

# Geometría Visual

las matemáticas que surgen  
de cómo vemos al mundo

(Versión preliminar)

José Luis Abreu y Javier Bracho

29 de mayo de 2023

# Introducción

Una proporción considerable de nuestro cerebro se dedica a crear esa nítida idea que tenemos —y de la que dependemos— de un mundo exterior tridimensional fijo en el que transcurrimos y deambulamos. Una buena parte de esas neuronas procesan información visual y el resto la asocian con otro tipo de estímulos sensoriales o de vivencias previas. ¿Cómo le hacen? A eso nos referimos con la pregunta ¿cómo vemos al mundo? No es ¿cómo vemos el mundo? para pasar a describir algún aspecto de él como algo externo y objetivo, sino ¿cómo es que logramos hacernos una idea tan bien armada y sólida, aquí dentro de esta cabecita, de todo lo que está allá afuera en nuestro derredor y cómo es que lo acomodamos en un espacio tridimensional del que siempre somos su centro? Qué procesos ha diseñado la evolución para que tengamos ese vital y preciso entendimiento geométrico de nuestro entorno a partir de información puntual (los estímulos que detectamos y procesamos). De ese análisis, surgen matemáticas y presentarlas

es nuestro objetivo.

Dos elementos básicos para entender cómo vemos al mundo son: la perspectiva y el movimiento.

La perspectiva, que desarrollaron y llegaron a dominar con maestría los pintores renacentistas, demuestra cómo una imagen bidimensional *bien hecha* genera la idea de una escena tridimensional. Nuestros ojos producen dos de esas imágenes, y el cerebro, valiéndose de sus diferencias, deduce la tridimensionalidad cercana; y para la lejana, en la cual esas dos imágenes se vuelven indistinguibles, su movimiento —cómo cambian en el tiempo— y, por supuesto, relacionarlas con la experiencia previa, es lo que aporta la información extra necesaria para situarnos en un espacio tridimensional.

La perspectiva renacentista dió lugar a la Geometría Proyectiva. Nos propusimos tratar de hacerla más accesible a estudiantes y maestros de bachillerato y de ese esfuerzo surge este libro. Quisimos ilustrar los razonamientos con figuras dinámicas, y desarrollamos el programa *ProGeo3D* (acrónimo de “*Projective Geometry 3D*”) para ese propósito. Entonces, nos sorprendimos con que las virtudes di-

námicas de las figuras daban pie a una visión muy distinta de la que tuvieron las generaciones pasadas, y tanto en el itinerario temático como en el estilo de presentación. Así que en el título *Geometría Visual*<sup>1</sup> caben dos acepciones. Por un lado, la geometría que surge para entender, y por hacer énfasis en, lo visual. Y por el otro, cómo se le presenta: con ese fuerte apoyo gráfico para ilustrar los razonamientos que permite “verlos” y que ha sido tan apreciado en la enseñanza clásica de la geometría.

Así que en este libro (si aún se le puede llamar así, pero lo hacemos en su sentido más emblemático), las construcciones retoman un papel protagónico como unidad de expresión matemática. Pero ahora, como son construcciones dinámicas y forman parte integral de una exposición didáctica escrita, las llamaremos *Escenas*. Éstas están basadas en una construcción clásica, es decir, en una secuencia de operaciones geométricas —en un algo-

---

<sup>1</sup>Esta manera de referirse al área, aparece en el artículo *The horizon* de John Stillwell, [9], que fue una gran inspiración para nuestro trabajo.

ritmo que produce una figura— pero ahora, y gracias a la computadora que las transmite a una pantalla, tienen dinamismo en al menos tres sentidos.

Primero, como figuras de un libro se presentan en *pasos*, que son etapas acumulativas de la construcción. Ayudan así a entenderla y permiten hablar de ella en diferentes momentos o desde diversos ángulos. Al transcurrir una escena, el texto correspondiente a pasos futuros se mantiene en un color más tenue. El cambio de paso se da como un cambio de página; típicamente, tiene el efecto de resaltar el siguiente párrafo del texto y agregar elementos a la figura. Y cuando se tiene que cambiar de página sin que haya concluido aún la escena, la ventana en la que se está desplegando se mantiene en la misma posición en la pantalla: la hoja escrita cambia, pero no la figura.

Segundo, en ciertos pasos, las figuras son *dinámicas* (como en los ya clásicos programas de *geometría dinámica*), en el sentido interactivo de que los puntos de los cuales depende la construcción (y la figura en la pantalla) se pueden mover a voluntad del lector; a esto lo llamaremos *explorar* la es-

cena en un paso dado. En ciertas escenas, como las que ilustran métodos de la perspectiva, la exploración en sí juega un papel protagónico para convertirse en un objeto de interés propio, pues se liga íntimamente a los *movimientos* que son un tema matemático importante. Tan es así, que se convierte en el eje temático que hila la Parte II.

Y tercero, en cualquier momento de una escena en estado de exploración (y todas las escenas tienen al menos un paso en el que ésta se habilita), el lector (o usuario) puede involucrarse en la construcción dentro del programa con que se creó originalmente: *ProGeo3D*. Puede cambiarla, rearmarla o proseguir más allá en ella. Es decir, puede *trabajarla*. Esto es particularmente importante, pues desde siempre los textos matemáticos se leen con otro ritmo que los literarios; no se leen de corrido, sino que exigen pausas para que el lector reconsidere, sopesa, critique y profundice en lo que se está planteando. Esta posibilidad de revisar a fondo las construcciones para rehacerlas, cambiarlas o deshacerlas y mejorarlas —dejar que se adueñen de toda la pantalla y de nuestra atención— ayuda

en ese sentido introspectivo. Da mucho sobre lo cual rumiar o, como decimos los matemáticos, *trabajar*; aunque en lo más hondo de nuestro ser, sabemos que lo que hacemos es *jugar*.

El libro está dividido en tres Partes. La primera retoma la motivación básica de los pintores renacentistas para explicar la perspectiva. Al mismo tiempo, introduce al lector-usuario a *ProGeo3D*: sus particularidades resultan importantes para entender a, y trabajar con, el Plano Proyectivo. Tenerlo ahí en la pantalla, contundente y lógico, trabajar con sus herramientas específicas y jugar con sus posibilidades ayuda, en su momento, a aceptar las definiciones básicas de la Geometría Proyectiva y a entender la demostración de sus teoremas fundamentales, que es con lo que concluye esta parte. Desde muy al principio, se introduce el concepto de armonía —y la herramienta constructiva correspondiente— que es central para nuestro tratamiento de la materia.

En la Parte II, se abordan los movimientos. Se establece el marco teórico mínimo de Teoría de Grupos para describir el sustento del *Programa de*

*Erlangen* de Felix Klein, en el cual, a finales del siglo XIX, se observa que dentro del Plano Proyectivo hay modelos de las tres geometrías planas que recién se estaban aceptando como válidas. En esto, el papel que juegan las curvas cónicas es crucial; pero como aquí las definimos con base en la armonía (definición original), las llamamos curvas armónicas. De nuevo, se concluye esta parte con la demostración de los teoremas que sustentan nuestro tratamiento basado en las curvas cónicas, o armónicas, y de los teoremas clásicos sobre ellas.

En la Parte III, se amplía el espectro teórico de la Geometría Proyectiva al que da un conjunto de axiomas de incidencia abstractos. Aparecen las geometrías finitas que han tenido importantes aplicaciones recientes; se retoma el enfoque clásico de estudiar las proyectividades con un lenguaje moderno, y se demuestra el Teorema de Aritmetización: cómo es que unos simples y elegantes axiomas geométricos dan lugar a demostraciones de todos los axiomas algebraicos (ahora como teoremas) que tienen que cumplirse, ver [9].

En términos históricos, la Parte I abarca hasta

principios del siglo XIX; su héroe matemático principal es Girard Desargues. La Parte II corresponde al siglo XIX y sus personajes centrales serían Felix Klein, Christian von Staudt y Germinal Dandelin. La Parte III corresponde a la visión del siglo XX, se vislumbra la influencia de áreas como Teoría de Matroides, Geometría Discreta y Teoría de Categorías, cuyos personajes centrales serían demasiados para enumerar; indica la influencia precoz que ha tenido la Geometría Proyectiva en éstas áreas y en otras como la Topología.

En términos de nivel, esperamos que la Parte I sea de cultura general o bien, de bachillerato; la II, de principios de licenciatura y la III ya es para nivel más avanzado. De cualquier manera, esperamos que los maestros de matemáticas de todos los niveles se beneficien de esta visión de la Geometría Proyectiva; y que este trabajo coadyuve a integrarla a diversos niveles de enseñanza.

**Agradecimientos.** Debemos agradecer el invaluable apoyo técnico y altamente especializado para la elaboración y el diseño de este libro, que generosamente nos han proporcionado Joel Espino-

sa, Alejandro Radillo y Pablo Rosell del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Asimismo, agradecemos a Elías Mochán y Daniel González Casanova sus certeras sugerencias matemáticas para mejorarlo, que brotaron al experimentar su uso en cursos que dimos juntos en la Facultad de Ciencias de la UNAM.

También queremos agradecer a los maestros y maestras de los diversos sistemas de la UNAM con los que trabajamos en el SUMEM (Seminario Universitario para la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas) y que nos motivaron profundamente para emprender este proyecto.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Perspectiva, armonía y horizontes</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Perspectiva y armonía</b>	<b>7</b>
1.1	Cuadrículas en perspectiva y cuartetos armónicos . . . . .	9
1.1.1	Horizonte y puntos de fuga . . . . .	9
1.1.2	Cuadrículas y armonía . . . . .	13
1.2	Subdivisión y puntos ideales . . . . .	21
1.2.1	Un rosetón y decoraciones . . . . .	21
1.2.2	Retículas triangulares y coincidencias . . . . .	26
1.2.3	El Teorema de Desargues experimental . . . . .	33
1.3	La herramienta armonía y nombres en el horizonte . . . . .	35

1.3.1	El cuarto armónico . . . . .	35
1.3.2	Sucesiones Armónicas . . . . .	39
1.3.3	Nombres para puntos de fuga . . . . .	41
1.4	Las recetas de Alberti . . . . .	45
1.4.1	Planos y horizontes . . . . .	48
1.5	Cubo en perspectiva . . . . .	51
1.5.1	Configuraciones de Ceva y Menelao . . . . .	54
<b>2</b>	<b>Geometría Proyectiva</b>	<b>58</b>
2.1	Definición, Principios de Incidencia y proyecciones . . . . .	60
2.1.1	El Espacio Euclidiano . . . . .	60
2.1.2	El Espacio Desarguesiano y sus Principios de Incidencia . . . . .	61
2.1.3	Proyecciones . . . . .	65
2.1.3.1	El otro lado del horizonte . . . . .	68
2.2	Teoremas fundamentales . . . . .	72
2.2.1	Teorema de Desargues y dualidad . . . . .	72
2.2.1.1	Prueba en el plano, cine-3D y dualidad . . . . .	78
2.2.2	Operaciones y Armonía . . . . .	84
2.2.2.1	Teorema Armónico . . . . .	86
2.2.2.2	Propiedades básicas de la armonía . . . . .	89
2.2.2.3	Armonía de líneas . . . . .	92
2.2.3	Armonía de Ceva y Menelao . . . . .	96
2.3	La topología del Plano Proyectivo . . . . .	98

2.3.1	El cuadrángulo extendido . . . . .	98
2.3.1.1	La configuración 13-13 . . . . .	102
2.3.2	La esfera identificando antípodas . . . . .	105
2.3.3	Coordenadas homogéneas y algo de historia . . . . .	110

## **II Movimientos, curvas armónicas y polaridad 112**

### **3 Movimientos, curvas de armonía y grupos 117**

3.1	Movimientos proyectivos y transformaciones . . . . .	119
3.1.1	Nota histórica . . . . .	123
3.2	Movimientos afines, traslaciones y movimientos rígidos . . . . .	125
3.2.1	Rotaciones en perspectiva . . . . .	127
3.3	Curvas y haces de armonía . . . . .	130
3.3.1	Curvas de armonía y cónicas . . . . .	134
3.4	Reflexiones armónicas . . . . .	139
3.4.1	Definición . . . . .	139
3.4.2	Lema del Triángulo de Klein . . . . .	143
3.4.2.1	Dualidad curvas-haces . . . . .	146
3.4.3	Las simetrías de una loseta . . . . .	148
3.5	Grupos de transformaciones . . . . .	152
3.5.1	La línea real y el círculo . . . . .	156
3.5.2	Colineaciones y proyectividades . . . . .	161

<b>4</b>	<b>Geometrías planas y polaridad</b>	<b>164</b>
4.1	Geometría euclidiana . . . . .	166
4.1.1	Perpendiculares y círculos . . . . .	167
4.1.2	Traslaciones y rotaciones . . . . .	174
4.1.3	Mediatrices, bisectrices y rayos . . . . .	179
4.2	Polaridad . . . . .	184
4.2.1	La construcción-A . . . . .	184
4.2.2	Teorema de Polaridad de Poncelet-von Staudt . . . . .	187
4.3	Geometría hiperbólica . . . . .	194
4.3.1	El plano y el grupo . . . . .	195
4.3.2	Homogeneidad y subgrupos . . . . .	197
4.3.3	Movimientos hiperbólicos . . . . .	205
4.3.4	Dos teoremas acerca de $\mathcal{P}roy_1$ . . . . .	207
4.3.5	La unicidad y sus implicaciones . . . . .	211
4.4	Geometría esférica . . . . .	214
4.4.1	Polaridades euclidianas en el Plano Desarguesiano . . . . .	214
4.4.2	El plano proyectivo rígido . . . . .	217
<b>5</b>	<b>Superficies regladas y polaridad</b>	<b>224</b>
5.1	Superficies regladas . . . . .	224
5.1.1	Reglados . . . . .	225
5.1.2	Construcción de Hilbert-Cohn Vossen . . . . .	226
5.1.3	Axioma del Equipal . . . . .	228

5.1.4	Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes . . . . .	231
5.2	Teoremas de Polaridad . . . . .	233
5.2.1	Polaridad en superficies regladas . . . . .	233
5.2.2	Preservación de la incidencia . . . . .	240
5.2.3	Polaridad en curvas armónicas . . . . .	245
5.3	Teoremas clásicos . . . . .	248
5.3.1	La configuración de Dandelin . . . . .	249
5.3.2	El Teorema de Pascal . . . . .	252
	5.3.2.1 La cónica por cinco puntos . . . . .	255
5.3.3	El Teorema de Pappus . . . . .	258
	5.3.3.1 El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal . . . . .	261

**Bibliografía**

**264**

Parte I

Perspectiva, armonía y horizontes

Como es bien sabido y su nombre lo indica, la geometría surge de la necesidad de medir la tierra en pequeñas porciones y se sustenta, junto con la arquitectura, en la necesidad de entender, modelar, controlar y construir nuestro entorno inmediato. Pero ha evolucionado muchísimo. Y en esa forma de evolucionar que tienen las matemáticas: más que cambiar, van acumulando; pues las primeras observaciones que se hicieron siguen siendo válidas y pertinentes (lo que es un cuadrado, por ejemplo, o el Teorema de Pitágoras). En esa evolución de la geometría que se expresa hoy como ramas diversas de un frondoso árbol, se incluyen abstracciones geométricas que influyen profundamente en nuestro entendimiento del mundo. Baste señalar el trabajo de Albert Einstein empezando el siglo XX que modela la estructura gravitacional del universo y condujo, entre otras muchas cosas, a predecir la existencia de los hoyos negros que recién estamos aprendiendo a observar en el siglo XXI. Pero además, éstas “ramas o abstracciones geométricas” no son las últimas —la evolución de las matemáticas no se detiene— las mencionamos

porque son de las pocas que tienen resonancia en la cultura científica general.

Se puede decir, de manera simplista pero también con cierto tino, que *la geometría evolucionó de lo rígido a lo flexible*. Lo que hoy llamamos *Topología* es una geometría que acabó de establecerse a principios del siglo XX —a la par de la Relatividad en la Física— y que trata de las propiedades continuas; sus objetos de estudio son elásticos más que rígidos: de no ser tan abstractos, serían más de hule o arcilla que de piedra o madera, más líquidos que sólidos. En un sentido cualitativo, es una geometría más “elemental” que la geometría clásica en la que todo se expresa o deduce de distancias y ángulos. Pero en términos históricos aparece mucho después, pues expresar matemáticamente esa noción “elemental” de continuidad requiere de mucha más sofisticación que la simple medición de distancias.

En ese proceso de flexibilización de la geometría que, a muy grandes rasgos, condujo desde la Geometría Euclidiana hasta la Topología, la Geometría Proyectiva jugó un papel protagónico muy

especial. Siendo una extensión natural de la Geometría Euclidiana, es mucho más elástica que ella, y aunque no lo es tanto como la Topología, la presagia e ilustra en muchos sentidos; pero además, tiene el encanto de que aparecieron en su seno las otras geometrías planas rígidas, la Hiperbólica y la Elíptica (o esférica) que habían brotado por otras motivaciones matemáticas. Y, por si fuera poco, tiene una cuna de rancio abolengo cultural: germina en la creatividad de los pintores y arquitectos del renacimiento.

Ellos se preguntaron ¿cómo vemos al mundo? en su sentido perceptivo. No como algo externo que hay que describir, sino ¿cómo lo hacemos? qué procesos internos nos permiten formarnos esa idea tan nítida del espacio tridimensional que habitamos. Y llegaron a la conclusión de que para plasmar en sus cuadros (bidimensionales) escenas tridimensionales de manera realista, lo mejor era componer (situar en un lienzo a los diversos elementos de la escena) según el *principio de proyección*: de aquí viene el nombre de la *Geometría Proyectiva*. Y la razón profunda es que nuestro ce-

rebro está cableado para interpretar justo ese tipo de imágenes, pues cada uno de nuestros ojos usa ese mismo principio: deja pasar rayos de luz por un pequeño orificio (la pupila) y transmite al cerebro la imagen que se crea (una *proyección*) en la retina —para simular, experimentar y entender mejor este principio, se popularizó la *cámara oscura* en aquella época.

Lo que les interesaba a los pintores renacentistas no era la teoría, sino recetas prácticas y constructivas para componer sus cuadros. Sus herramientas eran la regla y el compás y descubrieron que había unos puntos y unas líneas (los *puntos de fuga* y los *horizontes*) que, aunque no se vieran en la escena, aunque no fueran reales, servían de base o *andamio constructivo* para la composición correcta, o con *buena perspectiva*.

El libro que mejor documenta la revolución pictórica renacentista es *Della pittura*, [2]. En él, su autor Leone Battista Alberti (1404-1472) empieza por precisar ¿qué es pintar? para pasar a explicar —con pasión y en lenguaje vernáculo, cuando lo usual era aún escribir en latín— los métodos básicos de

la perspectiva que habían desarrollado su maestro Filippo Brunelleschi (1377-1446), y los creativos arquitectos y pintores que brillaron en la Florencia del siglo XV.

Entre los pintores renacentistas que se encumbraron con el uso de esos métodos, los refinaron y los llevaron a la exquisitez, destacan el también florentino Leonardo (1452-1519) y el alemán Dürero (1471-1528); pero hasta la fecha, los arquitectos y los pintores realistas los siguen usando para presentar sus proyectos o componer sus cuadros con “buena perspectiva” —o “tan cercanos a la fotografía como es posible”, podríamos precisar hoy día.

Dichos métodos tienen como fundamento a la geometría euclidiana, así que en su libro, Alberti recurre a la autoridad intelectual de “los matemáticos” para zanjar, y en ocasiones esquivar, oscuras discusiones respecto a los porqués de las recetas que propone. Y esa reticencia es natural pues al exponer los argumentos, surgen problemas filosóficos serios que ponen en duda la concepción común de lo que es la geometría. En particular, es ineludible mencionar el *infinito* —y en ese enton-

ces ni los matemáticos se sentían seguros pisando ese resbaloso terreno—, o bien, a veces parece que se está cuestionando el Postulado de las Paralelas de Euclides —aún “sacrosanto” en aquella época. En fin, el texto deja entrever que el fuerte —o el interés— de Alberti no es la argumentación precisa y deductiva. Y entonces, como sucede mucho en la enseñanza de las matemáticas, opta por dar recetas y aleccionar en procedimientos que funcionan bien, más que por intentar aclarar los razonamientos en que tales recetas se apoyan.

Tuvieron que pasar dos siglos más para que un matemático, el francés Girard Desargues (1591-1661), agarrara ese toro —el de la argumentación sistemática y formal de la perspectiva— por los cuernos. Se le considera el padre de la Geometría Proyectiva pues, además del teorema seminal que lleva su nombre, se atreve a ampliar, en abstracto, el Espacio Euclidiano para que los horizontes y los puntos de fuga se pudieran incorporar con plenos derechos a la teoría geométrica. Llamaremos a ese espacio extendido el *Espacio Desarguesiano*. Pero sucedió que su trabajo no tuvo eco inmediato en-

tre los matemáticos —y aún hoy día, no alcanza la presencia que le corresponde en la cultura científica general: los “puntos de fuga” y los “horizontes” siguen siendo considerados como argucias técnicas de los dibujantes en lugar de entes matemáticos auténticos, que es lo que realmente son.

Y tuvieron que transcurrir otros dos siglos para que las ideas de Girard Desargues recibieran la atención de sus colegas y se afianzaran como una teoría geométrica en la primera mitad del siglo XIX. Una razón histórica de mucho peso por la que sucedió así —que pasó tanto tiempo— es que el famosísimo paisano contemporáneo de Desargues, René Descartes (1596-1650), puso coordenadas al Plano Euclidiano. Así que simultáneamente a la Geometría Proyectiva, nació la *Geometría Analítica* basada en el *Plano Cartesiano* (el que usa coordenadas) y da trabajo de sobra al gremio matemático. El interés general se concentra en esta vertiente de la geometría que se roba los reflectores de la enseñanza y de la narrativa histórica. Y con sobrada razón pues muy pronto, con Isaac Newton (1642-1726) y Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz (1646 -1716), sur-

ge el Cálculo para el cual el método de coordenadas es esencial, como también lo sería en el desarrollo de la Física y en la conquista teórica de los espacios de muchas dimensiones.

Como decíamos, a principios del siglo XIX se retoman las ideas y se desempolva el trabajo de Desargues. Destacan en esta labor Jean-Victor Poncelet (1788–1867) y Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867) quienes, entre otras cosas, resaltan la importancia del concepto de armonía para la Geometría Proyectiva. Poncelet lo asocia con las clásicas curvas cónicas y von Staudt demuestra que es independiente de la noción de distancia (de la cual, hasta ese momento, dependía su definición). De hecho, von Staudt ya es consciente de que se puede desarrollar toda una teoría geométrica sin utilizar las nociones clásicas de distancia y ángulo, y su obra “*Geometrie der Lage*”, [11], así lo establece<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>El nombre, *Lage*, “lugar” o “posición” en Alemán, resuena con el de *Analysis Situs* que es como se llamó antes del siglo XX a la Topología; von Staudt percibe la flexibilización.

Darle sentido visual y experimental, o vivencial, a esto que acabamos de describir en términos históricos —y que amerita ser parte de nuestra cultura científica básica— es el objetivo primordial de la primera parte de este libro. Pero no nos aferramos a la línea narrativa de la historia. Dejamos que el medio se exprese. En vez de intentar recrear la problemática de los pintores, nos aprovechamos de la geometría dinámica. Damos por sentada la idea seminal de Descartes de que las cuadrículas son importantes para lograr concebir a un plano como un todo, y nos abocamos a la tarea de dibujarlas en perspectiva y precisar de qué depende eso. Así, surge la idea de la *armonía* y se le presenta como herramienta constructiva. Se usa como análogo del compás: en el primer capítulo se utiliza como equivalente para “transportar distancias”, y en el tercero (ya en la Parte II), para trazar las curvas que llamaremos *armónicas* (comúnmente conocidas como curvas cónicas) y que son como se dibujan los círculos en perspectiva.

*En paralelo (y con este estilo tipográfico) le dedicamos tiempo y espacio en esta Parte I, a instruir al lector*

*en el uso del programa ProGeo3D. Puesto que fue diseñado para modelar (y trabajar en) esta geometría, ProGeo3D ofrece una experiencia dinámica y vivencial del Plano Proyectivo; nos acerca visualmente a su comportamiento. La computadora nos presenta al Plano Proyectivo como algo tangible, manipulable y real; que está ahí con su lógica propia y coherente.*

Concluimos la presentación de los métodos clásicos de la perspectiva con construcciones dinámicas de perspectiva tridimensional (mal-llamada “de tres puntos de fuga”), para afianzar con ello las ideas abstractas que viven en ese terreno común entre la técnica pictórica y las matemáticas, y que generaron los artistas del renacimiento.

En el Capítulo 2, ya con una fuerte motivación, se da la definición formal del Espacio Desarguesiano, se exponen los hechos básicos en los que está basada la Geometría Proyectiva y se demuestran sus teoremas fundamentales. Se concluye esta primera parte con la descripción topológica del Plano Proyectivo pues indica por qué fue tan importante en el proceso de flexibilización de la geometría.

# Capítulo 1

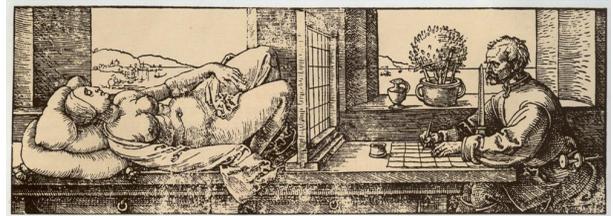
## Perspectiva y armonía

Para los pintores renacentistas, según Alberti:

*Pintar* es el arte de plasmar en un lienzo lo que ve —o debería ver— el pintor ante una escena real —o imaginaria.

Y para decidir qué va en cada punto del cuadro —lo que Alberti llama *componer el cuadro*— debe fijar la escena, el plano del lienzo y la posición precisa del ojo del pintor. Entonces, “se proyecta la escena en el lienzo desde el ojo”.

Este grabado de Dürero, ilustra con claridad esta idea y un método para realizarla (con un cuadro



de muy difícil perspectiva) en la que se usan cuadrículas, tanto en el plano que a la larga será el del lienzo, como en el papel en el que el pintor está dibujando un primer boceto.

Para escenografías abiertas que incluyen personajes y objetos a distintas profundidades —y más aún si son escenas imaginarias—, conviene usar otros métodos. Sabemos bien —y lo aprendemos vivencialmente desde muy pequeños— que la escala disminuye conforme los objetos están más distantes: “entre más lejos está, más pequeño se ve”, pero determinar qué tanto no es fácil. El problema básico es saber en qué lugar del lienzo y con qué escala se debe dibujar algo que está en la escena, y el apoyo técnico fundamental consiste en aprender a dibujar cuadrículas en perspectiva. Pues un plano cuadrículado permite situar con precisión a cualquier objeto en él, usando el método que hizo ilustre a Descartes: se fija a un cuadrado como *origen* o “la base”, y se determina cuántas casillas en las dos direcciones de la cuadrícula hay que moverse para llegar al lugar deseado. Si sabemos los datos del objeto real (cuántas casillas hacía atrás y cuántas a un lado) y tenemos la cuadrícula ya dibujada en el lienzo: ya sabemos en dónde va; pero además, una vez ahí, el tamaño del cuadradito correspondiente dictará la escala.

Resulta que así como un piso de mosaicos cuadrados queda determinado por una primera loseta (las nuevas piezas, como bien lo saben los mosaiceros desde tiempos inmemoriales, se colocan coincidiendo en las aristas de las que ya fueron colocadas), también al dibujarlo en perspectiva, todo queda definido en cuanto se dibuja la primera pieza en el lienzo. A ¿cómo lograrlo? se dedican nuestras primeras escenas. Surge de ellas la noción de cuartetas armónicas que se convertirá en nuestro concepto básico y que aquí se empieza a utilizar como herramienta constructiva.

Al estudiar algo más elemental que las cuadrículas que son las retículas triangulares surge naturalmente el Teorema de Desargues, que es característico de la nueva geometría que se está gestando (no lo demostramos aún, pero lo enunciamos y lo usamos). Para finalizar el capítulo, aplicamos la visión que se ha desarrollado a describir las recetas que proponía Alberti y vemos cómo dibujar un cubo con buena perspectiva; lo cual da lugar al equivalente tridimensional de una cuadrícula.

## 1.1. Cuadrículas en perspectiva y cuartetas armónicas

Supongamos que un pintor nos entrega en un lienzo el dibujo de una de las losetas cuadradas de un mosaico en un piso (la *loseta básica*, llamémosla) y nos reta a dibujar el resto del mosaico.

