sen}\,z$$

Pero ¿porqué define así e^{z}?

En parte porque sabe que

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} \quad \text{para } x \text{ real.}$$

Pero la serie de potencias define una función analítica

$$exp(z)$$

¿Que nos da derecho a decir que $exp(z) = e^z$?

¿ No hay acaso otra defininción de exponenciación compleja?

¿No hay otra manera más elemental, más algebraica de definir z^w para cualquier par de números complejos z y w ?

En realidad sí la hay.

Construyamos una función $f: C \times C \to C$ tal que:

1. $f(z,w_1+w_2)=f(z,w_1)\cdot f(z,w_2) \quad \forall \; z, w_1, w_2 \in C$
2. $f(z,1)=z \quad \forall \; z \in C$
3. $f(x,y)=x^y \quad \forall \; x>0 \;\; y \;\; \forall \, y \; real$

Suponemos que $w=u+iv$ con u, v reales, y definimos $f(z,w)$ en coordenadas polares, i.e. su magnitud y argumento:

$$ln\,|f(z,w)|=ln(\,|z|\,)\;u - b\;arg(z)\;v$$
$$arg(f(z,w))=b\;arg(z)\;u+ln|z|\;v$$

donde b es un número real arbitrario. Es fácil ver que esta función satisface las tres condiciones 1, 2 y 3.

Usamos entonces f(z,w) para definir z^w , es decir:

$$ln\,|z^w| = ln(\,|z|\,)\;u - b\;arg(\,z\,)\;v$$

$$arg(\,z^w\,) = b\;arg(\,z\,)\;u + ln|z|\;v$$

Esta definición nos lleva a la fórmula de Euler si sólo si $b = 1$, en general nos lleva a:

$$e^{i\theta} = cos\;b\theta\; + \;i\;sen\;b\theta$$

¿Algo que nos lleva a $b = 1$ aparte de la simple sencillez y de que queremos que se cumpla la fórmula de Euler?

Sí, queremos que se cumpla la regla de derivación:

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i\, e^{i\theta}$$

Pero

$$e^{i\theta} = cos\ b\theta\ +\ i\ sen\ b\theta$$

la satisface si y sólo si $b = 1$.

En resumen, sí hay una manera algebraica de extender la la exponencial real a los complejos, pero para que sea única es necesrio pedir algo más. Para llegar a la fórmula de Euler pedimos que la extensión sea derivable i.e. que sea holomorfa y por lo tanto que sea analítica... ¿Definición o teorema?