Tenemos que dar una receta: una construcción que consiste en una serie de trazos con regla, y al mismo tiempo debemos estar atentos a por qué la receta funciona.

### 1.1.1. Horizonte y puntos de fuga

#### ESCENA 1. Horizonte de una loseta.

Un cuadrilátero dibujado en el lienzo, que en nuestro caso es la pantalla, consta de cuatro segmentos que son sus *lados*. Hemos pintado de rojo y azul a las parejas de lados opuestos que definen las dos direcciones principales (o *ejes*) de la cuadrícula.

Cada lado se *extiende* a una línea en el lienzo.

Y al trazar las cuatro líneas, los pares que corresponden a los lados opuestos de la loseta básica se cortan en dos nuevos puntos.

Siguiendo la nomenclatura cartesiana clásica, los hemos denotado por  $X$ , 'Infinito del Eje- $x$ ', y  $Y$  para 'Infinito del Eje- $y$ '. Vamos a suponer que ambos están en el lienzo por cuestión argumentativa; en su momento veremos cómo proceder si no es así. Estos puntos ( $X$  y  $Y$ ) son los *puntos de fuga* de la loseta básica. Como dos líneas paralelas nunca

se tocan, pero al dibujarlas sí lo hicieron, el punto de intersección no viene de uno real, lo pensamos como punto en el horizonte (a distancia real infinita); pero en el lienzo tiene una presencia contundente —¡ahí está!— y le damos el nombre especial de “punto de fuga”.

Y por estos dos puntos de fuga,  $X$  y  $Y$ , que determina la loseta básica, se traza una nueva línea que llamaremos el *horizonte de la loseta*. Corresponde a la línea del horizonte en un desierto plano y los pares de líneas corresponden a las paradigmáticas vías de ferrocarril: paralelas en el piso pero no en el lienzo; visualmente se juntan. Y como ya se tenían determinados dos puntos del horizonte, a éste no le queda más que ser la línea que pasa por ellos. Aquí, estamos usando el hecho básico de que

- *por dos puntos en un plano se puede trazar una única línea recta,*

y a esto es a lo que se llama la *herramienta regla* cuando los puntos están en el lienzo.

Una de las diagonales del cuadrángulo corta al horizonte en un punto  $A$ , que podemos llamar ‘Infinito Diagonal’. Estos tres puntos en el horizonte

que hemos bautizado ‘Infinito de Tal’ son los famosos *puntos de fuga*. En la escena real no existen, insistimos, pero en el lienzo sí existen y serán determinantes para la construcción. Hay que remarcar que ellos y el horizonte, quedan determinados por los cuatro *vértices* de la loseta básica —y ahora, en este último paso, ya se puede mover la figura conforme se muevan dichos vértices, que son los *puntos de control* de la construcción.

*Conviene hacer un paréntesis para presentar al pro-*

grama ProGeo3D con el que hicimos, y ahora estamos visualizando las figuras. Este último paso, cambió la experiencia de estar mirando una imagen fija al **estado de exploración** en el que podemos interactuar con la figura —por esto se dice que este programa es de geometría dinámica. Al mover (con el ratón o con el dedo) uno de los **puntos de control** (aquellos que se dibujan con un hueco) la figura se mueve pero las características abstractas de la construcción se conservan. Esto nos permite observar distintas figuras o instancias particulares que surgen al jugar con una misma construcción.

En la parte inferior de la ventana aparece al centro el “Seleccionador” de objetos (como un cursor), que es la herramienta básica para explorar y es la que está activa por omisión; con ella se seleccionan los objetos para cambiar sus cualidades o moverlos, cuando esto es posible. A sus lados están las herramientas de pantalla: hay un botón para “Arrastrar” y otro para ampliar o hacer “Zoom” a toda la figura. Le sigue hacia la derecha el icono de “Recargar”, con el que se puede regresar en cualquier momento a la **posición inicial** —la que escogieron los autores. Luego viene el botón que pone o quita la tipografía; le sigue el de “Play” —que sirve para ejecutar algunas animaciones automáticas cuyo fun-

cionamiento explicaremos más adelante—, y por último aparece el botón que amplía la escena de manera que llegue a ocupar toda la hoja o la pantalla.

Arriba a la derecha el icono de engrane cambia al estado de “Trabajo” en el cual surgen de los márgenes los menús de herramientas; el botón que lo activó adquiere forma de ojito indicando que al pulsarlo el programa regresa al estado de “Exploración”.

En el estado de “Trabajo” o edición, conviene empezar a experimentar con las herramientas de “Deshacer” y “Rehacer”, que se encuentran abajo a la derecha y que

*tienen el número de objetos construidos entre ellas dos (esta construcción consta de 19 instrucciones).*

*Al pulsar “Deshacer” repetidamente, se viaja hacia atrás en la construcción. El programa señala la herramienta de la última instrucción con el color que se usó y la escena regresa a ese momento anterior. Las herramientas que se usaron en esta construcción son “Intersección” para obtener el punto donde se cortan dos rectas, la de “Punto-Recta” para el trazo de los primeros cuatro puntos y las líneas por ellos, la de “Plano-Triángulo” con la que se coloreó la loseta y la de “Segmento”.*

*Se puede reconstruir paso a paso la escena pulsando “Rehacer”, o bien, se puede retornar de un sólo golpe al final (y en la posición inicial) con “Recargar” dentro de la ventana.*

*Poco a poco, en las siguientes escenas, iremos describiendo cada una de las herramientas del programa. ■*

Regresando al dibujo en perspectiva, definimos el horizonte de una loseta como la línea que pasa por sus dos puntos de fuga básicos. La construcción de la cuadrícula dependerá de la siguiente afirmación:

- *todos los puntos de la línea al horizonte son puntos de fuga.*

Para verlo, hagamos un experimento mental de esos que usaba Einstein. Supongamos que la loseta básica es el dibujo de una loseta en un piso infinito sobre el que estamos parados. Mandemos a un par de novios agarrados de la manita a caminar en una dirección fija sobre el piso ¿Qué vemos? Por supuesto: que se hacen chiquitos. Ellos caminan tan campantes sobre líneas paralelas en el pi-

so, pero en el lienzo tienden a convertirse en un punto del horizonte; y además, cualquier otra línea paralela a las suyas se dibuja como línea que también incide en ese mismo punto (basta pensar en un tercer personaje moviéndose a la misma velocidad por otra línea paralela: sus distancias reales se mantienen fijas, pero en el lienzo se encogen). Entonces, líneas paralelas en el piso se ven (y por tanto se deben dibujar) como líneas que concurren (o se juntan) en un punto de la línea horizonte. Así, los puntos en ella representan las distintas direcciones de líneas en el plano, y son sus *puntos de fuga*. Están en el lienzo, pues en el piso se quisieran situar como *puntos en el infinito*; tómese esto como una manera de hablar, como una descripción que luego habremos de precisar. □

De este hecho se deduce un procedimiento para extender el dibujo de la loseta básica al de todo el mosaico, o cuadrícula, que ella determina.

### 1.1.2. Cuadrículas y armonía

#### ESCENA 2. Construcción en escalerita.

Regresemos a la construcción anterior: ya tenemos una loseta dibujada en el lienzo con su horizonte y tres puntos de fuga ‘Infinito de Tal’ en él.

Por lo que acabamos de argumentar, la línea diagonal de la siguiente loseta (en dirección a X y que veríamos a la derecha) debe ser la que va al ‘Infinito Diagonal’ A, partiendo de la esquina inferior

derecha de la loseta básica.

Esto da el vértice superior derecho de la loseta siguiente como la intersección de dos líneas.

Desde ahí debe dibujarse la siguiente línea *vertical* (al 'Infinito del Eje-y', Y); y entonces su intersección con la otra diagonal es un nuevo punto desde el cual podemos trazar una línea hacia el otro infinito, el *horizontal*, X... y esto produce un nuevo punto con el cual reiterar el proceso.

Se puede seguir así, *en escalerita*, trazando líneas hacia Y y hacia X desde puntos que se alternan en las dos diagonales por A, hasta donde se quiera hacer crecer a la cuadrícula.

Para extender la cuadrícula hacia atrás, hacia el espectador-pintor, también sirve el método de la escalerita; moviendo la figura para que los puntos requeridos aparezcan en pantalla. O bien, se puede trazar la otra diagonal de la loseta (en verde) para que sus intersecciones con las líneas rojas o azules (a X o a Y) que ya tenemos, nos den puntos desde los cuales trazar líneas hacia el otro infinito.

Llamemos a la figura que da la posición inicial de la construcción

- *el andamio constructivo de un piso,*

pues se puede pensar como los trazos auxiliares que al final se ocultaran, pero que guían al pintor en la composición de un cuadro —en el cual, podemos suponer, aparece un piso cuadrículado.

Este es un ejemplo de las técnicas de la perspectiva que se desarrollaron en el renacimiento. Pero ahora, mucho más que a la simple regla que usaban entonces, tenemos en nuestras manos a la poderosa herramienta de la geometría dinámica.

Es importante que el lector se involucre y se dé su tiempo para jugar con la construcción (usando los puntos-control de la loseta básica) para llevarla a que sea el andamio constructivo para dibujar un techo; o bien, para fachadas de edificios vistos a la izquierda o a la derecha y desde arriba o desde abajo (hay que hacer paralelos y verticales a una pareja de lados opuestos de la loseta básica —que en este caso representa una ventana del edificio— y jugando con sus tamaños y posiciones relativas). También se puede uno acercar a una cuadrícula euclidiana: haciendo paralelos a ambos pares de lados opuestos simultáneamente, lo cual acerca la línea horizonte al infinito.

Lo que debe quedar claro después de esta exploración es que los pisos y los techos tienen horizontes horizontales (valga la redundancia<sup>1</sup>), mientras que las fachadas tienen horizontes verticales (y su ‘loseta básica’ representa a una ventana). En

---

<sup>1</sup>... pues el nombre que se le dió a la línea asociada a una loseta, ‘horizonte’, es generalización de este caso del lenguaje común para referirse a nuestro entorno cotidiano.

el paso de unos andamios a otros, nuestro sistema perceptivo nos hace ver planos inclinados como sus horizontes; y entre más se aleje de la pantalla el horizonte, más de frente estamos viendo a la cuadrícula; más se parece ésta a una *cuadrícula euclidiana* de paralelogramos iguales lograda con líneas paralelas en dos direcciones y a distancias fijas entre ellas. Esta última, es la definición que estamos usando de “cuadrícula”, aunque no esté estrictamente hecha de cuadrados, vale la pena sim-

plificar la terminología para fijar la idea.

En éste último paso añadimos mas líneas *diagonales* de la cuadrícula. Tanto de las naranjas con punto de fuga  $A$ , como de sus *opuestas*, pintadas de verde y que concurren en el nuevo punto de fuga,  $B$ , en el horizonte (quizá haya que mover la cuadrícula para verlo). Esta imagen como de cuatro soles nacientes que hace surgir una cuadrícula en su línea horizonte, conduce a una de las nociones centrales de la geometría proyectiva:

- Diremos que la cuarteta de puntos en la línea horizonte

$X, B, Y, A$

es una **cuarteta armónica**.

Lo primero que debemos notar es que mas que a una cuarteta de puntos, esta definición se refiere a dos parejas de puntos en una misma línea:  $X$  y  $Y$  son los puntos de fuga de la loseta básica (los puntos de intersección de sus lados opuestos y por los que pasa su línea horizonte), mientras que la

otra pareja,  $A$  y  $B$ , corresponde a los puntos de fuga de las diagonales de dicha loseta. Entonces, debemos decir con mas precisión que

$A$  y  $B$  son **armónicos respecto** a  $X$  y  $Y$ .

La primera pareja son los puntos de fuga de las diagonales y la segunda de los lados de una loseta y su cuadrícula asociada.

Observemos de la figura que las líneas diagonales (naranjas y verdes y además punteadas) también forman una cuadrícula; pero con puntos de

fuga básicos A y B, y cuyas diagonales tienen puntos de fuga X y Y; podríamos llamar a esta cuadrícula (naranja-verde) la *cuadrícula diagonal* de la original (roja-azul). Y esto implica que

- *la relación de armonía es simétrica.*

Es decir, también se cumple que X y Y son armónicos respecto a A y B.

*Veamos ahora el funcionamiento de las herramientas básicas o de incidencia de ProGeo3D.*

*En estado de trabajo o de edición (hay que pulsar el icono de “Trabajo”), aparecen en la barra superior las herramientas para manejar archivos y para la edición de pasos que discutiremos brevemente en los ejercicios.*

*El botón de hasta arriba en la columna de herramientas geométricas a la derecha es el que cambia de “geometría proyectiva” a “geometría euclidana”: simplemente esconde o muestra las herramientas correspondientes. En la geometría proyectiva no hay noción de distancia, es algo más elemental en el sentido de que tiene menos herramientas. En términos de las clásicas construcciones con regla y compás, para este libro ¡se nos olvidó el compás!*

*Las herramientas básicas, o de incidencia, son las dos de hasta abajo en la columna de herramientas.*

*Al activar la herramienta “Punto-Recta” y hacer un clic simple en la pantalla: se produce un punto; se incorpora un nuevo punto a la base de datos de la construcción en la posición indicada. Pero si se mantiene la presión y se **arrastra** el ratón (o dedo) sin levantarlo y luego se levanta en otro lugar, ProGeo3D traza una línea. Así, se producen puntos o líneas con una sola herramienta, pues se pueden identificar una o dos posiciones en la pantalla (clic simple o presionar-arrastrar-levantar) en un solo gesto.*

Además, el tipo de punto que se genera (en el clic simple o en cualquiera de los dos momentos claves del arrastre) depende de la posición que se indica. Si es un lugar sin objetos gráficos (un espacio vacío de la figura) se crea un nuevo punto libre o **de control**: éste se indica con un circulito vacío y al seleccionarlo después (con el cursor-seleccionador activo) se le podrá mover libremente. Si el lugar donde se presiona o se levanta la presión está sobre un punto ya definido, el sistema lo usa para construir una línea. Si está sobre una línea pero sin nada más cerca, se crea un **punto en una línea**: se podrá mover sólo en ella, sin salirse nunca y al seleccionarlo después, se activa el control de “Play” con el cual, apretándolo, el punto se desplaza sobre su línea usándola como carril (después veremos que esto sirve para producir animaciones y otros objetos). Y finalmente, si la posición que se señala es la intersección de dos líneas, se crea un nuevo punto de la construcción cuya posición siempre será esa intersección (y se dibuja como un punto sólido, por ejemplo: A, B, X o Y).

La otra herramienta de incidencia es la de “**Intersección**”. Genera el punto de intersección de dos líneas al hacer clic en su intersección visual. No es redundante con la herramienta “Punto-Recta” que acabamos de des-

cribir, pues a veces hay muchos puntos cercanos y el programa interpreta a otro punto del que queremos. Entonces, el gesto para seleccionar a un par de objetos se hace muy útil: con la herramienta “Intersección” activa, si se hace clic en cualquier parte de una línea, se arrastra el ratón y se levanta estando sobre otra línea, se genera al punto de intersección de esas dos líneas; así, a la base de datos de la construcción se pueden incorporar puntos de intersección que no se encuentran en la pantalla en ese momento.

*Aprovechando el gesto de arrastre con el que se pueden seleccionar dos objetos o dos lugares de la pantalla, una sola acción, o gesto, se puede convertir en hasta tres instrucciones diferentes para la construcción (como la creación de dos puntos nuevos y de una línea por ellos). Es importante jugar con estas posibilidades, pues definir puntos distintos de los que se requieren es común y conduce a construcciones equivocadas.*

*Por último, hay que señalar que cada objeto gráfico que se define (hasta ahora puntos y líneas) tiene **cu**alidades o **atributos**: color, grosor y estilo. Éstas se deben indicar antes de la acción que los produce, o bien, se pueden cambiar después usando el seleccionador y cambiándolos; también se puede hacer usando la herramienta “Cambiar”, que se encuentra a la izquierda del panel de colores. Ésta permite cambiar las cualidades de un objeto al hacer clic en él con el color y el tamaño deseados previamente seleccionados; sirve para hacerlo rápidamente en varios objetos, con un sólo clic sobre cada uno de ellos; por ejemplo, “cambiarles el color a todas las líneas que pasan por X”.*

EJERCICIO 1. Define nuevos puntos de los tres tipos (libres, en líneas o de intersección) con un sólo click (qui-

zâ convenga ampliar la loseta básica para que haya espacios libres). Traza nuevas líneas y observa sus diversos comportamientos cuando se mueve ahora la loseta básica. En particular, traza líneas por los **centros** (i.e. la intersección de las diagonales) de dos losetas contiguas y observa que pasan, como deben, por otros centros y el punto de fuga básico que les corresponde.

EJERCICIO 2. Recarga la escena. Traza líneas con diversas pendientes entre puntos de intersección de la cuadrícula. Observa experimentalmente que si son paralelas

en la cuadrícula (tiene las mismas pendientes, medidas por el número de losetas en ambas direcciones que se separan a los dos puntos que definen la línea, por ejemplo 2 : 1), entonces concurren en un mismo punto de fuga en el horizonte.

■

EJERCICIO 3. En una nueva escena, que se abre con el botón de abajo a la izquierda, traza en escalerita una cuadrícula en perspectiva de cinco por cinco controlada por la loseta central (se puede lograr con 30 instrucciones, aunque se reduce a 15 gestos con la herramienta “Punto/Recta”). *Para guardarla en un archivo, se usa el ícono correspondiente en el margen superior a la derecha que produce ventanas de dialogo estándares. Abre ese archivo que tiene extensión .pg3 con cualquier editor de texto simple y observa que tiene un preámbulo que define las características generales de la escena; luego tiene una lista de las instrucciones bajo la línea <CONSTRUCTION> (observa su estructura, cada línea describe una instrucción), y concluye con una sección que describe los <PASOS>, que en este caso es aún uno único. Regresando a ProGeo3D, observa que el ícono de lápiz arriba a la izquierda, el “Editor de Pasos”, hace aparecer una ventana en donde se puede editar la*

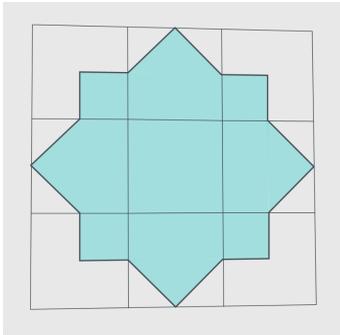
*presentación de la escena en pasos. En su margen derecho se pueden añadir nuevos pasos, hazlo, y podrás presentar en pasos tu construcción escogiendo hasta qué instrucción se despliega en cada uno, modificando el contador “ver” que se refiere a las instrucciones. Vuelve a guardar y compara archivos: solo cambió la última sección. Juega con estas posibilidades de presentación de tu escena. Para ponerle título pulsa en el título (aunque ahora esté vacío) y aparecerá una ventana para cambiarlo.*

## 1.2. Subdivisión y puntos ideales

La construcción en escalerita no es la única manera de construir cuadrículas en perspectiva. Con un ejemplo concreto, veremos que hay otras maneras de hacerlo y con ello motivaremos nuevas herramientas de *ProGeo3D*.

### 1.2.1. Un rosetón y decoraciones

Vamos a ver con detalle cómo hacer el dibujo en perspectiva de una ventana en forma de rosetón de 8 picos, como el de la figura.



#### ESCENA 3. Rosetón de 8 picos.

Empezamos con una loseta básica —que será el cuadrado central del rosetón— con su horizonte y sus tres puntos de fuga. Hemos trazado, además las tres líneas diagonales que se pueden trazar por sus vértices, pues...

...producen cuatro puntos de intersección, desde los cuales se pueden trazar líneas en las direcciones principales que completan una cuadrícula de tres por tres.

Al trazar las tres líneas en la otra dirección diagonal (en verde), aparecen nuevos puntos de intersección en los *centros* de cinco cuadrados.

Con ellos, se pueden trazar nuevas líneas en las direcciones básicas de los ejes para completar una cuadrícula de 6 por 6. Hemos *subdividido* la cuadrícula de 3 por 3 con el uso de la otra dirección diagonal para obtener centros de losetas. Y así, en principio, se podría subdividir una cuadrícula las veces que fueran necesarias para poder detallar alguna región de un cuadro en perspectiva.

Los 49 puntos de intersección de líneas rojas y azules —que vemos nosotros, aunque no todos estén incorporados a la base de datos de la construcción— constituyen lo que podemos llamar el *timbiriche* de la cuadrícula...

Incluye ya a los puntos que se necesitan para definir el rosetón deseado con segmentos y colorearlo con triángulos.

*El resto de la construcción es decoración; y por **decoración** nos referimos a cómo se presenta la figura.*

*El cambio esencial del paso anterior a éste es que se ocultaron los objetos de ciertos colores. Además de con*

*el cambio de página del texto, también se puede navegar en los pasos de una escena dentro de la figura: los controles están a la izquierda del “Ojito/Engrane” (que alterna entre estados de exploración y trabajo). Sirven para pasar la figura al paso anterior o al siguiente. Vaya al paso anterior (5/7) y regrese a éste (6/7), para observar (en modo “Trabajo”) que en el panel de colores se activan o desactivan muchos colores (aparecen con tache en el panel y los objetos correspondientes desaparecen de la figura). Al pulsar un tache, se elimina como tal y reaparecen los objetos de ese color.*

*Esencialmente se ocultó buena parte del andamio constructivo, pero mantuvimos a la loseta básica de control y a la línea horizonte junto con la cuarteta armónica de la cuadrícula.*

*El otro aspecto de la decoración que queremos tocar es mucho más profundo y delicado. Tiene que ver con el meollo de la geometría proyectiva que propuso Desargues dos siglos después de que aparecieran los métodos de la perspectiva. El sistema ProGeo3D modela a lo que llamaremos el **Plano Desarguesiano** o **Proyectivo**:*

- se le añaden al Plano Euclidiano puntos en el infinito, que llamaremos *ideales*: uno por cada clase de paralelismo de rectas.

*Estudiaremos esto con más cuidado en el siguiente capítulo. Por lo pronto, no hay que preocuparse mucho por ello y tomar a estas figuras como lo que se ve en una porción —la pantalla— de ese plano que definió Desargues (y que aquí cerquita coincide con el clásico Plano Euclidiano). Trabajar o jugar dinámicamente con las figuras, moverlas y observar cómo se comportan, ayudará a crear la intuición correcta para que, en su momento, la teoría formal y rigurosa se perciba como algo natural.*

*Las herramientas “Segmento” y “Triángulo” están diseñadas para expresar las particularidades del Plano*

*Desarguesiano. Si se selecciona una línea, llamémosla  $h$  de horizonte, y se pulsa después alguna de estas dos herramientas —con  $h$  previamente seleccionada, insistimos— se dibujará el segmento o el triángulo del Plano Desarguesiano que **NO** toca a la línea  $h$ .*

*Un segmento se define como si fuera línea: con un arrastre. Si los dos extremos están del mismo lado de  $h$  (tiene sentido pues los tres objetos están en la pantalla), se dibuja el segmento clásico entre ellos; pero si están en lados opuestos de  $h$ , se dibujará el segmento “exterior” que no toca a  $h$  y no está enteramente contenido*

en la pantalla: “pasa por el infinito” en el correspondiente punto ideal para regresar por el otro lado.

Lo mismo sucede con los triángulos. Para definir uno, con la herramienta “Plano” activa, se selecciona (o se crea) uno de sus vértices con un clic simple y, después, se arrastra el cursor entre los otros dos vértices. Si cuando se pulsó la herramienta “Plano-Triángulo” había una línea previamente seleccionada, el triángulo que se dibuja **NO** la tocará.

Si se activan éstas herramientas sin tener una línea seleccionada, el programa selecciona (por omisión) a la línea al infinito (la que forman todos los puntos ideales que añadió Desargues), y el resultado será entonces el euclidiano clásico: se obtiene al segmento o al triángulo de toda la vida.

Hay que remarcar que a los atributos de estos objetos (color, grosor y estilo), se les tiene que determinar una vez que ya está activada la herramienta, pues al seleccionar la línea que hará de horizonte se muestran automáticamente sus cualidades. O sea, el orden correcto para construir estos objetos es: primero se selecciona la línea-horizonte, luego la herramienta, luego se escogen los atributos deseados y finalmente se hace la construcción geométrica del segmento o triángulo.

En la figura del rosetón, todos sus segmentos y triángulos tienen como horizonte al de la loseta-control (que mantuvimos en la figura). Se puede observar entonces la imagen sin sobresaltos y con continuidad natural. Explórese la imagen cuando uno de los puntos de la loseta de control cruza la línea de otros dos. Hay que notar que en el momento en que tres de sus puntos-control son colineales la construcción pierde sentido pues en ese caso algunos puntos generados como intersección de líneas no están bien definidos; pero eso sucede en un instante y la imagen se rearma inmediatamente después.

*Vale la pena volver a explorar la Escena 1, que es la construcción más simple. Ahí, los cuatro segmentos de la loseta están definidos desde el principio y por tanto tienen, por omisión, la línea al infinito como horizonte, o sea como aquella a la que no tocan; pero los dos triángulos que colorean la loseta ya tienen como horizonte al mismo de la loseta. Compara los comportamientos de unos y otros. También vale la pena empezar una construcción nueva (abajo a la extrema izquierda de las herramientas está el ícono para ello) dibujar una línea y experimentar con distintos segmentos y triángulos que se crean cuando se le selecciona como horizonte.*

*Este último paso es de decoración para tomar la foto con que empezamos la escena.*

■ EJERCICIO 4. En las últimas instrucciones de la construcción, se trazan los segmentos negros que enmarcan al rosetón. Para experimentar los “sobresaltos” y las “discontinuidades” que describimos como motivación para dibujar segmentos y triángulos tomando en cuenta su horizonte, redefine los segmentos negros que enmarcan al rosetón sin seleccionar el horizonte de la loseta (es decir, con la línea al infinito como horizonte por omisión) y mueve la figura. Verás que ésta ya no se comporta tan civilizadamente como antes y que, efectivamen-

te, abundan los “sobresaltos” y “brincos discontinuos” cuando algunos puntos cruzan la línea al infinito.

EJERCICIO 5. En una nueva escena, define un *triángulo* como tres puntos con sus líneas y colorea con colores distintos las cuatro *regiones triangulares* a que da lugar en el Plano Proyectivo. Sugerencia: en un color que luego ocultarás, traza líneas auxiliares para usarlas como horizontes.

## 1.2.2. Retículas triangulares y coincidencias

Hemos visto cómo expandir cuadrículas a partir de una loseta y también cómo refinarlas o subdividir las. La línea horizonte (que depende de la loseta básica) juega un papel fundamental en la construcción. Veremos ahora que el horizonte puede darse como un dato inicial en sustitución de uno de los cuatro vértices, y que es necesario para dibujar re-

tículas triangulares.

Una *retícula triangular euclidiana* consta de líneas en tres clases de paralelismo de tal manera que en cada *vértice*, que es la intersección de dos de las líneas, concurren líneas de los tres tipos. Las retículas más usuales y mejor conocidas son con líneas a 60 grados y da lugar a un adoquinamiento, mosaico o teselación de todo el plano por triángulos equiláteros. Pero éstas retículas se pueden dibujar a partir de cualquier triángulo.

### ESCENA 4. Retícula triangular euclidiana.

*A partir de un triángulo de control (que se logra con tres gestos y seis instrucciones), ésta retícula se dibujó usando únicamente a la herramienta euclidiana “Paralela”. Con ella activa, si se arrastra una línea a un punto: se dibuja su paralela por él. La filosofía gestual de Pro-Geo3D, conduce a crear un punto donde se concluye el arrastre si ahí se cortan dos líneas (y se define ese punto de intersección); pero en caso de que no haya puntos obvios al concluir el gesto, se crea un nuevo punto de control. Para ver los puntos que se definieron y observar el patrón de la construcción, oculte el color de las líneas; también conviene reducir la imagen. ■*

Parecería que hemos violado la consigna de sólo usar herramientas proyectivas. Pero a la herramienta “Paralela”, que es de las euclidianas, se le puede considerar como la que se usa para trazar líneas por los puntos ideales: al seleccionar una línea, se selecciona implícitamente a su punto ideal.

#### ESCENA 5. Retícula triangular en perspectiva.

Veremos que la construcción de una retícula triangular vista en perspectiva depende sólo de fijar la línea horizonte.

Consideremos un triángulo base, o inicial, y una línea  $h$  que no pasa por sus vértices y que jugará el papel del *horizonte* (*se ocultaron los puntos que controlan  $h$  con la herramienta “Ocultar”; “Recuperar” los enseña*).

Si coloreamos los lados del triángulo de rojo, azul y verde, nos podemos referir con esos colores a sus tres puntos de fuga (que se obtienen como sus intersecciones con el horizonte gris). En perspectiva, dos líneas paralelas se deben dibujar concurrentes con el horizonte. Así que...

...por cada vértice del triángulo se puede trazar una línea al punto de fuga del color que le falta. Lo cual

nos da tres nuevos vértices en las intersecciones de éstas líneas y estos puntos forman un triángulo del doble del tamaño e “invertido”.

Ahora tenemos dos tipos de puntos definidos en el plano (y fuera del horizonte). Los de *grado tres*, por los que ya pasan líneas de los tres colores (el triángulo inicial); y los de *grado dos* a los que les falta un color (los nuevos). Por ellos...

...volvemos a trazar al punto de fuga del color que les falta. Y algo interesante sucede: el nuevo trián-

gulo viene con losetas o *cuadrángulos* en las esquinas; pues las nuevas líneas también cortan a las originales de otro color y, por parejas de colores, dan tres losetas cuyo horizonte es  $h$ .

Consideremos a la loseta en la esquina verde-azul:...

su diagonal por los puntos nuevos pasa por el punto de fuga rojo. Y esto es una *coincidencia* en el sentido de que tres de los puntos que se han definido son *colineales* (están o *inciden* en una misma línea). Pero a su vez, es una coincidencia en el sentido de que está sucediendo algo inusual en un plano: es raro y notable que tres puntos sean colineales o que tres líneas sean concurrentes.

En las escenas anteriores ya hemos visto muchas de estas coincidencias (por ejemplo, que las diagonales de las cuadrículas incidieron justo en los vértices que debían), pero las dejamos pasar para no entorpecer el discurso o las ideas que se presentaban. Sin embargo, llegó el momento de hacer una pausa y señalarlo con énfasis, pues las matemáticas son lo que son porque creen que este tipo de coincidencias suceden por alguna razón:

debe haber una prueba que explique por qué sucede lo que vemos que sucede; y tener esas demostraciones claras es lo que consolida la teoría.

Esta coincidencia (*que la línea roja por los dos puntos nuevos va a incidir con el punto de fuga rojo* a la cual nos referiremos como **coincidencia-1**), se puede demostrar suponiendo que estamos dibujando en el lienzo una retícula triangular euclidiana que está en el piso. Entonces, con argumentos euclidianos clásicos (que dependen de ángulos y

distancias) se prueba que las correspondientes líneas rojas son paralelas en el piso (ver Ejercicio 6) y que, por lo tanto, esas líneas dibujadas en el lienzo deben compartir punto de fuga.

O bien, y ésta es la tradición que arrancó Girard Desargues, se pueden buscar argumentos que no dependan de las nociones de distancias o ángulos sino solamente de la *incidencia*: de la relación de pertenencia o contención entre puntos y líneas.

Un ejemplo clásico e históricamente importante de éste tipo de enunciados es el Teorema de Desargues, que viene al caso pues tiene mucho que ver con la coincidencia que nos preocupa.

**Teorema 1** (Desargues). *Las intersecciones de los lados correspondientes de dos triángulos coloreados son colineales si y sólo si las líneas por los vértices correspondientes son concurrentes.*

Conviene introducir terminología. Por *triángulos coloreados*, entendemos que sus lados están pintados con uno de tres colores, y resulta natural asignarle a los vértices el color de su lado opuesto. Se dice que dos están en *perspectiva axial* si las

intersecciones de sus lados del mismo color son colineales y que están en *perspectiva* si las líneas entre vértices correspondientes son concurrentes.

El término *perspectiva* que tradicionalmente se ha usado para esta última condición es revelador. Expresa, de alguna manera, que el punto donde concurren las líneas, que se denomina el *foco* no ‘distingue’ entre los dos triángulos (si hubiera que dibujarlos dibujaría lo mismo); y en este mismo tenor, para la perspectiva axial, la línea donde coin-

ciden las intersecciones que se llama *eje*, ‘siente’ o ‘ve’ a los dos triángulos de la misma manera. Esta forma de expresarse reaparecerá después.

Nótese que todas las parejas de triángulos coloreados de la figura están en perspectiva axial con *eje* el horizonte; y por eso viene al caso invocar al teorema.

La coincidencia que nos interesa probar (que llamamos coincidencia-1, pág. 28) equivale a que los triángulos que hemos sombreado (el original y el de la esquina verde-azul) estén en perspectiva axial. Según el Teorema de Desargues esto sucede si y sólo si están en perspectiva. Y efectivamente, al trazar líneas entre sus vértices correspondientes, se ve que concurren: pero además (¡coincidencia extra!) en un punto del horizonte (y esto es así porque en el piso uno es trasladado del otro).

Esta explicación de la coincidencia inicial es aún híbrida y tiene mucho de experimental o usa conceptos euclidianos en el piso como ‘que si un triángulo es el trasladado de otro’. En fin, más que una demostración, lo que queremos indicar es que hay tela de dónde cortar; que debe haber una teoría

geométrica coherente que en vez de usar distancias y ángulos, usa sólo incidencia. Y esa fue la Geometría Proyectiva que inició Desargues.

Otra manera de argumentar la coincidencia en que estamos enfocados es usando armonía. Nótese que el *foco* de la perspectiva entre los dos triángulos (o el punto de fuga de la traslación) que es rojo-tenué, es parte de una cuarteta armónica pues las líneas verdes y azules forman una cuadrícula con diagonales rojas (sólidas) y las nuevas

segmentadas-rojo-tenué; así que la coincidencia está relacionada con lo que llamaremos Teorema Armónico (Teorema 2) que dice que la armonía está bien definida y que probaremos en el siguiente capítulo.

Por supuesto, lo mismo sucede con las otras dos esquinas. Sus triángulos están en perspectiva con el original y los focos de esas perspectivas están en el horizonte. Son los armónicos de los puntos de fuga de los otros dos colores, respecto a la pareja complementaria. Es decir, con cada pareja de colores se genera una cuadrícula, las líneas del tercer color son sus diagonales, la diagonal opuesta (ralladita y tenué) da un punto de fuga que es lo que llamaremos el *cuarto armónico* de la terna separada en par y singulete (hemos pintado al punto correspondiente en el horizonte con el mismo color del singulete, pero tenué).

Lo que sí es una consecuencia directa del Teorema de Desargues, y una bella coincidencia, es que las líneas que unen a los vértices correspondientes de los triángulos coloreados externos de dos etapas de la construcción (el básico es la etapa

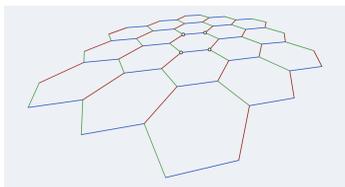
0 y ahora tenemos sombreados al de la 1 y la 2) son concurrentes en el *baricentro* común de todos ellos. Es decir, están en perspectiva, y esto es así, pues por construcción están en perspectiva axial.

Para la siguiente etapa, se trazan por los vértices del triángulo exterior a las líneas del color que les falta y dan el triángulo exterior de la etapa siguiente, la 3. Esto produce tres triángulos, equivalentes al de la etapa 2, con cuadrículas bicoloreadas... cuyas diagonales (punteadas) expanden la retícula.

Además, hemos sombreado los triángulos con la orientación del básico, para visualizar mejor como al fundirse con un triángulo contiguo, en blanco, dan una de las tres cuadrículas implícitas. ■

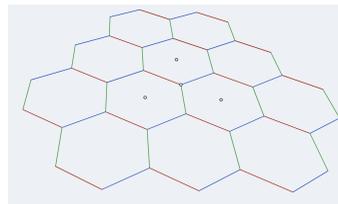
EJERCICIO 6. A partir de un triángulo coloreado, construye la retícula euclidiana (con la línea al infinito como horizonte) hasta el principio de la etapa 2 (donde nos detuvimos a estudiar la coincidencia-1 en la Escena 5). Demuestra, con argumentos de geometría euclidiana, que la línea entre los puntos nuevos del cuadrángulo azul-verde es paralela a la roja.

EJERCICIO 7. Las retículas triangulares también sirven de andamio constructivo para los mosaicos hexagonales. Construye un panal en perspectiva como en la figura:



EJERCICIO 8. Una manera más natural de controlar un panal en perspectiva es con uno de sus vértices y los centros de las tres celdas que lo tocan; pero es más difícil

encontrar su horizonte. ¿Puedes lograrlo? Pista: piensa que los puntos de control son el centro y los vértices del triángulo de la etapa 1 de la construcción anterior (ve el Paso 6 de la Escena 5).



### 1.2.3. El Teorema de Desargues experimental

No pretendemos aún demostrar el Teorema de Desargues (en su momento lo haremos con puros argumentos de incidencia), sino simplemente ver con las posibilidades que da la geometría dinámica que, experimentalmente, se cumple. Es decir, con una construcción que simule el enunciado, se pueden ver muchas instancias en las que sí se cumple; lo cual, y esto es lo que distingue a las matemáticas, no constituye una demostración. Sólo da evidencia de la veracidad del enunciado.

Como el Teorema de Desargues incluye dos implicaciones, veremos dos construcciones.

#### ESCENA 6. Teorema de Desargues I.

Para dibujar dos triángulos coloreados en perspectiva axial, el primero es totalmente libre; luego, en esta construcción, se fijó el eje y entonces el segundo triángulo vuelve a tener un punto libre, pero el segundo ya está restringido a estar en una línea y el tercero es obligado. Entonces...

...las líneas por los vertices correspondientes resul-

tan ser concurrentes. Es decir, están en perspectiva.

■  
EJERCICIO 9. Haz una construcción de dos triángulos coloreados en perspectiva axial, cuyo eje pueda ser cualquier línea, y no necesariamente una definida en la pantalla como la que presentamos. Comprueba experimentalmente que están en perspectiva.

EJERCICIO 10. Haz una construcción de dos triángulos coloreados en perspectiva axial, cuyo eje es la línea al infinito. ¿Puedes demostrar que están en perspectiva?

Usando, por supuesto, argumentos euclidianos. ¿Te recuerda a algún teorema clásico?

### ESCENA 7. Teorema de Desargues II.

Esta construcción de dos triángulos en perspectiva es *general*, es decir, en principio se pueden obtener todas las posibles instancias con los seis vértices en la pantalla; y con la herramienta zoom: todas las que tienen los seis vértices como puntos finitos o euclidianos clásicos. Pues el foco está definido por los cuatro vértices de dos lados co-

rrespondientes. Eso implica que el último vértice del segundo triángulo ya esté restringido e vivir en una línea. Y, según el Teorema de Desargues,... también están en perspectiva axial. ■

EJERCICIO 11. En la construcción anterior, intenta poner los dos triángulos como trasladados uno del otro; es decir, con foco como punto ideal y eje como la línea al infinito. ¿Puedes explicar por qué no es fácil?

EJERCICIO 12. Haz una construcción, tan general como puedas, de dos triángulos coloreados en perspectiva, pero en la cual un vértice de un triángulo es un punto ideal. En un segundo paso, verifica que están en perspectiva axial.

EJERCICIO 13. Haz una construcción de dos triángulos coloreados en perspectiva, pero en la cual un lado de un triángulo es la línea al infinito. En un segundo paso, verifica que están en perspectiva axial. Observa que el Teorema de Desargues da lugar a muchas instancias de él en el plano euclidiano clásico.

## 1.3. La herramienta armonía y nombres en el horizonte

Se pueden construir cuadrículas a partir de datos iniciales que no sean los vértices de una loseta. En la escena de retículas triangulares en perspectiva, vimos que basta con el horizonte y un triángulo con dos de sus lados seleccionados. A esta información la llamaremos una *base* pues gráficamente se especifica con dos segmentos que inciden en un punto, el *origen* y se relaciona con las bases de vectores del método cartesiano. Entonces, las líneas que generan los dos segmentos cortan al horizonte en los puntos de fuga básicos de la loseta; y ésta se obtiene trazando de ellos líneas al *final* del otro segmento. Además, el origen determina una diagonal distinguida: la que pasa por él.

También se puede generar la cuadrícula a partir de los tres puntos de fuga en el horizonte y un poquito más; veremos que esto equivale a la construcción clásica del *cuarto armónico* debida a Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).

### 1.3.1. El cuarto armónico

ESCENA 8. Construcción del cuarto armónico.

Considérese una línea que asumirá el papel de *horizonte* con tres puntos de fuga en ella, dos asociados a los *ejes* y uno distinguido como *diagonal*. A partir de un segmento en la dirección de alguno de los ejes, que fija la *escala* de la cuadrícula, con dos proyecciones desde los puntos de fuga básicos (primero a la diagonal y luego al otro eje) se

obtiene una base; de ella una loseta y, por tanto, una cuadrícula.

También se puede definir la escala con un segmento en la dirección diagonal. Que es una manera fácil de distinguir a este punto de fuga del par de básicos, y da información para una cuadrícula.

Llamemos  $O$ , de *origen*, al principio del segmento-escala, que es donde se cruzan los ejes. Al proyectar el final del segmento,  $P$ , a los dos ejes desde el punto de fuga del otro eje, se obtiene una base y una loseta cuyo horizonte y puntos de fuga son los dados.

Nótese que hemos intercambiado los nombres que habíamos usado antes. Ahora  $A$  y  $B$  son los puntos de fuga de los ejes de la loseta y  $X$  es el punto de fuga de la diagonal. Esto se debe a que queremos pensar a  $A$  y  $B$  como ‘constantes’ que definen una función de la línea horizonte,  $h$ , en sí misma, mientras que  $X$  juega ahora el papel de un punto ‘variable’ en ella; y éstos atributos son los que usualmente se asocian a esas letras.

Definimos que el otro punto de fuga diagonal de la loseta:

- $Y$  es el cuarto armónico (o el conjugado armónico o simplemente el armónico) de  $X$  con respecto a  $A$  y  $B$ .

Es claro que  $Y$  depende de  $X$  (mueva o anime  $X$  y observe que  $Y$  viaja en la dirección contraria en  $h$ ), y que  $A, X, B, Y$  es una cuarteta armónica, según la definición de la pag. 16, cuando  $X$  es diferente de  $A$  y  $B$ . Pero la construcción, aunque no genere una cuadrícula, también es válida cuando  $X$  es  $A$  o  $B$ , y en ese caso  $Y$  también lo es (dos pa-

rejas de puntos se colapsan, pero todas las líneas que se construyeron siguen siendo válidas) así que esta definición mediante una construcción sí se extiende a toda la línea  $h$ . Es una función de  $h$  en sí misma (a cada punto  $X \in h$ , léase “ $X$  en  $h$ ”, le asocia  $Y \in h$ ) que deja a  $A$  y a  $B$  en su lugar; se dice que son sus *puntos fijos*.

El Teorema Armónico afirma que la función cuarto armónico está bien definida en la línea  $h$  por  $A$  y  $B$  cuando éstos son distintos. Es decir, que el resultado de la construcción,  $Y$ , no depende de los puntos auxiliares  $O$  y  $P$  que se escogieron. Demostraremos a este teorema fundamental en el siguiente capítulo, pero la evidencia experimental de su validez es contundente: mueva a  $O$  y  $P$ .

Al mover  $O$  y  $P$  se generan distintas losetas que dan lugar a distintas cuadrículas en perspectiva pero todas ellas son *semejantes*. Al tener el horizonte y sus cuatro puntos de fuga fijos, son proyección de cuadrículas euclidianas hechas de líneas en las mismas dos clases de paralelismo, pero además, con losetas semejantes (que equivale a que las diagonales también sean paralelas).

La función cuarto armónico es tan importante para la Geometría Proyectiva que la hemos incorporado como herramienta a *ProGeo3D*.

*Con la herramienta “Armonía” activa, si se hace click simple en  $X$  y luego se selecciona a la pareja  $A, B$  con un gesto que arrastre uno al otro: se genera al cuarto armónico de  $X$  respecto a  $A$  y  $B$ ; en nuestro caso:  $Y$ . Con un nuevo color y un tamaño exagerado, hágalo. Hágalo también con otras ternas colineales en la escena y explore que aparecen nuevas coincidencias.*

*Tener al cuarto armónico como herramienta, simplificará muchísimo ciertas construcciones; pero hay que tener claro que siguen siendo de incidencia, simplemente nos ahorramos pasos repetitivos; es lo que se llama un macro en computación. Además, su uso como herramienta permitirá apreciar su poder.*

Por último, debemos señalar que el armónico de  $Y$  respecto a  $A$  y  $B$  es  $X$ . Para demostrarlo, basta tomar como puntos auxiliares de la construcción a los otros dos vértices de la loseta,  $Q$  y  $R$ . Esto lo que dice es que como función de  $h$  en  $h$ , el cuarto armónico respecto a  $A$  y  $B$ , es su propia función inversa. A estas funciones se les conoce como *involuciones*. De tal manera que la armonía como relación de parejas que definimos en la pag. 16 también se puede ver como función. ■

EJERCICIO 14. Observa que  $Y$  cambia de lado cuando  $X$  pasa por el punto medio del segmento  $AB$ . Es decir, que el cuarto armónico del punto medio de dos puntos respecto a ellos es el punto ideal de la línea. ¿Puedes demostrar esto con una construcción especial para el caso particular?

EJERCICIO 15. Usando la herramienta euclidiana “Parale-

la” y las dos de incidencia, haz una construcción que dé el punto medio de dos puntos  $A$  y  $B$ .

EJERCICIO 16. Usando la herramienta euclidiana “Punto medio” y las dos de incidencia, haz una construcción que dé la línea paralela a una línea por dos puntos  $A$  y  $B$  que pasa por un punto  $Q$  fuera de ella.

### 1.3.2. Sucesiones Armónicas

Uno de los usos de la herramienta “Armonía” es para la construcción de *sucesiones armónicas* que son los puntos en una línea (en el lienzo) donde se dibuja con buena perspectiva una sucesión de puntos que en la realidad serían equidistantes — los ejemplos son ubicuos: cómo vemos los postes en una calle, los pisos en un rascacielos, los barrotes de una reja, los escalones de una escalera o, el paradigmático: los durmientes de una vía de tren.

#### ESCENA 9. Sucesiones armónicas.

En el Plano Euclidiano, con dos puntos y el compás, se construye una sucesión equidistante.

Veremos que con dos puntos, que llamaremos  $0$  y  $1$ , se construye la sucesión armónica que corresponde a ver una sucesión  $0, 1, 2, 3, \dots$  de puntos equidistantes en perspectiva, cuando además se fija el infinito,  $\infty$ , como punto en esa línea; es decir, cuando se determina en ella su punto de fuga.

Para que el infinito pueda correr por toda la línea y así experimentar a gusto,... lo controlamos con una nueva línea definida por

puntos  $0'$  y  $1'$ . Tenemos entonces una loseta  $0, 1, 1', 0'$  y la sucesión que buscamos aparecerá en el eje-x de la cuadrícula que genera.

Hemos regresado a la nomenclatura de la primera escena, con  $X$  y  $Y$  para los puntos de fuga básicos (de los ejes) y  $A$  para el diagonal; aunque ahora  $X = \infty$  acapara nuestra atención.

Para encontrar el punto que corresponde al  $2$ , según la construcción en escalerita, se trazan otras dos líneas: primero a  $A$  para obtener el punto  $2'$  y

luego al punto de fuga  $Y$ , para obtener el 2.

La observación clave es que

- *el punto 2, es el armónico del 0 respecto al 1 y al  $\infty$ .*

Esto se demuestra con la loseta  $1', 2', A, Y$  que hemos coloreado. Pero también se puede obtener de golpe (en un solo trazo) con la herramienta “Armonía” activada en *ProGeo3D*: se selecciona el 0 y luego se arrastra el 1 al  $X = \infty$ .

De igual manera, el 3 se obtiene como el armónico del 1 (con la herramienta “Armonía”, se hace clic allí) con respecto al 2 y al  $\infty$  (se arrastra uno al otro). El 4 se obtiene como el armónico del 2 con respecto al 3 y al  $\infty$ . Y así sucesivamente.

Esto se puede iterar tanto como uno quiera. Lo hicimos hasta el 8. El hecho fundamental del argumento es que:

- *el armónico de  $\infty$  respecto a dos puntos corresponde a su punto medio.*

Pues se cumple cuando  $\infty$  es el punto ideal de la línea (ver Ejercicio 14), y

- *la armonía se preserva bajo proyecciones.*

Este hecho básico lo demostraremos después.

Así que el 16 es el armónico del 0 con respecto al 8 y al  $\infty$ . De manera análoga se obtuvo el 32. ■

EJERCICIO 17. Encuentra los puntos 12 y 48 usando solamente la herramienta “Armonía”.

EJERCICIO 18. Continúa la sucesión armónica hacia atrás, dibujando el  $-1$ , el  $-2$  y el  $-4$ .

EJERCICIO 19. La posición de  $\infty$  se controla moviendo  $0'$

y  $1'$ . Lleva  $\infty$  al otro lado de la línea hasta que se vean de ese lado el 32, el 16 y el 8.

EJERCICIO 20. En una nueva construcción dibuja una vía de tren con 10 durmientes y el horizonte. Trata de usar pocas líneas ¿Con cuántas puedes hacerlo?

EJERCICIO 21. Construye la sucesión armónica

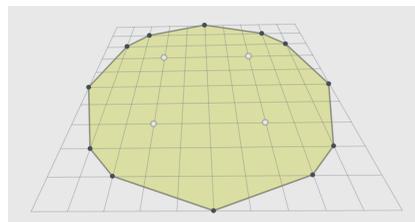
$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

a partir de tres puntos colineales arbitrarios que son 0, 1, 2.

EJERCICIO 22. En el Ejercicio 3 se pide construir una cuadrícula de cinco por cinco controlada por su loseta central; y se afirma que se puede lograr con 30 instrucciones. Hazla de nuevo: se logra con 23 instrucciones pues la herramienta armonía funciona bien si en el arrastre se selecciona una línea en vez de uno de los puntos; y entonces se considera como tercer punto a la intersección de la línea con la generada por los otros dos.

EJERCICIO 23. Observa que, por el Teorema de Pitágoras, se puede aproximar un círculo con doce puntos del timbiriche de un tablero de 10 por 10, como en la figura siguiente.

Desarrolla una construcción controlada por las esquinas del tablero central de 4 por 4, que dibuje esta elipse poligonal en perspectiva. No necesitas dibujar todo el tablero; trata de hacerlo con el menor número de instrucciones posible. Si lo trazas y lo sombras con cuidado, al deformar el cuadrilátero se llega a ver lo que podría describirse como hipérbolas poligonales.



### 1.3.3. Nombres para puntos de fuga

El matemático francés Jules Henri Poincaré (1854–1912), en una cita famosa, describe a las matemáticas como “el arte de nombrar..”; Rene Descartes, en cierta forma, debe el éxito de su método a que da *nombres significativos* a los puntos

del plano. Veremos que en la Geometría Proyectiva, empezando por la línea al horizonte, también se pueden dar nombres significativos a los puntos.

#### ESCENA 10. Nombres en el horizonte.

Como hemos visto ya, se determina una cuadrícula con tres puntos de fuga en el horizonte y un vector-escala fuera.

Para trazar una cuadrícula, se “*pasa la escala*” a la otra dirección básica usando la línea diagonal. Esto da una base y su loseta básica (con horizonte

h) pero, en lugar de la construcción en escalerita, se puede usar la herramienta “Armonía” en la diagonal (que es como se resuelve el Ejercicio 22).

Las coordenadas cartesianas del origen  $O$  son  $(0, 0)$  (ésta pareja ordenada es el nombre significativo que le asignó Descartes). Pero las líneas por  $O$  quedan determinadas por las coordenadas de cualquier otro punto en ellas y de aquí se obtendrá el nombre para su correspondiente punto de fuga.

Hemos puesto nombres a la cuarteta armónica del horizonte usando coordenadas separadas por dos puntos en vez de una coma (se les llama *coordenadas homogéneas*), pues representan *direcciones* de líneas. Así, los puntos de fuga básicos, que corresponden a los ejes (horizontal y vertical — ejes  $x$  y  $y$ — de la cuadrícula) son  $[1 : 0]$  y  $[0 : 1]$ ; pues los ejes pasan por  $O$  y los vértices de la loseta básica que, descritos por las coordenadas cartesianas que induce la cuadrícula, son  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$ .

Entonces,  $[1 : 1]$  y  $[-1 : 1] = [1 : -1]$  deben corresponder a los puntos de fuga de las diagonales.

sión armónica

$$\dots [0 : 1], [1 : 1], [2 : 1], [3 : 1], [4 : 1] \dots$$

que corresponde a los puntos de fuga en el horizonte de líneas que tienden al eje-x.

Análogamente, tomando de nuevo al  $[1 : 1]$  como 1, pero ahora

$$\begin{array}{l} \text{al } [1 : 0] \text{ como } 0 \\ \text{y al } [0 : 1] \text{ como } \infty \end{array}$$

se obtiene la otra sucesión armónica de puntos de fuga  $\dots [1 : 0], [1 : 1], [1 : 2], [1 : 3], \dots, [1 : n], \dots$ , cuyas líneas tienen *pendiente*  $n$ .

La notación que estamos usando, la de *coordenadas homogéneas* es una manera de hablar de la pendiente mediante una proporción (así, “ $1 : n$ ” es la proporción entre el 1 y el  $n$ , no el número  $n$  ni el  $1/n$ ), y entonces el infinito (la pendiente infinita) adquiere el elegante nombre  $[0 : 1]$ .

Estos puntos que tenemos señalados en el horizonte corresponden a puntos de fuga de líneas que

Nótese que en la figura prescindimos del uso de los paréntesis cuadrados para no sobrecargarla de tipografía.

Considerando

$$\begin{array}{l} \text{al } [0 : 1] \text{ como } 0 \\ \text{al } [1 : 1] \text{ como } 1 \\ \text{y al } [1 : 0] \text{ como } \infty \end{array}$$

se obtiene, con la herramienta armonía, a la suce-

van del origen  $O$  a los vértices del timbiriche en las primeras filas (y que se expresan en coordenadas cartesianas con un 1).

Otros puntos del timbiriche dan lugar a puntos de fuga como  $[2 : 3]$ ,  $[3 : 4]$ , o  $[4 : 3]$ ; o bien... con coordenadas de signo distinto.

Nótese que al denotar  $[x : y]$  al punto de fuga de la línea que pasa por  $(0, 0)$  y el punto  $(x, y)$ , se tiene que  $(x, y) \neq (0, 0)$  para que sea línea y que

$$[tx : ty] = [x : y] \quad \text{para cualquier } t \neq 0.$$

Por ejemplo  $[2 : 3] = [4 : 6] = [-6 : -9]$ .

Por último, observe que al fijar los tres primeros puntos en el horizonte, con nombres  $[1 : 0]$ ,  $[0 : 1]$  y  $[1 : 1]$ , todos los demás fueron cayendo en su lugar y esto no depende de dónde se puso el origen o qué escala se escogió. Compruébelo experimentalmente. Corresponde al hecho de que con tres puntos  $(0, 1$  e  $\infty)$  todos los enteros encontraban su lugar (la sucesión armónica), pero ahora, entraron los racionales y “por continuidad”, todo debía quedar definido. ■

EJERCICIO 24. Encuentra nuevos puntos de fuga trazando líneas por algunos vértices del timbiriche en la figura (no es necesario que pasen por  $O$ ).

EJERCICIO 25. Compruébese experimentalmente que líneas paralelas según la cuadrícula concurren en el horizonte.

## 1.4. Las recetas de Alberti

Hemos visto con cuidado cómo construir andamios constructivos de planos vistos en perspectiva. Y aunque haya una tercera dimensión implícita pues se habla de dos planos, no nos hemos planteado explícitamente el problema de plasmar la tercera dimensión en un plano. Antes de hacerlo, vale la pena relatar qué tipo de procedimientos empleaban los pintores del renacimiento; pues no corresponden del todo a lo que hemos visto aquí, aunque históricamente fueron los precursores.

Leone Battista Alberti, en su libro *Della Pittura* publicado en 1436, decía que lo primero que hay que hacer para preparar un cuadro (y recuérdese que para él pintar era plasmar en el lienzo una escena tridimensional), es trazar en el lienzo una línea horizontal a la altura de los ojos, y luego daba la receta para cómo trazar bajo ella una cuadrícula en perspectiva, que llamaba “pavimento” y era un piso teórico o auxiliar.

### ESCENA 11. Pavimento de Alberti.

La receta de Alberti para trazar el “pavimento”,

corresponde a nuestra construcción anterior con el horizonte horizontal, con el  $[0 : 1]$  situado en el centro del horizonte (justo frente al ojo teórico del pintor-observador que representa al punto de fuga de la *profundidad*), y con el vector básico que determina la escala también horizontal (entonces  $[1 : 0]$  no sólo se sale de la pantalla sino que se va, literalmente, al infinito). Para poder hacerlo, a éste último punto de fuga hay que definirlo como intersección de dos rectas (el eje- $x$  y el horizonte)

y, para tener libertad de movimiento con el tercer punto de fuga, el diagonal  $[1 : 1]$ , también lo controlamos con una línea que sale del origen  $O$ .

El punto clave de la receta de Alberti es que con base en el pavimento (esta cuadrícula), ya se pueden deducir geoméricamente las escalas que deben usarse para los objetos o personajes colocados en las distintas profundidades de la escena. Y con nuestra herramienta de geometría dinámica, lo podemos hacer explícitamente.

Sea  $P$  un punto variable en el eje de la profundidad (línea de  $O$  al  $[0 : 1]$  o eje- $y$ ). Trazamos de ahí una horizontal (línea al  $[1 : 0]$ ) y se marcan los puntos de la sucesión equidistante (cuya distancia real es la misma que determina la escala).

El punto  $P$  define en la “realidad 3D” un plano paralelo al lienzo, *el plano de profundidad  $P$* , y queremos dibujar una cuadrícula en él (ahora sí: hay más de dos planos en consideración).

Por los puntos de la sucesión equidistante se trazan guías verticales (paralelas al eje- $z$  de la escena y al lado vertical del lienzo) como perpendiculares al horizonte. (*Usamos la herramienta euclidiana*

*“Perpendicular”, cuyo uso es análogo al de “Paralela”.*) Y nos queda el problema de *pasar la escala* del eje horizontal en  $P$  al vertical (la altura) ahí.

Alberti lo haría de inmediato y sin pensarlo dos veces: sacaría un compás de su morral de herramientas y trazaría un círculo centrado en  $P$ ...

...pues éste corta al eje vertical en un punto (con la misma distancia al centro). De ahí se traza la horizontal (línea a  $[1 : 0]$ ) para definir una loseta y, finalmente, su diagonal indica dónde trazar las de-

más horizontales.

Se obtiene así una cuadrícula que hemos enmarcado con segmentos para que se distinga. Al deslizar su punto de control  $P$  hacia el infinito, se observa el cambio de escala debido a la profundidad y que afecta a toda la composición. Ajustarse a éstas escalas es lo que dará “realismo” al cuadro, insistía Alberti. Y tenía razón: así vemos al mundo.

Por supuesto, esta preparación del lienzo casi nunca aparece en la versión final del cuadro; es auxiliar para la composición, es un *andamio constructivo*. Aunque hay cuadros, como el que veremos en la siguiente escena, donde se acerca mucho al resultado final.

Queremos remarcar, pues será muy importante después, que el trazo del círculo (*con la herramienta distintiva de la geometría euclidiana*), no es totalmente correcto en términos de la perspectiva.

Seamos justos. Para Alberti, que trazaba el horizonte y todas las horizontales como paralelas a ese borde del lienzo (el  $[1 : 0]$  siempre fijo en el infinito), el uso del círculo sí es correcto: las cuadrículas de profundidad resultan euclidianas. Pero

a nosotros, que podemos usar ese punto de fuga como variable, nos aparecen cosas raras:

...al mover ese punto de fuga, la cuadrícula parece girar como reja. Pero el círculo se ve tieso, no gira con ella, debería convertirse en elipse; su diámetro horizontal debería reducirse con respecto al vertical, y las proporciones de la reja no se ven bien (realistas). Resolveremos este problema en el Capítulo 3, primero de la Parte II. ■

Hay pinturas famosas como *La escuela de Ate-*

nas de Rafael, pintada entre 1509 y 1511 en una pared del Vaticano, en las que el cuadro mismo se aproxima mucho a la receta de Alberti. El punto de fuga principal está justo entre Platón y Aristóteles en el centro de la composición.

#### ESCENA 12. La escuela de Atenas.

Al sobreponer al cuadro un andamio constructivo a la *Albertí*, se puede apreciar experimentalmente la técnica tan depurada en perspectiva a la que llegó Rafael.

Es interesante observar que el baúl sobre el que trabaja Heráclito tiene aristas que no están en las direcciones principales de la arquitectura y parece estar ahí como un guiño de Rafael a perspectivas mas complicadas. ■

#### 1.4.1. Planos y horizontes

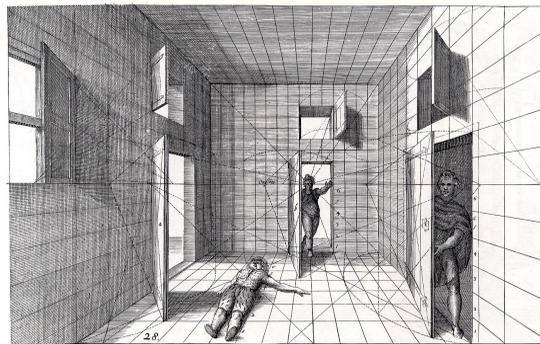
En la realidad no hay líneas. Hay aristas que sugieren segmentos y estos, a su vez, sugieren su continuación abstracta como líneas. Análogamente, cada porción de plano en una escena real (por ejemplo, una pared, un piso, un escalón, un techo, la cara de un baúl o una puerta entreabierta) genera un plano –su continuación *omnidireccional*, abstracta e infinita– y como tal, define su *línea horizonte* en el lienzo. Es donde corta al lienzo, el plano paralelo que pasa por el ojo del pintor; justo ahí donde veríamos que se “acaba el plano” si en realidad fuera infinito, ya que al girar la vista un poquitito más dejaríamos de verlo pues el “rayo de atención” que sale de nuestro ojo ya no le pega.

De manera análoga, el punto de fuga de cual-

quier línea (y volvemos a insistir, no es que haya líneas en la escena real pero sí hay muchos segmentos que, en abstracto, las generan) es donde corta al lienzo la línea paralela (y abstracta) trazada por el ojo; ahí dónde estaríamos enfocando al infinito (hipotético) de la línea —justo ahí, hacia donde debemos voltear cuando alguien nos señala una estrella: el índice y el ojo de quien apunta definen una línea que tiene a la estrella, y pretende que enfoquemos nuestra atención en la dirección paralela, con nuestro propio ojo.

Así, el horizonte que traza Alberti es la línea correcta (horizontal y a la altura de los ojos). Pues es la línea horizonte del plano que representa al suelo, pero también lo es del techo y de cualquier otra porción de plano horizontal que aparezca en la escena —una mesa o la tapa de un baúl, por ejemplo. Y el centro de esa línea horizonte (donde pusimos el  $[0 : 1]$ ) es el punto de fuga de todas las líneas perpendiculares al lienzo (las de la dirección franca de la profundidad) suponiendo, como lo ordena Alberti, que el lienzo es vertical y que el ojo del pintor está frente al centro del cuadro.

En la pintura de Rafael, se puede apreciar que el pintor está arriba del piso (quizá subido sobre un baúl como el de Heráclito), pero queda un poco más abajo de Platón y Aristóteles pues el horizonte pasa por sus corazones, no por sus ojos.



En el grabado atribuido a Alberti que reproducimos arriba, se muestra que tenían claro, al menos él y su maestro Brunelleschi, cómo es que las líneas paralelas (de las puertas y ventanas entreabiertas) deben dibujarse convergiendo a puntos de la línea horizonte que comparten el piso y el

techo (del cuarto), y que al pasar por los ojos de dos personajes indican que el pintor está a su altura. Pero además, también sabían cómo se deben trazar los círculos y podían deducir proporciones visuales de personajes no verticales.

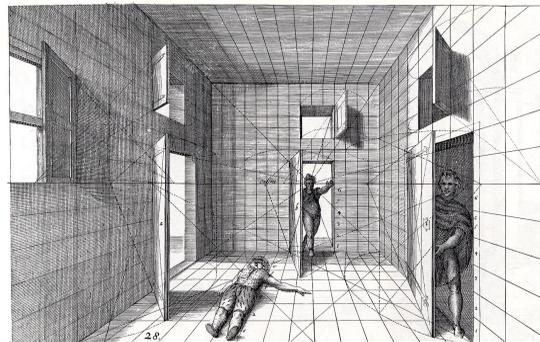
Sin embargo, hay un error de perspectiva: el piso que se ve tras dos de las puertas entreabiertas debería concluir a la altura de los ojos de los personajes, pues debería coincidir con el horizonte. Y que ese horizonte se vea a la altura de las rodillas del personaje en la puerta del fondo, implica que el piso del cuarto está inclinado hacia el espectador y eso nos da una sensación de incomodidad —sentimos que algo está mal.

Lo que queremos remarcar para finalizar esta sección, pues será fundamental para la siguiente, es que en un cuadro donde se dibuja una escena tridimensional:

- *cualquier plano tiene una línea horizonte en el lienzo; y los planos paralelos comparten un mismo horizonte.*

Así como vimos en las secciones pasadas que los puntos en la línea horizonte son puntos de fuga

de una dirección (las líneas tienen punto de fuga), los planos tienen asociados líneas-horizonte formadas por los puntos de fuga de las líneas que están en, o son paralelas a, ellos.



## 1.5. Cubo en perspectiva

Queremos ahora usar lo que hemos aprendido, para dibujar (o proyectar a un plano llamado lienzo) una caja sólida: algo de tres dimensiones armado con pedazos de planos, con segmentos como aristas y muy cercano a nuestra experiencia cotidiana. En vez de caja, lo llamaremos *cubo* en analogía con que llamábamos cuadrados o losetas a los paralelogramos que aparecieron en las secciones anteriores; aunque estrictamente hablando, el “cubo” sea un paralelepípedo.

En un cubo, las aristas (las líneas que éstas generan) y sus caras (los planos en que viven) tienen relaciones de paralelismo muy nítidas y distintivas. Sus seis planos se parten en tres parejas paralelas (las caras opuestas). Y tiene 12 aristas que se agrupan en tres cuartetos de aristas paralelas y entonces las líneas que generan determinan tres direcciones, o ejes, a los que nos referiremos como “el *x*”, “el *y*” y “el *z*”, y éstos dan lugar a tres puntos de fuga. A diferencia de Alberti, no nos interesa toda una escena en “la realidad”, nos interesa dibujar

un simple cubo; sus ejes no necesariamente están relacionados con el piso o la dirección implacable que define la gravedad; son libres (tome un cubo y obsérvelo, gírelo en su mano: queremos una instantánea de eso). Sin embargo, nos ayudará mucho en el lenguaje, usar los nombres convencionales de las direcciones.

### ESCENA 13. Cubo en perspectiva.

Empezamos la construcción con un triángulo de puntos de fuga que serán los de las aristas del cu-

bo. Los hemos llamado  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[0 : 1 : 0]$  y  $[0 : 0 : 1]$ , haciendo uso de tres coordenadas homogéneas y siguiendo la filosofía de la Escena 10. Hay que notar que el punto de fuga *vertical* o del eje-z (el  $[0 : 0 : 1]$ ) está definido como intersección de líneas para poder moverlo a voluntad en el plano; y que esas líneas que lo definen están controladas por los puntos diagonales que hemos llamado  $[1 : 0 : 1]$  y  $[0 : 1 : 1]$ . Así, las tres líneas del triángulo serán los horizontes de los tres planos coordenados y quedarán definidas porque una de sus coordenadas homogéneas siempre es 0.

La información geométrica que falta es el origen O (que será el *vértice básico* del cubo) y una escala en una de las direcciones principales (en este caso, la del eje-x, la cual quedará determinada por otro vértice). Estos dos, son los primeros puntos “reales” que dibujamos, pues los demás vienen de “lo que se ve en el infinito” o, si se prefiere, sus “proyecciones” que se definen en el lienzo como puntos de fuga auxiliares.

Estos son los datos.

Para construir el cubo, con el punto de fuga dia-

gonal  $[1 : 0 : 1]$  se pasa la escala al eje-z como en la Escena 10. Lo cual da la primera cara.

De la misma manera, bajamos la escala del eje-z al eje-y. Tenemos entonces dos vectores definidos tanto en la cara inferior como en la superior del cubo. Igual que en la Escena 8, ...

...y como en ella, se completan las losetas para tener ya los ocho vértices del cubo.

Sólo falta la arista vertical posterior.

Al trazarla y extender su línea, resulta que, como

por arte de magia, pasa justo por el punto de fuga vertical. La geometría es coherente.

Pero no es magia, pues hemos construido el cubo de manera que cada cara sea paralela a su opuesta.

Es interesante jugar con esta figura...  
...o con esta más simple. Pues es ilustrativo de cómo vemos el mundo, ya que se puede lograr, en principio, casi cualquier vista de cualquier paralelepípedo. Lo dejamos al lector como tarea lúdica y formativa, por ejemplo:

- cambiar las proporciones de la caja con los infinitos diagonales,
- ver la esquina de un edificio desde distintas alturas y chaparro o rascacielos
- ver un ring de boxeo visto desde arriba (para esto hay que hacer que el punto de fuga del eje-z quede abajo),
- hacer que  $O$  rebase las líneas-horizonte y ver qué sucede, invertir la escala, etc.

Lo que queremos aclarar en el siguiente apartado es por qué nunca se necesitó el punto de fuga diagonal del plano horizontal. Lo cual nos llevará al terreno de dos geómetras famosos, cuyos teoremas se relacionan a través de la armonía y el Teorema de Desargues —y esto estará sucediendo en el “plano al infinito”.

### 1.5.1. Configuraciones de Ceva y Menelao

A partir de la figura del cubo en perspectiva que tenemos ahora, construiremos la siguiente escena.

#### ESCENA 14. Cubo de Ceva.

Lo primero que hay que notar es que hemos coloreado los vértices de la base del cubo con cuatro colores. Tres de ellos (rojo, verde y azul) corresponden a los de las direcciones básicas y el cuarto (negro) al origen. Los vértices opuestos a los de la base heredan el color.

Si trazamos las diagonales por  $O$  en sus tres caras, llegamos por construcción a los dos puntos diagonales de las caras verticales, que fueron puntos de control, y obtenemos —¡por primera vez!— el punto diagonal horizontal,  $[1 : 1 : 0]$ .

Y si trazamos las diagonales paralelas en las caras opuestas veremos que pasan por donde deben.

Lo que queremos mostrar es que los tres puntos de fuga diagonales cumplen una relación, o condición geométrica, que fue enunciada por Giovanni Ceva (1647–1734) como hipótesis para su célebre teorema. La definición es la siguiente:

- Se dice que tres puntos en los lados de un triángulo forman una **configuración de Ceva** si sus líneas al vértice opuesto son concurrentes.

Así que con cualesquiera dos de ellos, se puede obtener el tercero. Esto explica por qué no fue necesario definir el punto de fuga diagonal del horizonte horizontal: depende de los puntos de control. Y hay que recordar que a ésta configuración ya la habíamos visto. En la Escena 5, Paso 7, había

aparecido como los vértices de dos triángulos exteriores consecutivos en la construcción de una redícula triangular; y se usó al Teorema de Desargues para ver la concurrencia de las líneas entre vértices correspondientes.

Que *los puntos diagonales forman una configuración de Ceva*, se puede argumentar a partir de que la perspectiva del cubo es coherente, y de que las líneas descritas (de un punto de fuga diagonal al vértice opuesto en el triángulo básico) son los horizontes de tres planos que cortan al cubo en dos mitades simétricas:

hay un plano rojo,  
otro pintado de verde  
y el tercero es azul.

Estos tres planos comparten a la “*tri-diagonal*”: la línea (gris) que va del origen,  $(0, 0, 0)$ , al vértice opuesto en el cubo,  $(1, 1, 1)$ . Por tanto, el punto de fuga de la tri-diagonal tiene que estar en los horizontes de los tres planos: es el punto deseado (el de Ceva); y además, debe llevar el nombre  $[1 : 1 : 1]$ . ■

El Teorema de Ceva original trata sobre las dis-

tancias de una configuración de Ceva a los vértices del triángulo en el que vive: da una fórmula algebraica explícita que deben cumplir. Está muy relacionado, por el tipo de conclusión, con otro célebre teorema: el de Menelao enunciado 16 siglos antes y atribuido a Menelao de Alejandría (70 – 140). La conclusión es del mismo estilo, pero la hipótesis es una *configuración de Menelao*:

- *tres puntos en cada uno de los lados de un triángulo, los cuales son colineales.*

### ESCENA 15. Cubo de Ceva y Menelao.

El plano (gris) que generan los extremos de los tres vectores básicos en el cubo (y que salen de  $O$ ), determina una línea horizonte que, a su vez, corta al triángulo de los tres horizontes básicos en una configuración de Menelao (para verla, hay que acercar alguno de los puntos diagonales de control a su vértice del triángulo, o de plano pasarlo del otro lado).

Esta configuración de Menelao ( $[1 : -1 : 0]$ ,  $[1 : 0 : -1]$ ,  $[0 : 1 : -1]$ ) consta de los puntos de fuga de las diagonales en las caras del cubo que no pasan por  $O$ . Además, ...

...es la armónica de la configuración de Ceva, en el sentido de que en cada línea del triángulo de horizontes ahora tenemos una quarteta armónica. Cada una de las caras del cubo que contienen al origen, es una loseta que define a la quarteta armónica correspondiente. ■

En el Capítulo 2 demostraremos que la armonía relaciona a las configuraciones de Ceva y de Menelao sin usar la perspectiva del cubo; es más, sin salirse para nada del plano. El ingrediente fundamen-

tal será el Teorema de Desargues, cuya elegancia y audacia arrancó, en buena medida, a esta geometría como teoría matemática.

Por último, debemos señalar que una vez que está determinado el cubo en el lienzo, se puede determinar cuál debe ser la posición de cualquier punto del espacio. Pues usando el método de coordenadas y como ya sabemos determinar puntos en los tres planos básicos con sus cuadrículas, podemos llegar a él usando las tres direcciones princi-

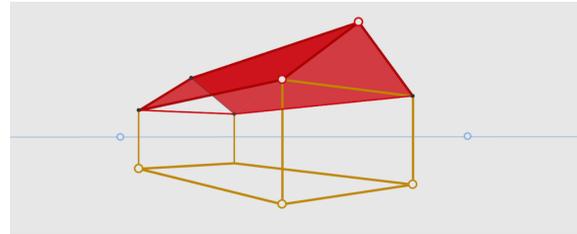
pales con sucesiones armónicas adecuadas.

EJERCICIO 26. Encuentra los puntos de fuga de las otras tres tri-diagonales del cubo. Hay una roja, una azul y una verde, cuyos puntos de fuga deben llamarse  $[-1 : 1 : 1]$ ,  $[1 : -1 : 1]$ ,  $[1 : 1 : -1]$  respectivamente. Se pueden encontrar con trazos entre puros puntos de fuga y luego corroborar que son los puntos de fuga de las direcciones respectivas.

EJERCICIO 27. Colorea las cuatro regiones triangulares que tienen como vértices a los puntos de fuga básicos, y asócialas con esquemas de signos en las coordenadas homogéneas de sus puntos de fuga.

EJERCICIO 28. En la escena anterior, localiza al punto P con coordenadas  $(2, 1, 1)$ ; suponiendo, por supuesto, que O es el  $(0, 0, 0)$  y sus tres adyacentes en el cubo son la base canónica  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . ¿Puedes determinar cuál es el punto de fuga de la línea de O a P? Argumenta tu construcción.

EJERCICIO 29. Haz una construcción que produzca la siguiente figura de una casita. Las líneas verticales están trazadas como perpendiculares al horizonte (el punto de fuga  $[0 : 0 : 1]$  está en el infinito, a la Alberti). Además de los del horizonte, hay cinco puntos de control.



## Capítulo 2

# Geometría Projectiva

La idea revolucionaria de Girard Desargues para liberar a la teoría geométrica que estaba agazapada bajo los métodos del dibujo en perspectiva, fue incorporar *a priori* los puntos que en el dibujo de una escena surgen como puntos de fuga pero que no existen en la escena misma, es decir, solo aparecen *a posteriori* (en el acto de dibujar).

Esto obliga a ampliar nuestra visión del mundo; a incorporar, como parte de la realidad —al menos de manera formal o discursiva— a entes abstractos que no podemos ver ni tocar, tan solo intuir. Y

eso nunca ha sido fácil para el ser humano, excepto cuando incorpora seres antropomórficos (como los dioses griegos o Spiderman) o con formas animales (como los unicornios o Mickey Mouse).

También violenta la idea tan arraigada de que el espacio que estudia la geometría y el que habitamos son el mismo objeto. Y no: lo que estudia la geometría es un modelo teórico que aproxima al espacio físico real; aceptar esto —que no son lo mismo— permite pensar en otros modelos. Girard Desargues es el pionero que echa a andar por

estos senderos con la incorporación de los *puntos ideales* para crear un nuevo escenario en el cual se puede hacer geometría... y la hace. Después de definir con precisión a ese nuevo espacio y ver sus principios generales, demostraremos el Teorema de Desargues que encarna la filosofía de esta nueva geometría.

El presente capítulo está dividido en tres secciones. En la primera se formaliza la definición del *Espacio Desarguesiano* y se establecen sus principios de incidencia básicos; también se estudia cómo el concepto primordial de *proyección* se vuelve matemáticamente muy trabajable (se vuelve una biyección mientras que en el Espacio Euclidiano ni a función llegaba).

En la segunda sección, se demuestran formalmente los teoremas o resultados que ya aparecieron en el Capítulo 1 y que, si acaso, habíamos argumentado experimentalmente; queda con ello de manifiesto el poderío teórico y la elegancia de la Geometría Projectiva.

En la tercera sección, enfrentamos el hecho de que el Plano Projectivo es en sí un objeto revolu-

cionario. Para algunos, puso en duda su pertinencia o su carácter intuitivo y fue motivo para huir de esta geometría. Pero para otros, más audaces, abunda en su interés; pone en perspectiva la concepción moderna de las matemáticas pues motiva la pertinencia de la topología y contribuye a la flexibilización de la geometría.

## 2.1. Definición, Principios de Incidencia y proyecciones

Para ser precisos en esa definición seminal que atribuimos a Desargues, es conveniente introducir notación y especificar muy bien su contexto.

### 2.1.1. El Espacio Euclidiano

Sean  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbb{E}^2$  (léanse “E-tres” y “E-dos”) el Espacio y el Plano Euclidianos, respectivamente. El superíndice indica la dimensión. Corresponde al número de coordenadas con que se pueden determinar sus puntos. Por lo cual, para estos espacios también es muy usada la notación  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$ , en donde se presupone que  $\mathbb{R}$  denota a la recta de los números reales; pero esto último indica que se va a dar preferencia al método de coordenadas. Y eso no lo haremos, porque queremos seguir usando el método sintético de la geometría clásica (puntos, líneas y construcciones), que era el que usaba Desargues –recuérdese que Descartes era coe-

táneo suyo. Por lo tanto, preferimos usar la notación  $\mathbb{E}^3$  y  $\mathbb{E}^2$ . En ellos, como conjuntos de puntos, se tiene la noción de *líneas* (o *rectas*) como ciertos subconjuntos distinguidos (que asociamos a la herramienta *regla*). Y se cumple que *por cualesquiera dos puntos pasa exactamente una de ellas*. Esto es crucial en las construcciones o dibujos y es, probablemente, la idea más trascendente que se plasmó en *Los Elementos* de Euclides en el sentido de que todo arranca a partir de ella.

En el espacio  $\mathbb{E}^3$ , hay otros subconjuntos distinguidos, llamados *planos*. Cada uno de ellos es equivalente al plano  $\mathbb{E}^2$ , o es una instancia de él. Además, en  $\mathbb{E}^2$  y en  $\mathbb{E}^3$ , se puede desarrollar una buena noción de distancia (la “*metría*” de la palabra “*geometría*”), y tienen muy bien definida la noción de *paralelismo*. Dos líneas en un plano son paralelas, si no se tocan; y en el espacio  $\mathbb{E}^3$ , si además de no tocarse, son *coplanares* (es decir, están contenidas en un mismo plano).

El paralelismo es una relación de equivalencia entre las líneas de  $\mathbb{E}^3$ . Es decir, las líneas de  $\mathbb{E}^3$  se agrupan en clases de paralelismo, a las que tam-

bién se les llama *haces paralelos*, que “lleenan” el espacio (cada punto de  $\mathbb{E}^3$  está en exactamente una de las líneas de cualquiera de esas clases de equivalencia).

Si no tuviéramos todo eso muy claro, la civilización no habría llegado tan lejos. Es algo tan arraigado en nuestra cultura y en nuestra manera de pensar, que confundimos  $\mathbb{E}^3$  con el espacio físico en el que vivimos, pues lo modela perfectamente en nuestro entorno inmediato. De hecho, eso es lo que hemos hecho aquí mismo en el capítulo anterior cuando hablamos de perspectiva, de proyectar, de pintar, del “plano del lienzo”, etcétera. Los métodos de la perspectiva se deducen de eso que se llama geometría euclidiana.

### 2.1.2. El Espacio Desarguesiano y sus Principios de Incidencia

Pero llegó Desargues y amplió la geometría:

- El *Espacio Desarguesiano*, que denotaremos por  $\mathbb{D}^3$ , es el conjunto  $\mathbb{E}^3$  junto

con nuevos puntos que llamaremos *ideales*: agregamos un punto ideal por cada clase de paralelismo de líneas.

Éstos, los de  $\mathbb{E}^3$  más los puntos ideales, son los puntos de  $\mathbb{D}^3$ , y para hacer geometría en este nuevo espacio debemos definir las líneas.

- Las *líneas* del Espacio Desarguesiano  $\mathbb{D}^3$  son de dos tipos: (1) las líneas de  $\mathbb{E}^3$  pero agregándoles el punto ideal correspondiente a la clase de paralelismo a la que pertenecen y (2) para cada plano de  $\mathbb{E}^3$ , se toma como línea al conjunto de puntos ideales de las líneas contenidas en él y la llamamos su *horizonte* o su *línea al infinito*; a éstas últimas también se les llama *líneas ideales*.

Y, por último, definimos los planos de  $\mathbb{D}^3$ :

- Hay dos tipos de planos: (1) los planos de  $\mathbb{E}^3$  a los que agregamos su horizonte y (2) el llamado *plano al infinito* que es el conjunto de todos los puntos ideales del espacio.

Entonces, en concordancia con nuestra definición de la página 23, el *Plano Desarguesiano*,  $\mathbb{D}^2$ , es cualquier plano de  $\mathbb{D}^3$ . Es como  $\mathbb{E}^2$  junto con una *línea al infinito* que tiene un punto ideal por cada clase de paralelismo de líneas en él.

Este es el escenario donde se desarrolla la geometría proyectiva.

Las líneas en  $\mathbb{D}^3$ , también llamadas *líneas proyectivas*, ya no se modelan en abstracto con los números reales como las líneas euclidianas, sino que se modelan con el círculo, pues al nuevo punto ideal que se les añadió, se llega continuamente en las dos direcciones de la línea. No hay un punto ideal a un lado de la línea y otro al otro lado, el punto ideal de una línea es uno solo. En porciones pequeñas las líneas del Espacio Euclidiano y las del Espacio Desarguesiano se ven iguales, son indistinguibles, pero globalmente son diferentes: cuando un punto viaja en un solo sentido sobre una línea proyectiva, regresa por el otro lado y al viajar dos puntos en sentidos opuestos se cruzan antes de regresar a su punto de partida; mientras que al hacer esto en la línea euclidiana, nunca jamás se vuelve

a tener noticia de ellos.

Hoy en día podemos decir con contundencia que las líneas euclidianas y las líneas proyectivas son “topológicamente distintas”. Otra manera de ver esto es observar que la línea euclidiana se *separa* en dos “rayos” al quitarle un punto; mientras que a la línea proyectiva se necesita quitarle dos puntos para separarla en dos partes. De aquí, que para definir un segmento en el Plano Proyectivo se necesitó más información.

Los **Principios de Incidencia** básicos que cumple el Espacio Desarguesiano  $\mathbb{D}^3$  son:

PI:(0 — 0). *Por dos puntos pasa una línea única.*

PI:(2 — 2). *Dos planos se cortan en una línea.*

PI:(2 — 1). *Un plano y una línea que no está en él, se cortan en un punto único.*

PI:(1 — 1). *Dos líneas se tocan si y sólo si están en un mismo plano (son coplanares).*

PI:(1 — 0). *Una línea y un punto que no está en ella, generan, o están en un único plano.*

Nótese que aprovechando la *dimensión* (0, 1 y 2 para puntos, líneas y planos respectivamente) hemos puesto nombres a los principios de incidencia. Además, debemos especificar que cuando usamos el calificativo “dos” en los enunciados, suponemos que se trata efectivamente de dos entes distintos.

Hay que remarcar lo “democrático” de estos principios: se aplican por igual a todos los objetos geométricos de la misma dimensión. No hacen excepciones. Ni sobre su procedencia (viejos o nuevos), ni sobre relaciones íntimas o especiales (ya no hay paralelismo). Y en buena medida, en esta generalidad democrática recae el encanto teórico de la geometría proyectiva.

Aunque las demostraciones de los principios tienen aún un tinte “segregacionista”. Pues hay que revisar los casos de acuerdo al origen de los sujetos involucrados. Veamos como ejemplo el primer principio de incidencia,  $PI:(0-0)$ , que también podemos llamar **Axioma de Euclides**, por ser justo el primero de su sistema axiomático.

Dados dos puntos en  $\mathbb{D}^3$ , debemos exhibir una línea que pase por ellos. De acuerdo al linaje u ori-

gen de los puntos, hay de tres sopas: los dos son veteranos euclidianos (o finitos), los dos son ideales nuevecitos (y viven en el infinito) o bien, son uno de una clase y el otro de la otra.

Si los dos son euclidianos, la línea euclidiana por ellos se completó a ser la línea proyectiva (en  $\mathbb{D}^3$ ) que queremos. Su unicidad se sigue de la euclidiana.

Segundo, hay que ver el caso en que tenemos uno y uno. La línea euclidiana que pasa por el punto finito en la clase de paralelismo que corresponde al punto ideal, es la línea deseada. Junto con la unicidad esto corresponde al Axioma de las Paralelas de la geometría euclidiana.

Y si los dos puntos son ideales, hay que considerar un punto euclidiano auxiliar: por él pasan líneas que van a pegarle a los dos puntos ideales (usando el segundo caso), entonces el plano euclidiano que generan determina su horizonte que es una línea en el infinito que pasa por los dos puntos ideales. Ésta no depende del punto auxiliar que escogimos, pues si lo cambiamos, se obtiene un plano (euclidiano) paralelo, y estos (ya dentro de

$\mathbb{D}^3$ , completados con sus puntos ideales) comparten su línea al infinito: sus puntos ideales son exactamente los mismos. Dicho de otra manera, dos planos euclidianos que comparten dos pares de líneas (euclidianas) paralelas, son paralelos y entonces comparten horizonte: cada línea en uno tiene paralelas en el otro.

El otro principio de incidencia que debemos discutir por su importancia es PI:(1 — 1):

Consideremos dos líneas en  $\mathbb{D}^3$ . De nuevo hay tres casos. El primero es cuando ambas son euclidianas. Que *se toquen* o que *sean concurrentes* quiere decir que tienen un punto en común. Si éste es euclidiano, las dos líneas *generan*, o están en, un plano; y si es ideal quiere decir que son paralelas y por tanto son coplanares. Y al revés, si son coplanares, o se intersectan o son paralelas en cuyo caso comparten su punto ideal.

El segundo caso es cuando una línea es euclidiana y la otra ideal. Si se tocan es que comparten un punto ideal y esto implica que la línea euclidiana está en uno de los planos cuyo horizonte es la ideal. Y ésta es la única manera en que pueden ser

coplanares: hay un plano euclidiano que contiene a la línea euclidiana tal que su horizonte es la línea ideal y, por supuesto, comparten un punto ideal.

Finalmente, queda el caso de dos líneas ideales. Al ser distintas, son horizonte de dos planos euclidianos no paralelos y estos se intersectan en una línea euclidiana cuyo punto ideal es común a las originales. Nótese que en este último caso las líneas ya eran coplanares pues habíamos definido a todos los puntos ideales como un plano (el plano al infinito), así que sólo hubo que demostrar que se tocaban.

Vale la pena concluir esta sección con el sello distintivo de la geometría que arrancó Desargues:

- *en un plano proyectivo cualquier par de líneas se intersecta.*

EJERCICIO 30. Demuestra los otros tres principios básicos de incidencia.

EJERCICIO 31. Cuáles de los principios básicos de incidencia se cumplen en el Espacio Euclidiano y cuáles no: da ejemplos de las violaciones.

### 2.1.3. Proyecciones

El nombre de “geometría proyectiva” viene, como ya hemos mencionado, de las *proyecciones*: es uno de los conceptos centrales de la teoría. Con el Espacio Desarguesiano ya establecido, es momento de darles su lugar y dotarlas de un significado más preciso. Con él, volvemos a ver rápidamente los distintos ejemplos físicos de proyecciones pues nos conducirá, en la siguiente sección, a fundamentar el hecho de que a los puntos ideales se les debe llegar continuamente por ambos lados; que podría parecer contrario a la intuición.

En la matemática moderna se tiene el concepto de *función*, y las proyecciones son ejemplos (no numéricos) de funciones. Usaremos este concepto como algo ya familiar; aunque la notación que usaremos no va a corresponder a la que se usa para las funciones en el Cálculo, pues nos interesa que la composición de funciones sea fácil de leer.

Dados un punto  $O \in \mathbb{D}^3$  (se lee “O en  $\mathbb{D}^3$ ” y juega el papel de Ojo del Pintor) y un plano  $\Lambda$  (léase “Lambda”, que representa el lienzo y que será

el *rango* o *contradominio* de la función), que **no** contiene a  $O$  (escrito  $O \notin \Lambda$ ), denotaremos por

$$\pi_{O,\Lambda}$$

a la función *proyección desde O (o con foco O) al plano  $\Lambda$* , que manda a un punto  $X$  en (o asocia a  $X$  con) la intersección del plano  $\Lambda$  con la línea que pasa por  $O$  y por  $X$ .

Por el principio de incidencia  $PI:(0-0)$ , para un punto  $X \neq O$ , hay una línea que pasa por  $O$  y  $X$ ; y por  $PI:(2-1)$ , se tiene que está línea corta a  $\Lambda$  en un punto bien definido (pues  $O \notin \Lambda$ ). Así que para cualquier  $X$  distinto de  $O$ , su proyección en el lienzo  $\Lambda$  es un punto de  $\Lambda$  que denotaremos por

$$X \cdot \pi_{O,\Lambda}$$

para leerse “ $X$  proyectado desde  $O$  a  $\Lambda$ ” o “la imagen de  $X$  bajo la proyección de  $O$  a  $\Lambda$ ” o, simplemente, “equis puntito pi-O-Lambda”.

Ésta es la función abstracta que usan los pintores para componer un cuadro en el sentido renacentista de Alberti. Dicho de otra manera, el *prin-*

*cipio de proyección* es que cualquier punto fuente (en la escena,  $X$ ), su punto imagen (en el lienzo,  $X \cdot \pi_{O,\lambda}$ ) y el foco (el ojo del pintor,  $O$ ), están alineados. Y al pintar bajo este principio se logra que cuando vemos el cuadro, nuestra mente reconstruya la escena tridimensional original (si el pintor hace el resto de su chamba decorosamente). Pues, como hemos mencionado, nuestro ojo, así como el ojo de los animales superiores, ha sido diseñado por la evolución para simular este principio de proyección; y nuestro cerebro, así como el de los animales superiores, sabe interpretar las imágenes que con este principio se producen.

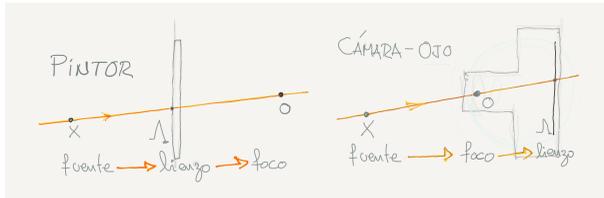
En un ojo, la pupila (el hoyito que deja pasar la luz) y el cristalino (una pequeña lente) seleccionan los rayos de luz que pasarían por un punto que es el foco de la proyección. La retina juega el papel del lienzo o rango. Los “puntos”, “píxeles” o células de la retina son sensibles a la intensidad y al color del rayo lumínico que les pega; mandan esta información al cerebro y éste compagina y procesa las secuencias de imágenes de los dos ojos para armar en nuestra mente la idea de ese mundo tri-

dimensional que nos rodea.

La cámara fotográfica se basa en este mismo principio de proyección –un sistema óptico que juega el papel del foco y, como lienzo, una película o detector bidimensional fotosensible– que produce el cuadro ideal al que aspiraban los pintores renacentistas para plasmar escenas reales. No es de extrañar que el paradigma de lo que es pintar haya tenido que cambiar tan drásticamente con la aparición de la cámara fotográfica; pues hoy día, traemos en el bolsillo proyecciones de escenas reales que serían el sueño de los pintores renacentistas. Y efectivamente, hoy reconocemos todos que las fotografías reflejan bien cómo vemos el mundo; que lo representan en dos dimensiones de manera tan realista como es posible.

La diferencia entre una “proyección de pintor” y una de “ojo o cámara fotográfica” está en el orden de los tres elementos involucrados: el lienzo (rango) del pintor está colocado entre el objeto (la fuente) y su ojo (el foco); mientras que la película sensible de la cámara (o la retina) está después del foco en el sentido en el que viaja la luz en las

líneas: el foco queda entre la fuente y el lienzo.



Hay, inclusive, otro aparato que usa el mismo principio de proyección: el “proyector” de cine. En él, el foco es de donde emanan los rayos de luz, éstos pasan por la transparencia o película que hace el papel de fuente y llegan a la pantalla que hace las veces de lienzo. El orden de los tres factores, según la dirección que determina la luz, es diferente que en los ejemplos anteriores.

Pero obsérvese que en nuestra definición abstracta de proyección, no interviene para nada la dirección en las líneas, o el orden de los objetos; simplemente se cortan líneas con planos. En sus expresiones físicas (pintor o cámara), la dirección en la que viaja la luz sí cuenta, pero en su abstracción matemática ya no.

Las construcciones de buenas perspectivas (de proyecciones) que hemos hecho en el Capítulo 1, solo dependen de que:

- Una línea fuente (que no toca al foco) se proyecta en una línea en el lienzo.<sup>1</sup>

Esto se sigue de los principios  $PI:(1-0)$  (la línea en cuestión y el foco generan un plano...) y  $PI:(2-2)$  (...que corta al lienzo en una línea). Y, por lo tanto, al conocer dónde están las imágenes en el lienzo de dos puntos en una línea, ya podemos trazar en él toda la línea que será su imagen. Esto fue lo que usamos una y otra vez: “*las proyecciones mandan líneas en líneas y dos puntos determinan una línea*”.

EJERCICIO 32. Argumenta por qué las líneas que pasan por el foco se proyectan en un punto, que es el punto de fuga de su clase de paralelismo.

<sup>1</sup>Nos referiremos a este hecho en el futuro diciendo que “Las proyecciones mandan líneas en líneas”.

### 2.1.3.1. El otro lado del horizonte

Una función, como objeto matemático, consta de tres elementos: dos conjuntos (el *dominio* o fuente y el *contradominio* o rango) y una regla de correspondencia que dicta cómo asociar a cada elemento del dominio uno en el contradominio. No dimos con precisión el dominio de las proyecciones (aunque implícitamente están definidas en todo  $\mathbb{D}^3$  excepto su foco), pues nos interesa llamar también “proyección” a sus restricciones a planos.

- *Las proyecciones entre planos son correspondencias biyectivas, o uno-a-uno.*

Es más, si  $\Lambda$  y  $\Delta$  (“Delta”) son dos planos en  $\mathbb{D}^3$ , y  $O$  es un punto que no está en ninguno de ellos. Entonces, las proyecciones desde  $O$  como funciones entre ellos,

$$\pi_{O,\Lambda}: \Delta \rightarrow \Lambda \quad \text{y} \quad \pi_{O,\Delta}: \Lambda \rightarrow \Delta$$

son *funciones inversas*. Esto se debe a que si tomamos puntos  $X \in \Delta$  y  $Y \in \Lambda$ , entonces se corresponden bajo la proyección de  $\Delta$  a  $\Lambda$

( $Y = X \cdot \pi_{O,\Lambda}$ ) si y sólo si  $X$ ,  $Y$  y  $O$  son colineales (están alineados) y esto es equivalente a que  $X = Y \cdot \pi_{O,\Delta}$ . Al escoger un punto  $O$  fuera de ambos planos, los puntos en ellos se *aparean* por la condición de ser colineales con  $O$ . Y este *apareamiento* corresponde a las proyecciones desde  $O$  entre ellos.

Veamos con cuidado el ejemplo de una escena imaginaria como experimento a la Einstein.

**ESCENA 16. Los dos lados del horizonte.**

Sea  $\Delta$  un plano vertical a nuestra izquierda y paralelo a la dirección de nuestra vista (la profundidad), y sea  $\Lambda$  el plano de un lienzo a poco menos de un metro enfrente de nosotros (perpendicular a  $\Delta$ ). El lienzo es un rectángulo, que a su vez es la ventana que tenemos aquí en la pantalla. Solamente se ve tras esa ventana una porción del mundo exterior, ideal y tridimensional.

Lo que tenemos dibujado en el lienzo, es la fachada de un edificio largo y chaparro en el plano  $\Delta$  proyectado a  $\Lambda$  desde el punto  $O$ , que está en el centro de nuestra cabeza (el clásico ojo del pintor), es decir, bajo la proyección  $\pi_{O,\Lambda}: \Delta \rightarrow \Lambda$ . El edificio tiene una fachada muy simple de tres por tres rectángulos semejantes al total.

Hemos llamado  $Y$  al centro de la fachada dibujada en  $\Lambda$  con buena perspectiva. Así que  $Y$  está en  $\Lambda$ , pero le corresponde un punto  $X \in \Delta$  (precisamente  $X = Y \cdot \pi_{O,\Delta}$ ), que se *confunde* con  $Y$  (se aparean bajo las proyecciones desde  $O$ ), pero  $X$  es el centro euclidiano del rectángulo-fachada en  $\Delta$ .

En el siguiente capítulo veremos con detalle la

construcción para lograr que, al mover  $Y$  en la pantalla, se vea como que el rectángulo centrado en  $X$  se traslada paralelo a sí mismo dentro de  $\Delta$ . Mueva un poco el punto  $Y$  para corroborar esto.

Ahora: lleve  $Y$  del otro lado del horizonte de  $\Delta$  que es la recta vertical en el centro de la ventana-lienzo.

Nuestro aparato perceptivo, de acuerdo a su amplia y connotada experiencia, nos quiere convencer de que el edificio se alejó tanto como para es-

conderse detrás del punto  $Y$ , y que regresó, tan campante, por el otro lado de la calle para estacionarse justo en la acera de enfrente. Pero no es así: “¡nos llegó por chicuelinas!”:

En el lado derecho del horizonte, se proyectan rectángulos-fachada en  $\Delta$  cuyo centro  $X$  está atrás de nosotros. La línea de  $Y$  (en el lado derecho) a  $O$  corta a  $\Delta$  en un punto  $X$  que está atrás de nosotros. ¿Qué tan atrás? Tanto como  $Y$  esté cerca del horizonte. Y cuando  $Y$  está justo en el horizonte,  $X$  es un punto ideal de  $\Delta$ , pues la línea de  $O$  a  $Y$  es paralela a una línea en  $\Delta$ .

Aquí es donde entran en juego los puntos ideales de Desargues para lograr que las proyecciones entre planos sean biyecciones. Los puntos ideales del dominio o fuente se proyectan en los puntos de fuga en el rango o lienzo; es a lo que nos referíamos con *a priori* y *a posteriori* en la descripción previa.

Hay que observar también que cuando  $Y$  está cerca del borde de la ventana (y lejos del horizonte), aparece parte del edificio por el lado contrario de la pantalla, como dicta la teoría. Corresponde

a que cuando  $X$  (en  $\Delta$ ) está cerca de nosotros, el edificio llega lo suficientemente atrás y adelante como para que ambos extremos aparezcan proyectados en la ventana.

Del lado izquierdo del horizonte, las proyecciones del edificio son “tipo pintor”; del lado derecho son “tipo cámara”. Los colores auxilian para ver esas diferencias.

En este último paso, aparecen algunos trazos más y los otros controles de la figura, por si le ape-

tece trabajarla, y entender cómo se hizo. ■

Lo que queremos remarcar es que la definición de puntos ideales de Desargues, compagina a la perfección con las proyecciones. Cuando proyectamos un plano a otro, el horizonte es la imagen de la línea al infinito. Es una línea como cualquier otra, y a sus puntos se les llega continuamente desde ambos lados, que, para un punto ideal son las “direcciones opuestas” de una línea que pasa por él.

Al verlos o dibujarlos, los puntos ideales se comportan como cualquier otro, y las líneas que forman, las ideales, son equivalentes a las de siempre (“son” como los horizontes que hemos escogido arbitrariamente). En pequeñas porciones, el Plano Desarguesiano es idéntico al Plano Euclidiano. Por ello se dice que los Planos euclidiano y desarguesiano son *localmente* iguales; pero globalmente no lo son.

EJERCICIO 33. Numera cíclicamente los vértices de la “elipse poligonal” del Ejercicio 23. Luego hazla parecer una “hipérbola poligonal” y observa la dirección de los vértices en ambos lados del horizonte.

## 2.2. Teoremas fundamentales

Ya podemos demostrar los teoremas con los que tropezamos en el Capítulo 1, y que enunciamos o describimos ahí. La idea profunda que sustenta las primeras pruebas es aprovechar que estamos inmersos en una tercera dimensión. Hasta ahora todos nuestros dibujos han sido planos aunque en el contexto, por estar hablando de perspectiva, había una tercera dimensión implícita. Ahora la haremos explícita en las construcciones y usaremos los principios de incidencia como herramienta básica en los razonamientos.

### 2.2.1. Teorema de Desargues y dualidad

Con la terminología que establecimos cuando lo enunciamos en la página 29, el Teorema de Desargues (Teorema 1) se puede reescribir como:

**Teorema 1** (Desargues). *Dos triángulos coloreados están en perspectiva si y sólo si están en perspectiva axial.*

#### ESCENA 17. De perspectiva a perspectiva axial.

Supongamos que dos triángulos coloreados están en perspectiva.

El caso fácil es cuando cada triángulo está en diferente plano; es decir, el caso de tres dimensiones en la que el foco de la perspectiva entre ellos es un punto,  $V$ , afuera de ambos planos que no distingue a un triángulo del otro, aunque los vea en su plenitud de triángulos.

*Esta es la primera vez que desplegamos una figura*

3D. Nótese que lo que era botón de “Play” es ahora el icono de “Pausa” (abajo a la derecha de la ventana); si se le aprieta, la figura deja de girar y el botón regresa a “Play” que hará girar la figura de izquierda a derecha.

El principio en que se basa ProGeo3D para trabajar con figuras tridimensionales es que si éstas se mueven coherentemente, es decir, como si fuera la proyección de una figura en el espacio que gira de manera rígida, entonces nuestro cerebro le confiere tridimensionalidad, es el “efecto cine”. La herramienta “Seleccionador” (el cursor) tiene ahora una nueva función básica: al presionar en un lugar vacío (sin objetos) y arrastrar: la figura completa gira como si viviera en una esfera de cristal detrás de la pantalla y el arrastre (en cualquier dirección) la hiciera rotar. Juegue por favor con éstas funciones (“Play” y “Arrastre-3D”) en los siguientes pasos para visualizar su coherencia tridimensional; y observe que con un ojo cerrado, la ilusión de 3D es más fácil.

Regresando a nuestra prueba. Observemos que, por hipótesis, las líneas que unen los vértices del lado azul de los triángulos concurren en el foco V. Por tanto, son coplanares por el principio de incidencia,  $PI:(1 - 1)$ , pág. 62, (indicado por un triángulo

azulito que se dibuja igual que antes, y ahora incorpora un nuevo plano a los objetos). Esto implica, de nuevo por  $PI:(1 - 1)$  usado en el otro sentido, que...

los lados azules se cortan en un punto X, pues son líneas definidas por puntos en un mismo plano.

Análogamente, los lados verdes...

se cortan en un punto Y; y los rojos...

en un punto Z.

Y finalmente, los tres puntos X, Y, Z son colineales, pues...

están en los planos de los dos triángulos (se les definió como intersección de lados correspondientes) y estos dos planos se intersectan en una línea, por  $PI:(2 - 2)$ , que es el eje de perspectiva axial que buscábamos.

*En éste último paso, apareció una caja, La Caja, que contiene a toda la figura que de nuevo se puso a rotar porque así lo indicaba el Paso 7, pero se puede detener.*

*La Caja se despliega o no con el tercer botón de abajo a la izquierda en la ventana. Además de ayudar a visualizar en 3D, tiene otra función específica: solamente se dibuja lo que está dentro de ella; es el análogo del papel que juega la ventana rectangular en 2D. Cuando está activa la Caja, los planos se dibujan más allá del triángulo que los definió; y es necesaria para distinguirlos.*

*El primer botón de abajo a la izquierda es el que cambia de modo 2D a 3D. El segundo (que aparece solo en 3D) dibuja el plano que se usa para 2D, que conviene pensar como el plano-xy, y al pasar a modo-2D todo se proyecta ortogonal en él; si se mueve un punto estando en modo-2D, su coordenada-z se mantiene fija y si se crea, toma el valor 0. El último botón de ese grupo extiende las líneas hacia atrás hasta su punto de fuga; conviene mantenerlo apagado por eficiencia, pero*

*es bueno para detectar el paralelismo.*

*El “Seleccionador” sigue teniendo la misma función de seleccionar un objeto cuando se hace click sobre él para poder cambiar sus cualidades. Y si es un punto de control, se puede mover como antes: lo hace paralelo a la pantalla. Así que, como se puede cambiar el punto de vista, se puede mover en cualquier plano por él y llevarlo a dónde se deseé dentro de la Caja. El control a su izquierda, que traslada toda la figura, lo hace ahora paralelo a la pantalla; y el “Zoom” funciona igual. ■*

Regresando a nuestro teorema, hemos demostrado una dirección (del si y sólo si) en el caso 3D. La otra dirección en este mismo caso es muy parecida, pero la vamos a detallar para hablar de cómo se hace una construcción en 3D y para extraer después el meollo de las dos demostraciones.

#### ESCENA 18. De perspectiva axial a perspectiva.

*Se puede empezar en 2D, con el eje axial, tres puntos en él y un triángulo externo coloreado.*

*Al cambiar a modo-3D, hemos trasladado el plano-*

*xy hacia abajo (junto con la figura) para hacer espacio. Luego, con la herramienta “Punto-Recta” trazamos la línea al punto azul con un solo gesto (después se ajustaron los colores), pues se mantiene la filosofía gestual. Si el click es en un espacio vacío se genera un nuevo punto de control (así se creo el punto rojo) y se le coloca con la profundidad de media Caja. Se arrastró para generar la línea con un sólo gesto y se levantó el arrastre en el punto azul; como es sobre un objeto ya definido, Pro-Geo3D decide que es ese punto al que queremos seleccionar (independientemente de la profundidad) y traza la línea correspondiente. Finalmente, el punto verde se obtiene por un click simple sobre la línea azul y queda restringido a vivir en ella.*

*El resto del segundo triángulo se hace con las herramientas de incidencia que funcionan como antes.*

Las líneas por los puntos correspondientes de los triángulos concurren en un punto: el foco que los ve en perspectiva. Y no sólo de manera experimental. Podemos probarlo:

Por construcción (o la hipótesis de perspectiva axial) los lados correspondientes de los triángulos son coplanares (por  $PI:(1 - 1)$ ) y dibujamos el

plano azul). Por lo tanto, tenemos tres planos que, respectivamente, contienen a los lados de los dos triángulos. Esos tres planos se cortan en un punto, usando  $PI:(2 - 2)$  y  $PI:(2 - 1)$ , que es el foco de perspectiva de los triángulos. Además, las intersecciones dos a dos de los planos son las líneas (segmentadas) por los vértices correspondientes, pues ambos puntos están en ambos planos.

*Nótese que hicimos cambios de decoración con los colores. En las escenas 3D es conveniente dibujar con*

*segmentos más que con líneas, pues éstas últimas meten ruido: recargan la imagen con información irrelevante para nuestro cerebro por lo que con ellas le cuesta más trabajo armar la tridimensionalidad. Estamos acostumbrados a ver segmentos en objetos sólidos (a los cuales no es muy común que les salgan pelos sueltos y rectos) y nuestra memoria visual contribuye significativamente para hacernos creer, cuando hay movimiento, que realmente hay un modelo 3D ahí detrás de la pantalla; es de notar que en ocasiones se confunde el sentido del giro al empezar el movimiento (parece que lo de atrás está adelante) pero no dura mucho este efecto.*

*También conviene dibujar pocos planos, pues Pro-Geo3D no se preocupa por renderear: simplemente pone los objetos que caen dentro de la caja en el orden de creación en la construcción, no el geométrico de atrás para adelante; y esto lo hace para cada instante o “diapositiva” cuando hay movimiento. ■*

Lo que queremos resaltar, antes de continuar con la demostración, es que en ambas pruebas las hipótesis conducen a que hay cinco planos distintos en el espacio: dos en los que viven los triángulos y aparecen los tres lados de una *pirámide trian-*

gular en los que están los lados correspondientes de los triángulos. El ápice de la pirámide es el foco y la línea de intersección de los planos de los triángulos es el eje de perspectiva axial; pero además, todas las intersecciones de estos cinco planos se usan en algún momento de las demostraciones o vienen como parte de la hipótesis. A esta configuración se le llama la *Configuración de Desargues*. Vale la pena especificar que por *configuración* estamos entendiendo un conjunto de puntos, líneas y planos con una relación de incidencia (quién está contenido en quién) bien establecida. Esta relación de incidencia es lo que se llama un *orden parcial*, pues no todos los elementos están relacionados (si lo estuvieran, sería un *orden total*); y en el caso de la Configuración de Desargues, corresponde a una parte del orden parcial de subconjuntos de un conjunto con cinco elementos con el orden parcial invertido:

Hay cinco planos, diez líneas que son la intersección de dos planos y diez puntos que corresponden a las ternas de planos. En cada plano hay cuatro líneas (la intersección con los otros planos) y

seis puntos (¿por qué?); cada línea incide con tres puntos y cada punto con tres líneas. Así que en la Configuración de Desargues hay diez instancias de su teorema, es decir, cada punto o vértice (que corresponde a un subconjunto de tres planos) ve en perspectiva a dos triángulos cuyo eje de perspectiva axial es la línea en la que se cortan los otros dos planos (el complemento como subconjuntos de los cinco planos); ver el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 34. Diez instancias del teorema. En el último paso de la última escena, la 18, elimina las dos últimas instrucciones (los triángulos azules); luego colorea con un mismo color al foco, al eje y, con ese color pero tenue para poder ocultarlos, a los dos triángulos que aquellos ponen en perspectiva y perspectiva axial respectivamente; el color representa una instancia del Teorema de Desargues. Sólo hay que cambiar color a seis líneas y seis puntos; pero falta definir 18 triángulos. Verás que las posibles “disposiciones geométricas” de dos triángulos en perspectiva son muchas y que nuestras demostraciones empezaron con las más simples.

### 2.2.1.1. Prueba en el plano, cine-3D y dualidad

Nos queda por demostrar el caso difícil del Teorema de Desargues, que es el que realmente apareció en el Capítulo 1, cuando los dos triángulos están en un mismo plano. Las pruebas anteriores ya no funcionan, se colapsan pues los cinco planos son ahora uno sólo. Sin embargo, la idea de *levantar* a la tercera dimensión, resolver ahí y regresar al plano funciona bien.

Una posible prueba viene de aceptar que una configuración plana podría ser la proyección de una tridimensional, y construir tal configuración, *levantarla* digamos, a partir de puntos auxiliares externos, ver Ejercicio 35. Pero preferimos dar otra demostración que tiene que ver con el proceso de cómo arma nuestro cerebro la tridimensionalidad a partir de dos imágenes planas.

#### ESCENA 19. Desargues-2D y el cine-3D.

Consideremos dos triángulos coloreados en un plano  $\Pi$  que estén en perspectiva *desde* (es decir, con foco)  $F$ ; queremos demostrar que están en perspectiva axial.

Sean  $D$  e  $I$  dos puntos fuera de  $\Pi$  y colineales con  $F$ . Los nombres se inspiran en los ojos Derecho e Izquierdo de un espectador ante la pantalla  $\Pi$  que tiene dos triángulos coloreados de tal manera que cada ojo ve a uno de los triángulos pero no al otro<sup>2</sup>.

*Para lograr que  $F$  se pueda alejar de la Caja (pues en el cine-3D es el punto ideal en la dirección horizon-*

---

<sup>2</sup>La técnica del siglo XIX para lograr esto fue con filtros de colores, la actual es con polarización de la luz.

tal de la pantalla), se le definió como la intersección de las líneas punteadas entre los vértices en los lados azules. Pero entonces se tiene el problema constructivo de que los cuatro puntos libres no deben serlo tanto (por  $PI:(1 - 1)$ ), tienen que ser coplanares para que  $F$  exista; y se resuelve este problema como sigue.

Con el primer triángulo, se define un plano (y si es el plano- $xy$ , éste se incorpora a la base de datos de objetos de la construcción). Si, en modo-3D, se crea un punto dentro de ese triángulo, el punto “libre” se restringe a vivir en ese plano; así como hay puntos en líneas debe haber puntos en planos, y ésta es la manera de definirlos. Así que creando a los dos puntos de la otra línea azul dentro del primer triángulo y luego moviéndolos afuera, se logra lo que necesitábamos.

Puesto que los puntos verdes en  $\Pi$  son coplanares con  $D$  e  $I$  (las líneas por ellos concurren en  $F$ ,  $PI:(1 - 1)$ ), entonces sus líneas a  $D$  e  $I$  (al ojo que sí los ve) se cortan en un punto verde (de nuevo,  $PI:(1 - 1)$ ). El cerebro del espectador deduce que ese punto en el espacio es el que produce los estímulos verdes (es el único que podría causarlos).

Análogamente se obtienen puntos rojo y azul, y

por tanto un triángulo coloreado en el espacio, que el ojo  $D$  ve en perspectiva con su triángulo visible en  $\Pi$ , e  $I$  lo confunde con el otro.

Puesto que los triángulos en la pantalla no son uno mismo, el triángulo en el espacio genera un plano distinto de  $\Pi$ , y entonces, por  $PI:(2 - 2)$ , tenemos una línea de intersección de ambos planos. (Con la herramienta “Intersección” se arrastra el interior de un triángulo al otro para trazarla; y conviene situarse previamente en un punto de vista en el que éstos trián-

*gulos sean claramente discernibles y sin estorbos).*

Por el caso 3D, en esa línea concurren los lados correspondientes de las parejas de triángulos coloreados en perspectiva desde D e I. Como las intersecciones del triángulo en el espacio con esa línea están bien definidas, por esos puntos pasan los lados correspondientes de los triángulos en el plano, es decir, están en perspectiva axial. ■

La implicación de esta demostración para el cine-3D, es que conviene sentarse al centro de la sala (y, nimodo, no apoyar la cabeza en el hombro de la pareja) pues siempre hay que mantener la línea por los ojos paralela a la pantalla y horizontal (ver Ejercicio 36). Pues si la línea de los ojos no pasa por el foco de perspectiva de las imágenes — que por convención industrial (y comodidad) es un punto ideal— la información geométrica que se le da al cerebro no es coherente; él ha construido un acervo visual con base en datos reales y lo que se le está proporcionando no cae en ese patrón; un punto exterior real siempre produce información coherente (dos líneas coplanares). El cine-3D funciona porque se puede simular esa misma informa-

ción. Pero si no ayudamos a que sea coherente, el cerebro trabaja de más: vienen los mareos, el ver borroso y el cansancio mental.

Esto explica también por qué con un solo ojo se ve más fácil la tridimensionalidad de las figuras en *ProGeo3D*. Como es una única imagen en la pantalla, cada ojo deduce con el giro a una figura-3D sutilmente diferente; cuando ambos ojos están mandando información, el cerebro tiene que desechar a una y quedarse con la del “ojo dominante”.

Regresando a nuestra chamba teórica, nos falta demostrar que perspectiva axial en el plano implica perspectiva.

#### ESCENA 20. Perspectiva axial a perspectiva (2D).

Consideremos dos triángulos en el plano en perspectiva axial. Podríamos levantar y argumentar en 3D (ver Ejercicio 37-(b)), pero no es necesario pues sabemos que en la Configuración de Desargues hay una gran riqueza. Vamos a probarlo usando que perspectiva implica perspectiva axial en el plano.

Pongamos nombres a los puntos. Para ver que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  están en perspectiva, hay que probar la concurrencia de tres líneas. Pero si definimos al candidato de esa concurrencia,  $V$ ,

...

como la intersección de dos de las líneas (la roja y la azul segmentadas); esa concurrencia es equivalente a la colinearidad de los puntos  $C$ ,  $V$  y  $C'$ . Y esta colinearidad se sigue de otra de las instancias del teorema en la configuración (ver Ejercicio 34):

El punto  $Z$  pone en perspectiva a los triángulos  $YAA'$  y  $XBB'$  (coloreados por el orden de escritura). Así que las intersecciones de los lados correspondientes, que son los puntos  $C$ ,  $V$  y  $C'$ ...

están alineados en su eje de perspectiva axial que es lo que queríamos probar. ■

Esto completa la demostración del Teorema de Desargues. Parece larga porque intercalamos mucha información sobre el funcionamiento en tres dimensiones de *ProGeo3D*; pero el esquema fue simple. En 3D se demostraron las dos direcciones lógicas del teorema; de ellas se dedujo el caso 2D en una dirección, y de ésta se dedujo la dirección

contraria sin salir del plano (ver Ejercicio 38).

Antes de seguir adelante conviene aprovechar este teorema, que nos provee de ejemplos claros, para hacer explícito el concepto de *dualidad*.

Puesto que en un plano todas las líneas se cortan, cumplen lo mismo que los puntos: cualquier par de objetos de un tipo (líneas o puntos) determina o define con precisión a uno del otro. Resulta entonces que cualquier construcción o configuración tiene una *dual* y cualquier enunciado en la teoría también tiene un *dual*: en cada paso o frase, se intercambian líneas por puntos, a la vez que se intercambian la *operación* de intersección (o corte) con la de generación (o trazo), así como la relación de ‘estar en’ por la de ‘contener a’.

Como ejemplos que ya hemos visto, se pueden citar: (1) ser *colineales* (puntos que están en una línea) es la propiedad dual de ser *concurrentes* (líneas que pasan por un punto); (2) entendiendo a un triángulo como ‘tres puntos no colineales junto con las tres líneas que generan’, es una configuración *autodual* (su dual resulta ser la misma: ‘tres líneas no concurrentes junto con sus tres puntos

de intersección’); (3) el uso que hemos dado al término ‘incidencia’ también es una relación autodual (pues según el contexto es ‘estar en’ o ‘contener a’). Y finalmente, (4) los conceptos que aparecen en el Teorema de Desargues: ‘perspectiva’ y ‘perspectiva axial’ (que también se denomina ‘perspectiva dual’) son duales en el plano; y el teorema lo que dice es que son equivalentes y por lo tanto, el teorema en 2D es autodual. Sin embargo, debemos enfatizar que esto de la dualidad sólo funciona, por lo pronto, en el plano; en el espacio es más complicado y el Teorema de Desargues ahí ya no es autodual, no aplica aún el término.

La Geometría Proyectiva fue el primer escenario teórico en el que se manifestó el fenómeno de la dualidad, que luego se encontró en muchas otras áreas; no es trivial, pero nos será muy útil. Indica que hay algo abstracto y profundo a la mano: otro plano proyectivo donde las líneas funcionan como puntos y los puntos definen ‘líneas’ ahí —el conjunto de líneas que pasan por un punto, su *haz*—. Sin embargo, preferimos mantenernos en el Plano y el Espacio Desarguesianos y abordar formalmen-

te esto hasta la Parte III en el que subimos de nivel de abstracción. Por lo pronto, hay que estar conscientes de que en el plano cada enunciado, teorema, configuración abstracta o construcción, tiene un dual; preguntarse por él o investigarlo siempre será válido y resulta interesante.

EJERCICIO 35. Dados dos triángulos coloreados en el plano- $xy$  en perspectiva desde  $F$ , y un punto  $V$  fuera del plano, construye otro par de triángulos en perspectiva desde  $V$  con los originales y en perspectiva entre sí desde  $F$ . Comprueba que el eje de perspectiva axial de los levantados está en perspectiva desde  $V$  con el eje de perspectiva axial de los originales.

EJERCICIO 36. Reconstruye la Escena 19, pero con el foco  $F$  fijo como el punto ideal de la línea punteada entre dos vértices correspondientes de los triángulos; es decir, como se usa en el cine-3D (tendrás que usar la herramienta “Paralela” que funciona como antes para trazar líneas por  $F$ ). Entonces, será más fácil y estable jugar con la posición de los triángulos en la pantalla para experimentar cómo lograr cualquier triángulo afuera (e.g., atrás o adelante de la pantalla, o inclusive, detrás de los ojos como si la pantalla estuviera en el cerebro

y contuviera a las dos retinas; es decir, dispuesto muy cercano a como vemos al mundo).

EJERCICIO 37. Construye tres triángulos en distintos planos, tales que dos a dos estén en perspectiva axial y los tres pares con un mismo eje. Por el Teorema de Desargues 3D, están en perspectiva dos a dos; compruébalo experimentalmente. Observa también que en la figura los tres focos son colineales. (a) ¿Puedes dar una argumentación formal para ésta coincidencia? (b) Utiliza el caso particular en que dos de los triángulos se hacen coplanares para dar una demostración de que perspectiva axial implica perspectiva en 2D.

EJERCICIO 38. Demuestra en 2D que si dos triángulos coloreados están en perspectiva entonces están en perspectiva axial, asumiendo cierto que perspectiva axial implica perspectiva. Es decir, junto con la Escena 20, concluye la demostración de que en el plano: perspectiva y perspectiva axial de triángulos coloreados son conceptos equivalentes.

### 2.2.2. Operaciones y Armonía

Hasta ahora, hemos denotado con letras mayúsculas latinas ( $A, B, \dots, X, Y, Z$ ) a los puntos; con minúsculas latinas ( $\dots, h, \dots, \ell, \dots$ ) a las líneas, y con mayúsculas griegas ( $\dots, \Delta, \dots, \Lambda, \dots, \Pi, \dots$ ) a los planos. Lo cual nos deja a las minúsculas griegas ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \pi, \rho, \dots$ ) para las funciones (hasta ahora  $\pi_{O,\Lambda}$ , pero ya vendrán otras) y para las eventualidades (pronto veremos una). En la medida de lo posible, trataremos de apegarnos a esta costumbre, pues en cualquier momento ayuda a ubicarnos respecto al tipo de objetos a los que se refieren los ingredientes de una fórmula.

Ya no seguiremos evitando notación para las operaciones. En los textos tradicionales se usa la concatenación simple,  $AB$ , para la línea por los puntos  $A$  y  $B$ . Aquí no: preferimos una notación más explícita que haga fácil de ver la dualidad de las operaciones *generación* e *intersección*.

Usaremos notación equivalente para ellas con los símbolos  $\vee$  y  $\wedge$ , llamados *cuña* y *pico* respec-

tivamente, pues tipográficamente están relacionados con  $\cup$  y  $\cap$  que se usan para las operaciones de conjuntos *unión* e *intersección*, pero serán sutilmente distintos.

Así, en el Plano Desarguesiano  $\mathbb{D}^2$ , dados dos puntos distintos  $A, B$  y dos líneas distintas  $a, b$ :

- $A \vee B$  es la línea que **generan**  $A$  y  $B$ .
- $a \wedge b$  es el punto de **intersección** de  $a$  y  $b$ .

Se pueden leer “la línea  $A$  cuña  $B$ ” y “el punto  $a$  pico (o intersección)  $b$ ”.

Para que sean operaciones bien definidas, hay que extender al caso en que los ingredientes son iguales, cuando  $A = B$  o  $a = b$ , y es claro que debemos definir  $A \vee A = A$  y  $a \wedge a = a$ . Pero entonces, el resultado de estas operaciones en este caso especial es del otro tipo de objetos que en el caso genérico (con ingredientes distintos).

Por esta razón —y también porque, aunque queramos trabajar en el plano, sabemos que conviene poder salir al espacio tridimensional—, debemos

darle un nombre genérico a los puntos, líneas y planos; englobarlos en un sólo concepto.

Diremos que un subconjunto  $\alpha$  de  $\mathbb{D}^3$  es *linealmente cerrado* (o simplemente *cerrado*, o un *subespacio*<sup>3</sup>), si para cualquier par de puntos en  $\alpha$ , la línea que generan está totalmente contenida en  $\alpha$ . Es decir,  $\alpha \subset \mathbb{D}^3$  es linealmente cerrado si cumple

$$A, B \in \alpha \Rightarrow (A \vee B) \subset \alpha, \quad (2.1)$$

donde  $A \vee B$  es la línea por  $A$  y  $B$  o el punto  $A$  si  $A = B$ . Los ejemplos de conjuntos linealmente cerrados que conocemos son los puntos, las líneas y los planos. Y ahora debemos añadir al conjunto vacío, que se denota  $\emptyset$ , y al total  $\mathbb{D}^3$ . (Nótese que estamos usando a las griegas minúsculas como un comodín notacional para poder referirnos a puntos, líneas y planos al mismo tiempo).

**Lema 1.** *La intersección de conjuntos linealmente cerrados es linealmente cerrada.*

<sup>3</sup>En inglés, se utiliza el vocablo “flat” para estos conjuntos; pero en español ya le dimos significado a la palabra “plano”.

**Demostración.** Sean  $\alpha, \beta \subset \mathbb{D}^3$  linealmente cerrados, y sean  $A, B \in (\alpha \cap \beta)$ . Puesto que, por la definición de cerrado,  $(A \vee B) \subset \alpha$  y  $(A \vee B) \subset \beta$ , se tiene entonces que

$$(A \vee B) \subset (\alpha \cap \beta)$$

por la definición de intersección de conjuntos. Así que  $\alpha \cap \beta$  también es linealmente cerrado y ya acabamos.  $\square$

Con esto, ya podemos definir las operaciones geométricas.

Sean  $\alpha, \beta \subset \mathbb{D}^3$  linealmente cerrados. Su *pico* o *intersección* es

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \cap \beta, \quad (2.2)$$

que también es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{D}^3$ . Y su *cuña* o *generado*, es el conjunto  $\alpha \vee \beta$  que es el linealmente cerrado *mínimo* entre todos los que contienen a  $\alpha$  y a  $\beta$ . Es decir, se tiene que si  $\gamma$  es linealmente cerrado entonces

$$\alpha \subset \gamma \text{ y } \beta \subset \gamma \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \subset \gamma. \quad (2.3)$$

Que la cuña esté bien definida se debe a que podemos tomar la intersección de todos los cerrados que contienen a  $\alpha$  y  $\beta$  para obtener el cerrado mínimo. Y para ver que sí es cerrado se necesita demostrar el lema anterior para intersecciones arbitrarias. No lo hicimos así para no confundir la idea básica de la demostración complicando la notación; y también, porque nos podemos referir a los principios básicos de incidencia (pág. 62) en los que queda bien definido cuál es la cuña, o el generado, en los diversos casos según la dimensión de los cerrados involucrados y su estatus de incidencia. Aunque ahora hay que establecer que el total  $\mathbb{D}^3$  tiene dimensión 3, y que el vacío tiene dimensión  $-1$  (ver Ejercicio 39).

Por último, veámos como ejemplo del poder de esta nueva notación, como se hace más concisa y precisa la definición de la función proyección. Ahora podemos escribir

$$X \cdot \pi_{O, \wedge} = (X \vee O) \wedge \wedge. \quad (2.4)$$

Donde queremos subrallar que el uso de los paréntesis es muy importante en las expresiones con

cuñas y picos; indican el orden en que hay que operar.

EJERCICIO 39. Usando los Principios Básicos de Incidencia (pág. 62) demuestra que si  $\alpha$  y  $\beta$  son conjuntos linealmente cerrados de  $\mathbb{D}^3$ , entonces se cumple que

$$\dim(\alpha) + \dim(\beta) = \dim(\alpha \wedge \beta) + \dim(\alpha \vee \beta),$$

donde  $\dim$  es la dimensión. Esta ecuación es llamada la *Igualdad Modular*.

EJERCICIO 40. Demuestra los Principios de Incidencia (pág. 62) suponiendo que la Igualdad Modular es cierta. Así que todos esos enunciados, y otros mas que incluyen al vacío y al total, son equivalentes en conjunto a la validez de la Igualdad Modular.

### 2.2.2.1. Teorema Armónico

La definición clásica de cuartetas armónicas, que se puede remontar a los griegos, fue usando distancias; hay una cierta fórmula que deben satisfacer las distancias entre una pareja y otra que conduce a la llamada *razón cruzada*. No fue sino hasta el siglo XIX, que Von Staudt demuestra que

es independiente de la noción de distancia dando la definición geométrica con un cuadrángulo exterior como lo hicimos aquí. Ahora queremos probar que esa construcción geométrica, que vimos en la Escena 8, no depende de los puntos auxiliares que se tienen que escoger.

**Teorema 2** (Armónico). *El cuarto armónico está bien definido.*

#### ESCENA 21. Unicidad del cuarto armónico (en 3D).

Conviene recordar y puntualizar la construcción del cuarto armónico.

Los **datos** son tres puntos colineales

$$X \in \ell = A \vee B,$$

con  $A \neq B$  y uno de ellos distinguido, que es  $X$ .

**Paso 1.** Se consideran dos puntos auxiliares fuera de  $\ell$ : primero a  $O$  y luego a  $P$  en la línea  $O \vee X$ .

**Paso 2.** Se definen

$$Q = (A \vee O) \wedge (B \vee P)$$

y  $R = (A \vee P) \wedge (B \vee O).$

**Paso 3.** Por último, se obtiene:

$$Y = (A \vee B) \wedge (Q \vee R) = \ell \wedge (Q \vee R),$$

que es *el armónico de  $X$  respecto a  $A, B$* .

Lo que debemos demostrar es que si se hace la construcción con otro par de puntos auxiliares  $O'$  y  $P'$ , se obtiene el mismo resultado  $Y$ .

Consideremos primero el caso en el que  $O'$  y  $P'$

están en un plano distinto de  $O$  y  $P$ . Sean

$$\begin{aligned}\Pi &= A \vee B \vee O = \ell \vee O \\ \Pi' &= A \vee B \vee O' = \ell \vee O',\end{aligned}$$

estos dos planos (el azul y el rojo, en la figura).

Como  $O, P, O', P'$  son coplanares pues

$$X = (O \vee P) \wedge (O' \vee P'),$$

tenemos un punto bien definido, un *voyeur* designado,

$$V = (O \vee O') \wedge (P \vee P'),$$

que verá a las dos construcciones en perspectiva;  $V$  no distinguirá a una de la otra. De hecho, si consideramos la proyección de  $\Pi$  en  $\Pi'$  desde  $V$ ,

$$\pi_{V, \Pi'} : \Pi \rightarrow \Pi';$$

como es una biyección que manda líneas en líneas, y manda a los datos iniciales en los datos iniciales de las construcciones (a  $\ell = \Pi \wedge \Pi'$  la deja en su lugar, y además  $O' = O \cdot \pi_{V, \Pi'}$  y  $P' = P \cdot \pi_{V, \Pi'}), \dots$

también manda al resultado de cada paso de la construcción en  $\Pi$  al correspondiente en  $\Pi'$ . Por lo tanto, ambas construcciones producen a  $Y$ , que está en ambos planos, como resultado final. ■

Por último, debemos considerar al caso en que el punto auxiliar  $O'$  está en el mismo plano que  $O$ ; pero este se resuelve fácilmente considerando un tercer punto  $O''$  fuera del plano. Pues, por lo anterior, da el mismo resultado que ambos. □

El cuarto armónico es una función en una línea;

para definirla se uso un plano y para demostrar que la definición es buena nos salimos al espacio.

EJERCICIO 41. Se puede demostrar el Teorema Armónico sin salirse nunca del plano, usando al Teorema de Desargues. Hazlo. (Pista: hay que definir  $V$  como en la demostración anterior y luego usar a Desargues tres veces, dos en un sentido y otra en el otro.)

### 2.2.2.2. Propiedades básicas de la armonía

De la demostración del Teorema Armónico, conviene puntualizar el meollo y generalizarlo.

Una biyección entre planos es llamada una *colineación* si manda líneas en líneas. Las proyecciones son colineaciones (pág. 67). Dicho de manera simbólica, una colineación es una biyección entre planos,  $\lambda : \Pi \rightarrow \Pi'$ , que cumple

$$\begin{aligned}(A \vee B) \cdot \lambda &= (A \cdot \lambda) \vee (B \cdot \lambda) \\ (\alpha \wedge \beta) \cdot \lambda &= (\alpha \cdot \lambda) \wedge (\beta \cdot \lambda),\end{aligned}$$

para cualesquiera puntos  $A, B \in \Pi$  y líneas  $\alpha, \beta$  de  $\Pi$ . Y se tiene que

- Una colineación manda el resultado de una construcción de incidencia plana en el resultado de la misma construcción pero empezando con la imagen de los datos iniciales.

Pues una *construcción de incidencia* (o *proyectiva*) plana, consiste de una configuración inicial que se amplía por una secuencia de pasos elementales, o instrucciones, que son incorporar la intersección de dos líneas o la línea generada por dos puntos. Las intersecciones de líneas van en la correspondiente intersección de las líneas imagen por el simple hecho de ser una biyección; y por mandar líneas en líneas, una colineación manda a la línea por dos puntos en la línea que generan sus imágenes. Así que paso por paso, y en particular al final de la construcción, la colineación manda al resultado en el correspondiente resultado.

La importancia de la armonía para la geometría proyectiva viene del siguiente teorema, que ya hemos experimentado ampliamente con su uso como herramienta constructiva.

**Teorema 3** (Invariancia Projectiva de la Armonía).  
*Las proyecciones mandan cuartetos armónicos en cuartetos armónicos.*

**Demostración.** Lo que debemos demostrar es que si tenemos una proyección  $\pi : \ell \rightarrow \ell'$  entre dos líneas y  $A, X, B, Y$  es una cuarteta armónica en  $\ell$ , entonces su imagen,  $A \cdot \pi, X \cdot \pi, B \cdot \pi, Y \cdot \pi$ , es una cuarteta armónica en  $\ell'$ .

Que  $\pi$  sea una proyección significa que hay un punto  $V$ , el foco, fuera de  $\ell$  y  $\ell'$ , tal que

$$Z \cdot \pi = (Z \vee V) \wedge \ell'$$

para todo  $Z \in \ell$ ; y en particular se tiene que  $V, \ell$  y  $\ell'$  están en un mismo plano  $\Pi = V \vee \ell$ .

**ESCENA 22. Invariancia proyectiva de la armonía.**

Denotemos  $Z'$  a  $Z \cdot \pi \in \ell'$  para todo  $Z \in \ell$ . Consideremos las ternas  $A, X, B \in \ell$  y  $A', X', B' \in \ell'$ . Debemos probar que sus cuartos armónicos están alineados con  $V$ , suponiendo que ellos lo están.

Consideremos una construcción del cuarto armónico de  $X$  respecto a  $A$  y  $B$ , en un plano  $\Delta$  distinto de  $\Pi$  (que no contiene a  $V$ ).

Sea  $\Delta'$  cualquier plano por  $\ell'$  que no contiene a  $V$ . La proyección desde  $V$  de  $\Delta$  a  $\Delta'$ ,

$$\pi_{V, \Delta'} : \Delta \rightarrow \Delta',$$

que extiende a  $\pi : \ell \rightarrow \ell'$ , manda la construcción en  $\Delta$  a una correspondiente en  $\Delta'$ . Y, en particular, a su resultado, el cuarto armónico  $Y \in \ell$  en el correspondiente cuarto armónico  $Y' \in \ell'$ . ■

Lo cual concluye la demostración. □

El otro resultado sobre armonía que observamos muy al principio es que es simétrica como relación entre parejas de puntos (pág. 17). En ese momento, lo dedujimos de la cuadrícula diagonal de una cuadrícula. Ahora, podemos dar una demostración más formal que, además, explica las coincidencias que aparecen en el trazo de cuadrículas en perspectiva, e indica el poderío del Teorema Armónico.

**Teorema 4** (Simetría de la Armonía). *Si  $A, B, X, Y$  son puntos colineales distintos entre sí y tales que  $X, Y$  son armónicos respecto a  $A, B$ , entonces  $A, B$  son armónicos respecto a  $X, Y$ .*

#### ESCENA 23. Demostración.

Consideremos un cuadrángulo exterior a la línea que da la armonía de  $X, Y$  respecto a  $A, B$ .

Sea  $Z$  la intersección de las diagonales, es decir,

$$Z = (O \vee P) \wedge (Q \vee R).$$

Las líneas  $Z \vee A$  y  $Z \vee B$  cortan a los lados del cuadrángulo exterior en cuatro puntos nuevos.

Como consecuencia del Teorema Armónico (2), las cuatro nuevas líneas entre estos puntos van a dar, por parejas, en  $X$  y  $Y$ . Para verlo, tomemos por ejemplo a la línea inferior: pasa por  $Y$ , pues para encontrar al armónico de  $X$  respecto a  $A, B$  se pueden tomar como auxiliares en la construcción a los puntos  $O$  y  $Z$  en vez de  $O$  y  $P$ . Así, se usan los cuatro papalotitos en que se subdivide el grande.

Las trazos nuevos demuestran que  $A, B$  es pareja armónica respecto a  $X, Y$ . □

A la configuración del Paso 4, la llamaremos la *configuración 13-13* pues tiene 13 puntos y 13 líneas y una enorme simetría. Será muy importante y so-  
corrida en lo que viene.

Debemos subrayar que la demostración que acabamos de dar de cuatro coincidencias (cuatro líneas en las que incidían ternas de puntos previamente definidos) usando el Teorema Armónico, se generaliza para probar que en las cuadrículas al trazar una diagonal en cualquier loseta, ésta va pasando por todos los vértices que le corresponden (pues, en particular, va a su punto de fuga). Es decir, las coincidencias que señalábamos en § 1.2.2, son consecuencia del Teorema Armónico.

EJERCICIO 42. En la configuración del Paso 1 de la Escena 23 (del Teorema de Simetría de la Armonía) comprueba experimentalmente y luego demuestra que los puntos  $A$ ,  $(Q \vee X) \wedge (P \vee Y)$  y  $Z$  son colineales.

EJERCICIO 43. Demuestra la coincidencia-1 (ver pág. 28 dentro de la Escena 5) usando el Teorema Armónico.

### 2.2.2.3. Armonía de líneas

Como habíamos dicho, siempre resulta interesante dualizar. Veremos ahora que hay armonía en líneas y que ambos conceptos se acoplan o casan de maravilla. Para empezar, veamos la construcción dual de la del cuarto armónico (Escena 21).

#### ESCENA 24. Línea cuarto armónica.

La configuración inicial —que eran tres puntos colineales en la Escena 21— consiste ahora de tres

líneas concurrentes. A su punto de concurrencia lo llamamos  $L$  (dual de la línea  $\ell = A \vee B$ ); a las tres líneas que pasan por él, las definimos con tres puntos libres y las llamamos  $a$ ,  $b$  y  $x$ , (serán las duales de  $A$ ,  $B$  y  $X$  en la construcción).

Se necesitan dos líneas auxiliares  $o$  y  $p$ : como los puntos auxiliares de la construcción original estaban alineados con el punto  $X$ , ahora deben ser líneas concurrentes con  $x$ . *(Conviene empezar escogiendo al punto de concurrencia en  $x$  para luego definir a las líneas auxiliares  $o$  y  $p$  con otros puntos libres. Nótese que en ProGeo3D es imposible dualizar a la construcción instrucción por instrucción, pues no tenemos la opción constructiva de “líneas libres” (hay que simularlas). Esto es así porque los puntos son los naturales para nuestro uso cotidiano del ratón y el “click”).*

En el Paso 2 de la construcción original, se trazaban cuatro líneas para definir dos puntos nuevos; ahora son cuatro puntos...  
para definir dos nuevas líneas:

$$q = (a \wedge o) \vee (b \wedge p)$$

$$y \quad r = (a \wedge p) \vee (b \wedge o);$$

cuya intersección es un punto que genera, junto con  $L = a \wedge b$ , a la *línea armónica* de  $x$  respecto a  $a$ ,  $b$ :

$$y = (a \wedge b) \vee (q \wedge r) = L \vee (q \wedge r).$$

Explore la construcción. Compruebe experimentalmente su invariancia de las líneas auxiliares; pero observe cómo varía  $y$  con respecto a  $x$ .

*Por supuesto, la herramienta “Armonía” de ProGeo3D, sirve también para el caso de líneas. Si con ella activa,*

se selecciona una línea y luego se hace un arrastre entre otro par, cuando las tres líneas son concurrentes se obtiene la línea armónica correspondiente.

Por último, notemos que la cuarteta de líneas,  $a, x, b, y$  corta a la línea  $q$  (y también a la línea  $r$ ) en una cuarteta armónica de puntos. Para verlo, se pueden tomar a  $a \wedge b$  y  $o \wedge p$  como los puntos auxiliares para una construcción del cuarto armónico. Entonces, por el Teorema de Invariancia Proyectiva de la Armonía (3) con  $L$  como foco, se tiene que

- cualquier línea que no pase por su punto de concurrencia,  $L = a \wedge b$ , corta a la cuarteta de líneas  $a, x, b, y$  en una cuarteta armónica de puntos.

Así, que está última, puede ser usada como la definición formal de *haz armónico*: una cuarteta de líneas concurrentes y partida en dos pares, tal que al cortarlas con una línea que no pasa por su *centro* (el punto en que concurren) se obtiene una cuarteta armónica de puntos. ■

Para emparejar la nomenclatura entre puntos y líneas, y ya que a las cuartetas armónicas de

líneas las llamamos “haces armónicos”, podemos llamar *hileras armónicas* a las cuartetas armónicas de puntos y su *soporte* (el dual del centro) es la línea en la que viven.

EJERCICIO 44. Sean  $a, b$  dos líneas perpendiculares y sea  $x$  su bisectriz (una línea concurrente con ellas y a  $45^\circ$ ); hay que usar las herramientas euclidianas de ProGeo3D para construirlas. Siguiendo la construcción de la Esceña 24, demuestra que la línea armónica de  $x$  respecto a  $a, b$  es la otra bisectriz (también a  $45^\circ$ ), tomando como

líneas auxiliares a líneas paralelas a  $a$  y  $b$ .

EJERCICIO 45. Considera un paralelogramo en  $\mathbb{E}^2$ . Demuestra que los dos lados que pasan por una de sus esquinas son armónicos de la diagonal ahí y la paralela a la otra diagonal por esa esquina.

EJERCICIO 46. Demuestra que cualquier haz armónico es como la cuarteta de líneas del ejercicio anterior.

EJERCICIO 47. Construye tres líneas concurrentes y con la herramienta armonía define a la cuarta armónica de alguna respecto a las otras dos. Considera una línea cualquiera,  $h$ , fuera del centro de concurrencia. Sin usar el Teorema de Invariancia Proyectiva de la Armonía, demuestra que la cuarteta de puntos de intersección de  $h$  con las líneas del haz armónico son una hilera armónica. (Pista, en la Escena 24 cualquier línea fuera del centro puede convertirse en  $q$ .)

### 2.2.3. Armonía de Ceva y Menelao

Ya tenemos las herramientas para demostrar en el plano lo que vimos en las escenas del cubo en perspectiva respecto a configuraciones de un triángulo con tres puntos “nuevos” en sus lados. Primero, definamos que la *configuración armónica* de una configuración tal es la que tiene en cada lado al cuarto armónico del nuevo respecto a los dos vértices del triángulo.

**Teorema 5** (Armonía entre Ceva y Menelao). *Una configuración de tres puntos en los lados de un triángulo es de Ceva si y sólo si su configuración armónica es de Menelao.*

**Demostración.** La prueba consiste en dos escenas.  
**ESCENA 25. De Ceva a Menelao.**

Consideremos una configuración de Ceva (definida en pág. 54) en un triángulo coloreado; nótese que se controla elegantemente con el punto de concurrencia, llamado su *punto de Ceva*.

Como ya hay un cuadrángulo exterior, el armónico del punto nuevo en el lado azul es la inter-

sección con ese lado, de la línea por los otros dos puntos nuevos (segmentada y azul).

Análogamente, se obtienen los otros dos puntos de la configuración armónica.

El punto de Ceva pone en perspectiva al triángulo original con el de los puntos nuevos (y lados segmentados), y el Teorema de Desargues implica que están en perspectiva axial. El eje es la línea que hace de Menelao (ver definición en pág. 55) a la configuración armónica. ■

### ESCENA 26. De Menelao a Ceva.

Consideremos ahora una configuración de Menelao (dos de los tres puntos nuevos, más chicos y del color, controlan la *línea de Menelao*, negra).

Observemos primero que, aunque parezca, no es exactamente la configuración dual de una de Ceva. Ésta consistiría de tres líneas nuevas en los vértices de un triángulo que cortan a los lados opuestos en puntos colineales: trazando líneas (segmentadas) de los nuevos pun-

tos al vértice opuesto, es justo lo que obtenemos. Y éstas líneas...

definen un triángulo en perspectiva axial con el original (con eje la línea de Menelao).

Por el Teorema de Desargues, los dos triángulos están en perspectiva (y el foco será el punto de Ceva que buscamos). Las líneas de perspectiva (punteadas y del color) son las armónicas de las segmentadas respecto a sus correspondientes dos lados del triángulo original.

Para verlo, por ejemplo en el vértice rojo, tómense como líneas auxiliares para encontrar la línea cuarto armónica, al lado opuesto del triángulo (el rojo) y a la línea de Menelao (la negra).

Finalmente, las intersecciones de los tres haces armónicos con el correspondiente lado opuesto dan hileras armónicas, y las nuevas intersecciones son una configuración de Ceva. 

EJERCICIO 48. Revisa el Ejercicio 8 en el que se pide dibujar un panal en perspectiva. Lo difícil era arrancar y definir el horizonte. Ahora es muy fácil y natural; de la configuración de Ceva se define con tres instrucciones.

## 2.3. La topología del Plano Proyectivo

Veremos varias descripciones globales del Plano Desarguesiano, que bajo la óptica “topológica” es mejor conocido como el *Plano Proyectivo*. Revelan por qué fue un ejemplo tan importante en el desarrollo de la Topología: esa *nueva geometría flexible o de la continuidad* que se consolidó hacia finales del siglo XIX. Quizá expliquen algo de la dificultad histórica a aceptar esta geometría (la proyectiva) como *válida* o susceptible de ser enseñada; por qué se le ha tratado como una especie de patito feo que los matemáticos han dejado en custodia de arquitectos y pintores.

### 2.3.1. El cuadrángulo extendido

Con las nociones geométricas que hemos desarrollado, vale la pena regresar a revisar con cuidado nuestra primera escena. De ello saldrá una primera descripción topológica del Plano Proyectivo.

#### ESCENA 27. Las tres losetas.

Consideremos cuatro puntos  $A, B, C, D$  en  $\mathbb{D}^2$ , en *posición general* (es decir, *ninguna terna es colineal*); lo llamaremos un *cuadrángulo* y a los puntos, sus *esquinas* o *vértices*. Esta es la base de nuestra primerísima escena que arrancaba con una “loseta”, pero ahora la recargamos en un paso anterior de su construcción, pues ya tenemos el lenguaje para remediar las arbitrariedades e imprecisiones que cometimos en aquella ocasión.

Por esos cuatro puntos se pueden trazar seis líneas (que sean exactamente seis, equivale a que los vértices estén en posición general). Y estas seis líneas se parten naturalmente en tres pares que hemos coloreado de rojo, azul (como en la Escena 1) y verde (que nos habíamos ahorrado en aquella primera escena). Lo que distingue a las parejas de un color es que sus puntos de intersección no son esquinas del cuadrángulo; son puntos nuevos pues los vértices que generan a las dos líneas son parejas complementarias de la cuarteta inicial (aquí, también usamos el hecho de que en  $\mathbb{D}^2$ , por Pl:  $(1 - 1)$ , cualquier par de rectas se intersectan).

Por tanto, obtenemos tres nuevos puntos P, Q, R. Los llamaremos, junto con las tres líneas por ellos, el *triángulo diagonal* o *derivado*. Éste se colorea de manera natural: sus vértices heredan el color de las líneas que les dieron vida y ese color se transfiere al lado opuesto del triángulo.

A esta configuración de 7 puntos y 9 líneas, la llamaremos la *configuración del cuadrángulo extendido*.

Lo que habíamos llamado *loseta* en la Escena 1,

porque corresponde a nuestra intuición geométrica del mundo cotidiano, y que más bien debíamos llamar ahora *región cudrangular*, surge de escoger un vértice (en este caso Q) del triángulo diagonal. Entonces, tenemos un horizonte definido como su lado opuesto en el triángulo derivado (el verde), y con esta línea seleccionada como horizonte procedemos a definir dos triángulos que, al colorearlos, gráficamente definen la loseta.

Lo que queremos remarcar ahora es que pode-

mos definir otras dos losetas sobre ese mismo cuadrángulo.

Obsérvese que las seis líneas tienen ahora tres puntos: dos vértices del cuadrángulo y un vértice del triángulo diagonal. Esto permite diferenciar los dos segmentos en esas líneas con extremos en los vértices originales: uno jugará el papel de *frontera* (o *lado* o *arista*) de las losetas (por ejemplo, “A—B sin P” para la loseta verde), y el otro tipo de segmento es el que sí tiene un punto diagonal (por ejemplo, “B—D con Q”) que serán los *segmentos diagonales* de las losetas.

La loseta con centro P se obtiene seleccionando al horizonte rojo ( $Q \vee R$  opuesto a P) y luego... A con un arrastre C—D como diagonal; ...  
...y el otro triángulo es el BCD.

Analogamente, se dibujan los dos triángulos de la loseta azul centrada en R con horizonte  $P \vee Q$ .

Ahora, le toca al lector mover los puntos de control. Cuando uno de ellos se mete dentro del triángulo (euclidiano) de los otros tres hay un momento de confusión. Se pierde la condición de posición general (tres puntos se alinean) y la construcción

pierde sentido. Pero pasado ese instante crítico, todo vuelve a cobrar sentido, regresan a estar en *posición general* y las tres losetas juegan ahora el mismo papel: se parten en dos (en la pantalla, no en  $\mathbb{D}^2$ ), y el triángulo derivado se nos revela visualmente como configuración de Ceva.

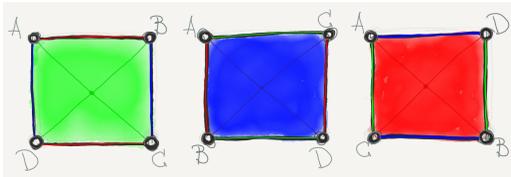
Si se saca el vértice atrapado en el triángulo (euclidianamente, reiteramos) por otro de sus lados, la loseta que se ve completa es de otro color. Juegue para ver cada una de las losetas (verde, azul y

roja) toda dentro de la pantalla.

Observe que lo que cambia en ellas es cómo se acomodan los vértices en su frontera.

¿De cuántas maneras se puede confeccionar un collar con cuatro cuentas distintas? No es difícil convencerse de que son tres. Son lo que se llaman *ciclos* o *arreglos cíclicos* de cuatro elementos. Y corresponden a las tres losetas.

Esto nos permite *cortar* (como con tijeras) el Plano Proyectivo a lo largo de los segmentos frontera, y reconstruirlo a partir de sus tres losetas:

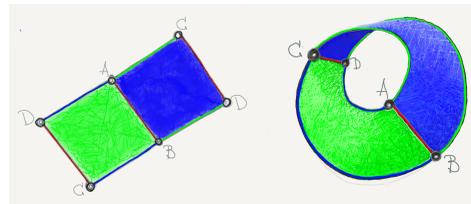


Cualquier par de losetas comparten dos de sus aristas opuestas. Al *identificarlas* (o pegar a lo largo de ellas), se obtiene una *banda de Moebius*.

La frontera de esta banda de Moebius es circular (de una sola pieza), y en ella aparecen los cuatro vértices en el orden cíclico de la tercera loseta.

Entonces, para reconstruir el Plano proyectivo:

- se pegan una banda de Moebius y un disco por sus fronteras, que son ambas como un círculo.



Aquí, usamos el término *disco* en su sentido *topológico*; es lo mismo que un cuadrado, pues se les piensa hechos de un material flexible e ideal, en el que las esquinas no importan, se pueden moldear siempre y cuando no haya rasgaduras o discontinuidades. Así, el Plano Desarguesiano (o Proyectivo) es una superficie muy precoz en términos históricos, pues la definición (y el nombre) de la banda de Moebius se atribuye al matemático alemán August Ferdinand Möbius (1790 – 1868), quien nació dos siglos después de Desargues.

El Plano Proyectivo, como superficie *no es orientable* pues contiene bandas de Moebius. Y no se puede dibujar dentro del espacio de dimensión 3 ( $\mathbb{R}^3$ ) sin auto-intersecciones; pero esto se logró demostrar formalmente hasta el siglo XX. Fue entonces uno de los ejemplos paradigmáticos que sirvieron para desarrollar la topología.

### 2.3.1.1. La configuración 13-13

#### ESCENA 28. Cuatro regiones triangulares.

Esta escena empieza a partir de la anterior sin co-

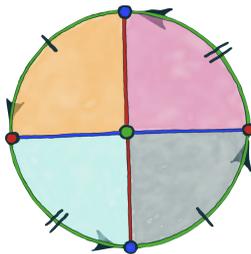
lorear las tres losetas. Se añaden seis nuevos puntos: dos de cada color en las intersecciones de un lado del triángulo diagonal con las otras líneas de su color. Nótese que, además, hemos decorado con colores distintos a los vértices del cuadrángulo.

Los seis puntos nuevos caen en cuatro líneas y en cada una aparecen los tres colores básicos. La razón de estas coincidencias es el Teorema Armónico y ya lo vimos en el Teorema 4 (de Simetría); pues esta configuración es justo la de entonces (que lla-

mamos 13-13), pero ahora llegamos a ella a partir de un cuadrángulo y no de una terna en una línea.

Hemos coloreado el triángulo diagonal PQR con horizonte en las cuatro líneas nuevas usando su color. Se obtienen las cuatro regiones triangulares en que los lados del triángulo diagonal cortan el plano. Cada una tiene como centro a un punto del cuadrángulo original. Es decir, hay una correspondencia natural entre los cuatro puntos originales, las cuatro líneas últimas y las regiones triangulares (que se indica con los colores).

Si recortamos las cuatro regiones triangulares y las volvemos a pegar por sus aristas comunes alrededor de un vértice, lo que nos queda es



- *un disco en el que hay que identificar (o pegar) todas las parejas de puntos antípodos en la frontera,*

para obtener de nuevo al Plano Proyectivo; y ésta es otra de sus descripciones topológicas clásicas.

EJERCICIO 49. En la escena, lleva las tres líneas del triángulo diagonal a la línea ideal al infinito; en cada una, la figura que aparece es la de los “cuatro cuadrantes” del Plano Cartesiano.

EJERCICIO 50. Desarrolla la construcción dual de la Es-

cena 27 (sin iluminar regiones) que continua en la Escena 28. Esta nueva escena empieza con cuatro líneas  $a, b, c, d$  en *posición general* (i.e., sin ninguna terna concurrente). En el paso final se obtienen cuatro puntos en los que concurren tres líneas; ponles los nombres  $A, B, C, D$  de tal manera que sea evidente que la configuración 13-13 es autodual; y más aún, con una asignación precisa entre los puntos y las líneas que se mantiene instrucción a instrucción y preservando la dualización de las fórmulas que los definen. Observa que hay nueve hileras armónicas y nueve haces armónicos.

EJERCICIO 51. Relaciona la Escena 28 con la Escena 15. Si asignas a  $P, Q, R$  los nombres  $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$  respectivamente. ¿Cómo deben nombrarse los otros 10 puntos que hay en la configuración? ¿Está determinada esta asignación, o hay que tomar alguna otra decisión?

### 2.3.2. La esfera identificando antípodas

Hay otra manera natural de “visualizar” globalmente al Plano Proyectivo que tiene una enorme trascendencia geométrica.

#### ESCENA 29. Esfera módulo antípodas.

Al considerar un plano  $\Delta$  dentro del espacio de tres dimensiones, se puede escoger un punto  $O$  fuera de él ( $O \notin \Delta$ ) y una esfera con centro en  $O$ . Entonces, cualquier línea  $\ell$  por  $O$  corta a la esfera

en dos *puntos antípodas* (lo más alejados posible uno del otro en la esfera) y corta al plano  $\Delta$  en un punto  $X = \Delta \cap \ell$  (por  $PI:2 - 1$ ).

*En modo-3D, la herramienta euclidiana “Esfera” aparece en donde estaba “Círculo”, y se usa igual: se puede crear un punto en el primer click y con un arrastre se genera una esfera que aumenta su radio. Su borde se dibuja segmentado: ahí hay que seleccionarla como objeto y controla su tamaño. La línea  $\ell$  se crea como siempre, con un arrastre entre  $O$  y un punto libre que la controla en 3D; sus intersecciones con la esfera se obtienen con “Intersección” y un arrastre entre ellos (dos veces, pues la segunda define al punto que falta).*

Como por cualquier punto del plano  $\Delta$  se puede trazar la línea a  $O$ , esto da una correspondencia entre el plano y las parejas de puntos antípodas en la esfera. Dicho de otra manera, la proyección desde  $O$  de la esfera en el plano  $\Delta$  es una función “dos-a-uno” (se le llama un *cubrimiento doble*): para cada punto en el rango  $\Delta$ , su imagen inversa consta de una pareja de puntos antípodas.

En topología se usa la palabra “módulo” para obtener un “espacio topológico” a partir de otro, ha-

ciendo la identificación de puntos que se señala después de decir “módulo”. Así que lo que hemos visto se parafrasea:

- *El Plano Proyectivo es (topológicamente igual a) la Esfera módulo antípodas (cada pareja de antípodas trabaja como un solo punto, u objeto).*

Recordando que estamos en el Espacio Desarguesiano,  $\mathbb{D}^3$ , los puntos ideales de  $\Delta$  (que forman

su línea al infinito) corresponden a la intersección de la esfera con el plano paralelo a  $\Delta$  que pasa por el centro de la esfera  $O$  (*el plano se traza con la herramienta “Paralela” arrastrando a un punto en el interior del triángulo que definió a  $\Delta$  hasta  $O$ ; y la intersección con la herramienta “Intersección” y un arrastre*). Y esto es un círculo máximo que parte a la esfera en dos hemisferios. Un hemisferio es topológicamente equivalente al disco. Como en el interior de él ya solo tenemos un representante de las parejas antípodas, se obtiene de nueva cuenta que el Plano Proyectivo es (topológicamente equivalente a) un disco en el que se identifican los pares de puntos antípodas de su círculo-frontera

La línea ideal no es especial. Para cualquier línea en  $\Delta$  (*en la Escena 19 vimos como trazarlas*), su plano por  $O$  corta a la esfera en un círculo máximo que se mapea 2-1 sobre ella. De tal manera que líneas en  $\Delta$  corresponden a círculos máximos en la esfera. Otra manera de verlo y que abarca más... es controlando a los planos por  $O$ , con su línea ortogonal en  $O$  (*se usa la herramienta “Ortogonal” arrastrando la línea a  $O$* ) y luego cortando con  $\Delta$ . ■

Antes de seguir adelante, vale la pena hacer dos observaciones.

La primera es que los círculos máximos (llamados así porque no hay otros más grandes que ellos en la esfera) son el equivalente a las líneas rectas en el plano en el sentido de que son las *geodésicas* en la esfera, es decir, dan las trayectorias más cortas entre los puntos. Como estas geodésicas corresponden a las líneas proyectivas; el *cubrimiento doble* de la esfera sobre el plano proyectivo indica que este último puede heredar la geometría rígida de la esfera. De hecho lo hace y lo veremos en la Parte II.

La otra observación que queremos hacer, y que en el último paso se mostró gráficamente, es que la ortogonalidad entre líneas y planos por  $O$ , baja a un apareamiento que se llamará *polaridad* entre puntos y líneas del Plano Desarguesiano. Como veremos, esta polaridad tiene mucho (o todo) que ver con esa *geometrización rígida* que indicábamos en el párrafo anterior; y “materializa” la dualidad.

Ahora, vamos a relacionar a las tres escenas anteriores.

### ESCENA 30. El cubo de un cuadrángulo.

En modo-2D, hemos trazado un *cuadrado* (a ojo, pues en la realidad milimétrica es un rectángulo) usando las herramientas euclidianas de trazo de líneas paralelas y de perpendiculares, para que dos de los vértices de su triángulo derivado sean puntos ideales. Llamemos  $\Delta$  al plano- $xy$ .

Al pasar a modo-3D se define un punto  $O$  fuera de  $\Delta$  y una esfera centrada en él.

Al *levantar* el cuadrángulo a la esfera, se obtie-

nen ocho puntos en ella, apareados antipodalmente.

Las dos líneas rojas se levantan a círculos máximos que se cortan en los puntos antípodas que corresponden al punto ideal de su dirección y que está en  $\Delta$  como Plano Desarguesiano. Esto se obtuvo trazando los correspondientes planos por  $O$  e intersectándolos (entre ellos y con la esfera).

*Nótese que estos planos no se definieron usando tres puntos (resaltaría el triángulo), sino arrastrando una línea (roja) a un punto fuera de ella ( $O$ ).*

De igual manera, el par de líneas azules en  $\Delta$  se levantan a dos círculos en la esfera y sus planos se cortan en la línea por  $O$  que pasa por el otro punto ideal del triángulo derivado del cuadrado en  $\Delta$ .

Las diagonales del cuadrado también se levantan a círculos máximos y se cortan en un tercer eje que pasa por  $O$ .

Al levantar el cuadrángulo y sus seis líneas a la esfera, se obtiene una figura bien conocida. Es la proyección de un cubo a la esfera desde un centro común, junto con los segmentos diagonales de sus seis caras. Cada par de caras antípodas (y paralelas

en el cubo) se identifican para dar una de las tres losetas en el Plano Proyectivo.

Si, por último, se dibujan los planos que dos a dos definen los tres ejes por  $O$ , estos cortan a  $\Delta$  en los lados del triángulo diagonal del cuadrado original. Uno de ellos, por construcción, es la línea al infinito de  $\Delta$ . De nuevo es una figura bien conocida: son los clásicos planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ . Sus ocho *octantes* parten a la esfera en *triángulos esféricos* que corresponden a los ocho triángulos

de un octaedro con el mismo centro: su identificación por parejas antípodas dan las cuatro regiones triangulares de la Escena 28, que ahora se ven como cuatro cuadrantes en  $\Delta$  (ver Ejercicio 49).

*Falta observar dos cosas.*

*Los planos coordenados se definieron arrastrando un eje al otro, y con la herramienta “Plano” activa, por supuesto; así que esta herramienta amplía considerablemente su gama de opciones de proveer datos para definir planos.*

*Y por último, el plano- $xy$  o  $\Delta$  se definió muy al final de la construcción con tres puntos (y luego se oculto su color gris) para que entrara a la base de datos y así poder definir líneas en él (dos lados del triángulo diagonal) como intersección con otros planos; pues el plano- $xy$ , aunque se dibuje como referencia no es en sí objeto de la construcción. Así que los cuatro puntos del cuadrángulo no están bien definidos como coplanares. Esto implica que la construcción es inestable (explore que quiere decir esto); aunque no del todo pues el plano- $xy$  tiene imán: atrae puntos hacía él cuando están cerca. ■*

EJERCICIO 52. Haz la construcción anterior sobre un cuadrángulo plano general y bien definido.

### 2.3.3. Coordenadas homogéneas y algo de historia

Hacia mediados del siglo XIX, se logró un avance profundo en la geometría proyectiva, que fue la introducción de las *coordenadas homogéneas* y que se debe, entre otros autores, a nuestro viejo conocido August Ferdinand Möbius. Con ideas del estilo de nuestra última escena (la 30), se puede formalizar y extender lo que hicimos en las Escenas 10 y 15 para dar nombres con coordenadas a los puntos de fuga. La idea central es que los puntos del Plano Desarguesiano,  $\mathbb{D}^2$  (y aquí conviene pensar que es justo el plano en el infinito de  $\mathbb{D}^3$ ), están en correspondencia uno-a-uno con las líneas por un punto en el Espacio Euclidiano,  $\mathbb{E}^3$  o  $\mathbb{R}^3$ . Y usando esto, se les pueden asociar coordenadas de manera natural como lo hicimos en la Escena 15. Vale la pena observar que en esa escena, se llegó a la configuración del cuadrángulo extendido (Escena 27) pero a partir de su triángulo derivado y dos puntos “diagonales”. Así que hemos estado muy cerca de cómo coordinatizar. Pero preferimos no meternos en los

detalles para quedarnos con su significado histórico: darles a la Geometría Proyectiva y al Espacio Desarguesiano, el estatus de área de las matemáticas relevante y de objeto matemático establecido, respectivamente.

Este avance seminal, tuvo el efecto inmediato de incorporar la geometría proyectiva al gran caudal de lo que a la larga se llamaron *álgebra lineal* y *geometría algebraica* y que arrancaron ambas, como áreas, con la geometría analítica de Descartes. Pero también, con el paso del tiempo, tuvo el efecto de desplazar a la geometría proyectiva como tal (ésta, que presentamos aquí y que viene de la perspectiva renacentista) hacia la periferia de lo que se enseña y transmite en matemáticas de generación en generación.

Recientemente, recobró importancia didáctica por sus aplicaciones a la industria del entretenimiento; pues la “geometría proyectiva coordinatizada” es la base matemática para la animación por computadora, así como también fue la base para la programación de *ProGeo3D*. Pero en este libro, no queremos meternos en esos detalles técnicos

que conducen a un cambio de método y llevan a lo algebraico. Mas bien, queremos seguir trabajando con el método constructivo y sintético o geométrico que hemos usado.

Así que, a continuación, veremos que este método constructivo y dinámico también puede servir para describir y visualizar lo que históricamente siguió a la coordinatización de la geometría proyectiva: la observación de que dentro de ella se pueden encontrar modelos de las otras geometrías (la euclidiana y las no euclidianas).

## Parte II

# Movimientos, curvas armónicas y polaridad

El *movimiento* en sí ha intrigado a grandes pensadores desde la antigüedad; baste mencionar la fábula griega de Aquiles y la Tortuga. Expresarlo de manera precisa condujo a Sir Isaac Newton (Inglés, 1642-1727) a avances fundamentales en la Física y las Matemáticas; pues en particular lo llevó a adentrarse en el meollo de la *continuidad* y lo condujo a controlar lo *infinitesimal*. Pero lo que él estudió es, en cierta manera, un caso simple (no dijimos sencillo): el movimiento de una partícula o cuerpo dentro de un ambiente fijo; mientras que aquí nos interesa hablar de *movimientos* de todo ese ambiente (se usa la misma palabra para dos cosas relacionadas, pero diferentes, ni modo).

Para hacerlo con precisión es necesario agregar otro ingrediente que es el concepto de *grupo*. Éste engloba a las estructuras abstractas que emergen de la *simetría*; agrupan las distintas simetrías de algún objeto y tienen una *operación algebraica* característica que, a su vez, es generalización de la suma o la multiplicación en los números. Sus primeras apariciones técnicas sobresalientes se dieron a principios del siglo XIX asociadas a los

nombres de los eternamente jóvenes Niels Henrik Abel (Noruego, 1802-1829) y Évariste Galois (Francés, 1811-1832) que usaron el grupo de simetrías abstractas de las raíces de los polinomios de grado 5 para estudiar su solubilidad. Pero la expresión artística de la simetría (y por ende de sus correspondientes grupos) es antiquísima. Baste invocar a los imponentes mosaicos de la Alhâmbra en donde se exponen todos los posibles patrones de simetría planos y *discretos* (en contraste con *continuos*), llamados “*grupos cristalográficos*” por los químicos que estudiaron el crecimiento de los cristales en la naturaleza a finales del siglo XIX.

En la segunda mitad de ese siglo, Marius Sophus Lie (Noruego, 1842-1899) combina las dos ideas anteriores; vislumbra la pertinencia fundamental de lo que conocemos ahora como *grupos de Lie* y se aboca a su estudio. Son grupos en el sentido de que son simetrías de un espacio, pero a la vez son continuos y enarbolan un riquísimo mundo infinitesimal.

Un ejemplo característico son los *movimientos rígidos* del Espacio Euclidiano tridimensional,  $\mathbb{E}^3$ .

Es muy probable que el lector este sentado frente a una mesa y que ahí se halle un libro, una taza o un lápiz en reposo: tomarlo, girarlo un poco y colocarlo en otro lado, involucra a estos movimientos si pensamos que en su condición de objeto sólido, trae dentro de sí una *base* (tres vectorsitos mutuamente ortogonales) respecto a la cual se puede expresar en coordenadas todo el espacio y entonces, al moverse el objeto, acarrea consigo al espacio (en abstracto); esto es un movimiento rígido. Y es tal nuestra familiaridad con el efecto de estos movimientos que podemos deambular (movernos) en nuestro ambiente con soltura; o bien, que la secuencia de proyecciones planas de una figura virtual que gira rígidamente, nos conduce a ver-intuir (y reconstruir) su tridimensionalidad.

Esto último implica que también estamos visualmente acostumbrados a las *deformaciones proyectivas planas*. Si estamos frente a una puerta y vemos (aunque sea con un sólo ojo) que se abre, sabemos perfectamente si se abre hacia nosotros o hacia el otro cuarto y con qué eje, simplemente por cómo se deforma la imagen del rectángulo

(cierre los ojos e imagine las cuatro opciones). Estas deformaciones de imágenes planas debidas a cambios continuos de posición de objetos rígidos en el espacio, o equivalentemente de nuestro punto de vista, son parte fundamental del acervo visual en el que se sustenta cómo vemos al mundo. Y estos movimientos proyectivos planos forman un grupo de Lie que es el que nos interesa estudiar en esta segunda parte del libro.

Christian Felix Klein (Alemán, 1849–1925) observa que ese grupo de Lie, es lo suficientemente rico para contener subgrupos que modelan las tres geometrías rígidas planas (las “no euclidianas” se estaban aceptando como válidas en esa época). Y lo ostenta como el ejemplo principal de su célebre *Programa de Erlangen* que presenta en 1872. En él, se atreve a afirmar que “*una geometría no es más que el estudio de un espacio bajo la acción de un grupo de Lie*”; y con eso resume la proliferación de geometrías de muy distintos tipos que se estaba produciendo; las explica a todas como distintas instancias de un mismo esquema general.

Este es uno de los temas sobre los que quere-

mos discurrir en esta Parte II. Pero no seguiremos la línea de desarrollo histórico que, en buena medida, se dio dentro de la vertiente *analítica* de la geometría: la que usa coordenadas y concibe a los grupos de Lie como representados por los grupos de *matrices*. Nos mantendremos en el método de la llamada *geométrica sintética*: la que hemos seguido aquí basándonos en construcciones de geometría dinámica, pues este enfoque ya nos ha enfrentado de manera vivencial, experimental y visual a los propios *movimientos proyectivos*.

Desde este *punto de vista constructivo*, el concepto central que es necesario controlar, construir y cultivar, es el de las curvas que son *lo que vemos cuando vemos un círculo*, es decir, como se deben dibujar los círculos con buena perspectiva. Aunque comúnmente se les describa por propiedades métricas respecto a focos, estamos hablando de las viejas y prestigiadas curvas que los griegos llamaron *cónicas* por ser secciones planas de un cono. Luego reaparecieron en la geometría analítica como las curvas definidas por polinomios de grado dos y en el mundo real como las órbitas de

los planetas; y, ya en el siglo XIX, se descubrieron definiciones de ellas intrínsecas de la geometría proyectiva. La definición que usamos aquí es, hasta donde sabemos, nueva. Está tan relacionada con la armonía, que usamos el nombre de *curvas armónicas* o *de armonía* para ellas, pues son:

- *el lugar geométrico de los puntos que ven como armónicos a cuatro puntos fijos en posición general y ordenados cíclicamente.*

Es decir, están asociadas a las losetas; las envuelven como lo hace su círculo circunscrito a un cuadrado, y es donde éste debiera dibujarse si el cuadrado se proyecta a una loseta en un lienso.

El Capítulo 3, que es el que viene, además de presentar a las curvas armónicas y demostrar que son las cónicas, se encausa a introducir la noción de grupo y concluye con un vistazo rápido de su teoría general que, en vez de ser exhaustivo o amplio, pretende presentar sólo lo que se usará después.

En el Capítulo 4 presentamos las tres geometrías planas rígidas en el espíritu del Programa de Erlangen, es decir, *a la Klein*. La euclidiana se sigue de

lo que se hizo en el Capítulo 3. Motiva el enunciado del Teorema de Polaridad sobre curvas armónicas (o cónicas), que debe atribuirse a Jean Víctor Poncelet y Christian von Staudt. Éste teorema se convierte en la herramienta constructiva básica para obtener el Plano Hiperbólico a la Klein; en ese papel lo usamos para familiarizarnos con él y apreciar su poder. Por último, se ve la geometría esférica, o bien, cómo concebir al plano proyectivo como espacio base de una geometría rígida.

En el Capítulo 5 se prueba el Teorema de Polaridad con lo que se sella formalmente esta segunda parte. La idea básica está inspirada en la demostración del Teorema del Hexágono de Pascal debida a Germinal Pierre Dandelin (Francés, 1794–1847). Así como el Teorema de Desargues se vuelve casi inmediato al levantarlo a la tercera dimensión, Dandelin recurre a las superficies doblemente regladas en el espacio para demostrar, con argumentos de incidencia, el célebre Teorema de Pascal en el plano. En el artículo original de Dandelin, [5], buena parte del trabajo se va en construir una superficie reglada con una cónica dada como sección pla-

na, pero esto se nos simplifica pues, empezando el siglo XX, al principio de su aclamado libro *Geometría e Imaginación*, [6], David Hilbert y Stephan Cohn Vossen construyen las superficies doblemente regladas a partir de tres líneas en posición general, usando simple incidencia. Este enfoque nos enfrenta con un hecho intuitivamente claro pero más allá de los métodos sintéticos: para seguir adelante se debe asumir como válido y lo llamamos el *Axioma del Equipal* pues dice que las superficies regladas definidas según la construcción de Hilbert-CohnVossen son doblemente regladas (como los equipales). Hacia el final del capítulo, y usando la misma configuración que originalmente usó Dandelin, se prueba que este axioma es equivalente al Teorema de Pappus: el primer teorema de la geometría proyectiva pues es el primer enunciado que incluye sólo términos de incidencia y se debe a Pappus (o Papo) de Alejandría (290–350). Su relación con otros enunciados equivalentes que tradicionalmente se usan como axioma, se abordará en la tercera parte del libro.

## Capítulo 3

# Movimientos, curvas de armonía y grupos

Empezamos revisando algunas escenas de la Parte I desde el punto de vista de los movimientos. Primero, con una escena que reconstruye la primerísima de las cuadrículas (Escenas 1 y 2). Pero ahora, para discutir las *proyectividades del plano*, que son los *movimientos* propios de la geometría proyectiva y que, aunque se estén viendo explícitamente de manera experimental, se pueden abordar formalmente desde diversos puntos de vista. Describimos dos de estas posibilidades, pero damos razones para buscar una tercera vía más cer-

cana al método sintético-constructivo.

En la Sección 2, aún con espíritu experimental, al fijar el horizonte (como en la Escena 5) se obtienen los movimientos de la *geometría afín*. Éstos también se pueden ver como la “suma” de las *traslaciones* (que ya usamos en la Escena 16) y las *transformaciones lineales* que son las propias del álgebra lineal. Así, se presenta esta clásica *suma de grupos* de una manera constructiva y visual.

Los problemas que hay que resolver para construir en el mismo espíritu de las escenas anteriores

a los *movimientos rígidos* (los de la geometría euclidiana clásica que abstraen a los de nuestro entorno inmediato y que se producen al mover cualquier objeto rígido), nos conducen a los otros dos conceptos básicos que se presentan en este capítulo además de los grupos: las curvas armónicas y las reflexiones armónicas.

La definición de las curvas armónicas invoca naturalmente a su concepto dual que llamamos *haces de armonía*. Ver que también se les puede llamar *haz tangente* de una curva es la primera aplicación que presentamos de las muchas que habrá de las reflexiones armónicas. Éstas nos llevan a ejemplos de grupos chicos y luego a definir en general a los de Lie que serán el sustento del siguiente capítulo.

### 3.1. Movimientos proyectivos y transformaciones

Reconsideremos nuestra primera escena de una cuadrícula construida a partir de una loseta controlada por sus cuatro vértices.

#### ESCENA 31. Cuadrículas y movimientos.

Aunque sea difícil lograrlo a mano, intentamos que los cuatro vértices de la configuración inicial,

$A_0, B_0, C_0, D_0$ , sean los vértices de un cuadrado euclidiano perfecto y paralelo a los ejes de la pantalla. Además, les hemos puesto el subíndice  $_0$  para dejar establecido que generan una cuadrícula especial y fija, que llamaremos la *cuadrícula básica*, la *cuadrícula base* o la *cuadrícula inicial*.

Si ahora que ya se puede, movemos cualquiera de los puntos de control en su propia línea vertical (y, por favor, hágalo para fijar ideas), nuestro aparato perceptivo nos querrá hacer creer que una región cuadrículada de 7 por 7 gira como una reja. Regresar el punto a su lugar y continuar el movimiento un poco más allá, la hace seguir su giro hacia el otro lado.

En general, podemos interpretar cualquier movimiento de los puntos-control como el movimiento de un *tablero* imaginario en el espacio 3D, que, en principio, podemos llevar a cualquier posición (convirtiéndolo en plafón, ventanal, piso, etc.). Esto es lo que nuestro sistema perceptivo-visual dicta e intenta imponer; pues el movimiento y la forma coherente del dibujo del tablero nos obliga a ver tridimensionalidad. Tanto por nuestra expe-

riencia vivencial como por nuestra amplia trayectoria cinematográfica (las horas y horas que hemos visto cine y animaciones), nuestro cerebro crea un tablero volando en el espacio: y además, para facilitar esta interpretación, hicimos la chamba cosimétrica de sólo mostrar los segmentos relevantes.

Pero también podemos dibujar todo el andamio constructivo que nos condujo al tablero, para adoptar otra interpretación (más realista) de lo que está pasando, que es la que queremos preci-

sar en esta sección, y adoptar temporalmente para las siguientes secciones.

No es necesario irse a 3D con un plano moviéndose ahí y una proyección de él en la pantalla, sino que todo sucede dentro del mismo Plano Desarriesiano,  $\mathbb{D}^2$ . Podemos pensar que la cuadrícula actualmente dibujada en la pantalla define una función de  $\mathbb{D}^2$  en sí mismo: la que manda a la cuadrícula base (la de los puntos sub-cero) en la actual (definida por los puntos que podríamos llamar  $A_1, B_1, C_1, D_1$  y en principio son distintos de los sub-cero; además, cada uno llegó por su propio itinerario temporal, por su propio camino, a su nueva posición).

Como las cuadrículas se pueden extender y subdividir tanto como se quiera, a cada punto  $X$  de  $\mathbb{D}^2$ , se le puede *describir cartesianamente* (respecto a la cuadrícula básica) con la precisión que se necesite. Por tanto, se puede definir su punto correspondiente en la cuadrícula actual (de vértices sub-uno) siguiendo en ella las mismas instrucciones cartesianas (qué tantos cuadritos, y de qué tamaño, para allá y qué tantos para acullá).

Pero aún hay más. Llegamos a la cuadrícula actual (la sub-uno) como secuencia de movimientos. Es decir, si al principio fue el tiempo cero ( $t = 0$ ) y ahora es el tiempo uno ( $t = 1$ ), para cada tiempo  $t$  en medio ( $0 \leq t \leq 1$ ) hubo una cuadrícula definida por vértices  $A_t, B_t, C_t, D_t$ . Así que si llamamos  $X_0$  al punto  $X$ , (y que podemos pensar como un punto del timbiriche original, definido como intersección de ciertas líneas e integrado a la configuración), se genera todo un camino continuo

$X_t$ , para  $0 \leq t \leq 1$ , que empieza en  $X_0$  y concluye en el  $X_1$  actual. Y esto sucede si para cada tiempo  $t$ , la cuarteta de vértices sub- $t$  estuvo en posición general. ■

Conviene ir dando nombres precisos a los objetos que nos interesan. Empezamos por establecer algo muy general.

- Llamaremos **transformación** a una función biyectiva (uno-a-uno y sobre) de un conjunto en sí mismo.

En nuestro caso de interés, que es el Plano Desarguesiano, resulta natural definir (como ya lo hemos hecho y usado en § 2.2.2.1):

- Una **colineación** de  $\mathbb{D}^2$  es una transformación de  $\mathbb{D}^2$  que manda líneas en líneas.

Y por otro lado, a las transformaciones de  $\mathbb{D}^2$  que acabamos de describir (aún sin gran precisión), las llamaremos **proyectividades** (las transformaciones de  $\mathbb{D}^2$  definidas intuitivamente por una cuadrícula inicial y otra final). Nótese que no le estamos

dando a esta definición la misma importancia tipográfica que a las dos definiciones anteriores. Esto se debe a que estamos concientes de que aún no es muy precisa, es una primera aproximación. Aunque sí esperamos que sea intuitivamente clara; que esté claro que tal concepto debe existir, aunque falte mucho trabajo para definirlo bien.

Queda por demostrar que *las proyectividades son colineaciones que están determinadas por su efecto en cuatro puntos en posición general*. Llamaremos a esto el **Principio de 4 en 4**, pues una parte se demostrará en su momento como un teorema y la otra (la unicidad) está muy cercana a ser axioma.

Y además de las proyectividades, hemos también descrito a un *movimiento* como un “camino continuo de transformaciones”. En nuestro caso, de proyectividades, y que empieza con la transformación *identidad* (la que deja en su propio lugar a cada punto y se asocia con la misma cuadrícula inicial y final).

A un movimiento lo podemos pensar como una deformación continua del plano o una película (en la que cada cuadro es la imagen de una proyectivi-

dad), y que nos permite frases descriptivas como “la línea al infinito se mueve de su lugar en el infinito y aparece como el horizonte por tal esquina de la pantalla”, o “tal punto se fue hacia allá, pasó por el infinito y regresó por acá (la dirección opuesta)”.

El meollo de esta sección fue, en resumen, que hay un conjunto de transformaciones del Plano Desarguesiano que son las proyectividades, y que si interpretamos “*movimientos proyectivos*” como el resultado de caminos ahí, nuestra basta experiencia biológico-evolutiva y cinematográfica los interpreta muchas veces como tridimensionalidad, pues la misma película se puede interpretar como un plano cuadrículado moviéndose en el espacio, y siendo proyectado a un plano fijo.

Una observación muy importante es que

- *el conjunto de proyectividades tiene dimensión 8.*

Pues cada uno de los cuatro puntos con que se controlan, puede moverse en un pequeño disco —que da dos grados de libertad— sin que se pierda nunca la condición de posición general. Esta particu-

laridad que tiene el conjunto de las proyectividades de tener bien establecida una noción de continuidad y, más aún, de modelarse localmente con coordenadas reales, es la que explota Sophus Lie en sus famosos grupos; es la que los hace *grupos de Lie*.

Sin embargo, debemos destacar que nuestro movimiento en ese espacio de ocho dimensiones es aún muy torpe, pues sólo nos podemos desplazar en planos “perpendiculares”. Cada punto controla dos de las ocho direcciones independientes, y se van turnando en “a cuál le toca”, o “quién las trae, mientras los demás son estatuas de márfil”, pues en esta escena nunca se pueden mover los controles en “coreografías” coordinadas. Aunque pronto veremos que hay otras maneras menos torpes de controlar estos movimientos.

EJERCICIO 53. Si permitiéramos que los puntos de control de una cuadrícula salieran de la pantalla para definir movimientos. Describe un movimiento que cambie el orden cíclico de la loseta que se ve como cuadrángulo convexo en la pantalla.

### 3.1.1. Nota histórica

El nombre “proyectividad”, así como el mismo de geometría “proyectiva”, viene de que en el desarrollo de esta geometría, desde Desargues hasta mediados del siglo XIX, lo que se privilegió fue el concepto básico de proyección. Y con razón, pues estas funciones, como hemos visto, están en el meollo de la perspectiva. Sin embargo, una proyección es por definición una función entre dos planos distintos; el dominio y el rango son diferentes. Así que para obtener una transformación (en la que el dominio y el rango son iguales), hay que *componer* a varias proyecciones. Pero resulta que la composición de proyecciones ya **no es** necesariamente una proyección. Se complica la definición y cómo tratar estas funciones.

Este camino teórico de definir las *proyectividades* como la composición de varias proyecciones, fue el que explotaron con enorme éxito los matemáticos de finales del siglo XVIII y principios del XIX. Lo que es admirable, es que lo hicieron mucho antes de que el concepto general de función,

que atribuimos a Georg Cantor (1845-1918) se estableciera; pero más aún, es también sorprendente que la estructura matemática que se produce con este enfoque es la de *grupoide*, algo más general que un *grupo*, y que se estableció hasta mediados del siglo XX dentro de la *teoría de categorías*. Ésta vía para estudiar las proyectividades fue precursora de grandes ideas matemáticas; pero esto mismo la llevo a establecer notación muy específica que hoy vemos como abigarrada, anacrónica y difícil de seguir; aunque algo de ella queda como lo es el uso de las flechas para la notación de funciones.

Pospondremos el estudio formal de estas proyectividades (composición de proyecciones) hasta la Parte III del libro, pues conviene tener más experiencias para disfrutarla. Sin embargo, hay que remarcar que la interpretación *cinematográfica* de nuestros movimientos (un plano moviéndose y siendo proyectado a la pantalla) cae en su terreno pues involucra la función que mueve al plano de la pantalla en el espacio, compuesta con la proyección que lo manda a la pantalla.

Y ya que estamos en notas históricas, vale la pe-

na mencionar que eso que estamos dejando sin demostrar (el Principio de 4 en 4, pág. 122) y que es la base de nuestra noción operativa y experimental de proyectividad, también involucra nociones profundas. Esta relacionado con la aritmetización o coordinatización del Plano Desarguesiano que discutimos al final del Capítulo 2.

Al final de este capítulo damos una tercera vía para estudiar las proyectividades basada en las reflexiones armónicas. La demostración de que las tres posibles nociones de proyectividad coinciden y que también coinciden con las colineaciones, quedará como uno de los temas profundos a tratar en la Parte III del libro.

## 3.2. Movimientos afines y rígidos

Las proyectividades que dejan en su lugar a una línea previamente seleccionada  $h$ , el *horizonte*, ya aparecieron al explorar las Escenas 5 y 10. Como espacio o grupo de Lie, estas transformaciones tienen dimensión 6, pues como vimos entonces, cuando se fija al horizonte, las cuadrículas dependen de tres puntos libres. A estas transformaciones se les llama *transformaciones afines*, y se les puede considerar como movimientos en el complemento de  $h$ . Así que cuando la línea seleccionada es la de los puntos ideales (o la línea al infinito) del Plano Desarguesiano  $\mathbb{D}^2$ , las transformaciones afines son las que representan a los *movimientos afines* del Plano Euclidiano,  $\mathbb{E}^2$ , que están determinadas por su valor en un triángulo (ver la escena de Retículas Triangulares, 4).

Por tanto, podemos considerar a la escena que sigue como una representación constructiva de los *movimientos afines vistos en perspectiva*.

También hemos usado una manera más fluida de presentar a los movimientos afines en perspec-

tiva en la Escena 16 (El otro lado del horizonte); el meollo de esa construcción es lo que queremos explicar ahora.

### ESCENA 32. Traslaciones y transformaciones lineales.

Como datos iniciales, tenemos una línea horizonte  $h$  (gris) que consideraremos fija. Fuera de ella, hay dos segmentos (o vectores) de control que no tocan a  $h$  y que coinciden en el punto  $O_0$ . Además, hay un punto  $O$  fuera de  $h$  al cual queremos *tras-*

ladar los vectores en  $O_0$ .

Al fijar  $h$  y pensarla como horizonte, se tiene una noción de “paralelismo”: dos líneas (no  $h$ ) son “paralelas” (o *paralelas según  $h$* ) si su intersección es un punto de  $h$ . Entonces, podemos copiar la construcción de trasladar vectores con *paralelepipedos* (losetas con horizonte  $h$ ).

Para trasladar al vector rojo: se traza la paralela por  $O$  de la línea que éste determina;... luego la paralela de la línea por  $O_0$  y  $O$  que pasa por su punta. Y el segmento opuesto en el paralelepipedo da el vector que queremos.

Analogamente, se traslada el vector azul a  $O$ , y ya tenemos la base trasladada de  $O_0$  a  $O$ .

Y a partir de ella, se puede construir... una cuadrícula con horizonte  $h$  y centrada en  $O$ .

Podemos ahora deambular por el grupo de Lie de los movimientos afines con otros parámetros que dan una sensación de menor torpeza. Al mover  $O$ , estamos viendo las *traslaciones*, que dejan fijos al horizonte y a todos sus puntos —cada línea se mueve a una paralela (ver el Ejercicio 54). Y al mover los vectores en  $O_0$  (dejando a  $O$  en un lugar

fijo), vemos las llamadas *transformaciones lineales* con  $O$  como origen. Éstas sí mueven los puntos en el horizonte aunque, como línea, el horizonte se quede en su lugar (aprovecha el Ejercicio 54 para verlo experimentalmente). ■

Esto da una descripción clásica de las transformaciones afines como la *suma* de dos subgrupos. El primero, las traslaciones, tiene dimensión 2 y como espacio topológico es igual al Plano Euclidiano (pues a cada posición de  $O$  corresponde la trasla-

ción que manda  $O_0$  a  $O$ ). Y el segundo también es llamado el *grupo general lineal* de orden 2, y se puede representar con matrices de 2 por 2 (cuyos cuatro coeficientes corresponden a las dos coordenadas de cada uno de los dos vectores variables de la base).

EJERCICIO 54. En la escena anterior: traza un línea de pendiente 2 : 3 (o 5 : 1) con dos puntos en el timbiriche y mueve  $O$ , para comprobar experimentalmente que su punto de fuga no se mueve.

### 3.2.1. Rotaciones en perspectiva

Las transformaciones afines incluyen a las *rígidas*, que son la abstracción bidimensional de los movimientos que vemos todo el tiempo. Como habíamos señalado, al mover un libro sobre una mesa, los puntos del libro mantienen sus distancias relativas (es un objeto *rígido* y de aquí el nombre) pero cambian todos juntos y ordenados su posición absoluta. Ese simple movimiento define una transformación de todo el plano de la mesa en sí mismo, pues la bidimensionalidad de la tapa del

libro sobre la mesa da la base para localizar por coordenadas a cualquier otro punto (tanto en la posición inicial como en la final).

#### ESCENA 33. Movimientos rígid.

En esta escena se controlan los movimientos rígid de un plano vistos en perspectiva. Y motiva a las siguientes secciones en las que se fundamenta su construcción.

Hay un control (rojo) que está restringido a vivir en un círculo para establecer gráficamente que tie-

ne un sólo grado de libertad (vive en dimensión 1 y se puede animar). Al moverlo, el tablero gira. Y lo que vemos es la proyección de un tablero rotando rígidamente en un plano visto en perspectiva (de ladito). Hemos logrado la “coreografía” de que los dos vectores básicos giren al unísono.

El otro control (negro) da las traslaciones del tablero como en la escena anterior.

Esta escena, está basada en una loseta fija que *determina la geometría*, y que se mantuvo escondida en el Paso 1 para la presentación. Esos cuatro puntos en posición general y con un orden cíclico, determinan un horizonte y un centro. Pero además, como veremos en la siguiente sección, también determinan una *curva de armonía*. Ésta es la curva que debe representar al círculo circunscrito a un cuadrado perfecto, cuando su proyección es la loseta que tenemos dibujada en la pantalla (pronto lo demostraremos). Por el momento, juegue con la posición de sus vértices para comprobar experimentalmente que su aparato perceptivo intuye círculos vistos en perspectiva; y a la vez, que se están dibujando elipses, e inclusive, que éstas se

pueden deformar tanto que se lleguen a convertir en hipérbolas.

Con la proyección del círculo (la curva armónica) ya dibujada en el lienzo, el control rojo define una dirección en el horizonte,  $h$ , y la  $h$ -paralela por el centro de la loseta corta a la curva armónica en un punto que (con el centro) da un vector del tamaño que queremos —y que gira con el control.

Para hallar su vector perpendicular, se utiliza la extensión de la herramienta armonía a 2 dimensio-

nes, que llamaremos *reflexión armónica*. Esto se debe a que la loseta también determina la noción de *girar en su centro un ángulo recto* que equivale a encontrar la *perpendicular*.

Una vez que se tiene una base *ortonormal* en el centro de la loseta, se traslada al punto negro que controla las traslaciones y con esa base...

...se construye al tablero flotante como en la escena anterior. ■

Para fundamentar esta escena, nos quedan dos grandes tareas pendientes.

La primera, construir las *curvas de armonía* — que ya definimos en la introducción al capítulo— y demostrar que son proyecciones de círculos. Esto demostrará a la vez, que son las clásicas *curvas cónicas*.

La segunda, definir las *reflexiones armónicas* y usarlas para definir la rotación por un ángulo recto. Y de esto obtendremos mucho más, pues veremos que es un caso particular de la *rotación* general, y que la noción de reflexión armónica nos permite dar mayor precisión a nuestra noción, aún vaga, de *proyectividad*. Aprovechando esto, también defini-

remos la noción general de *grupo de transformaciones* y revisaremos lo hecho hasta este momento a la luz de la nueva precisión teórica.

EJERCICIO 55. Lleva el centro del tablero al centro de la loseta de control y haz que gire el tablero, para comprobar visualmente que corresponden los círculos.

### 3.3. Curvas y haces de armonía

Consideremos una cuarteta de puntos en posición general con un arreglo cíclico determinado; es lo que en §-2.3.1 llamamos una loseta, y también la información con que se “definió la geometría” en la escena anterior. En la introducción a la Parte II, pág. 115, dijimos que su *curva de armonía* es *el lugar geométrico de los puntos que los ven como armónicos*. Vamos a construir esa curva y, en el camino, a precisar que es “ver”.

#### ESCENA 34. Curva de armonía.

Dar el ciclo equivale a partir los puntos en dos *parejas diagonales*:  $A, B$  que pintamos de rojo, y  $C, D$  de azul. El orden o arreglo cíclico, es entonces  $A, C, B, D$  (las parejas distinguidas son no consecutivas y no importan la dirección o el principio).

Consideremos un punto variable  $X$  en la *línea diagonal roja*  $A \vee B$  y su línea a  $C$ .

Sea  $Y$  el armónico de  $X$  respecto a  $A, B$ ; sea

$$Z = (C \vee X) \wedge (D \vee Y),$$

y sea  $\mathcal{C}$  la curva que traza  $Z$  al moverse  $X$  a lo largo de su *carril*  $A \vee B$ .

*La curva se dibuja con la herramienta “Curva-Familia” arrastrando  $Z$  a  $X$ ; se puede ver una animación del trazo al seleccionar  $X$  y pulsar “Play”.*

- $\mathcal{C}$  es la *curva de armonía* generada por la cuarteta (cíclica)  $A, C, B, D$ .

Cuando  $Z$  es *genérico*, es decir, no es un punto de la *cuarteta generadora*  $A, C, B, D$ , es claro que

$Z$  ve a la cuarteta como si fuera armónica pues su proyección desde  $Z$  al lienzo  $A \vee B$  es, por construcción, una hilera armónica; o equivalentemente, porque sus líneas a la cuarteta forman un haz armónico —y preservando el orden cíclico.

Cuando  $Z$  es uno de los puntos generadores, una de sus líneas a ellos deja de tener sentido (la línea a sí mismo). Sin embargo, moviendo a  $X$ , observe en la figura que el haz armónico centrado en  $Z$  no parece notararlo. Esto es así, pues los cuatro puntos generadores aparecen como instancias válidas de la construcción y además tienen una línea distinguida, que llamaremos su *tangente*:

- *la línea armónica de la línea a su pareja respecto a las líneas al otro par.*

Entonces también los puntos generadores cumplen la condición si **definimos** que

- *un punto ve a una cuarteta de puntos como armónica si es el centro de un haz armónico que incide en ellos.*

Coloquialmente hablando, los puntos generadores “escogen” su tangente para verse a sí mismos;

mientras que cualquier otro punto tiene sus cuatro líneas de visión ya definidas.

La curva  $\mathcal{C}$  está parametrizada por los puntos de la línea roja  $A \vee B$ . Estos puntos están en correspondencia biyectiva con las líneas por  $C$ . En cada una de estas líneas, además de  $C$ , solamente  $Z$  ve a la cuarteta como armónica, excepto en la tangente cuando  $Z = C$  y ya no hay más. Como las líneas por  $C$  barren todo  $\mathbb{D}^2$ , se tiene entonces que la curva  $\mathcal{C}$  es efectivamente el lugar geométrico de

los puntos que ven a la cuarteta como armónica preservando su orden cíclico.

Sea  $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$  el *centro* de la loseta, y sea  $P$  (respectivamente,  $Q$ ) el cuarto armónico de  $O$  respecto a  $A, B$  (resp.  $C, D$ ). Se tiene entonces que la cuarteta armónica  $A, P, B, O$  es la que corresponde (por la parametrización  $X \mapsto Z$ ) a la cuarteta  $A, C, B, D$  generadora de  $\mathcal{C}$ .

En  $P$  y en  $Q$  concurren las tangentes de los pares azul y rojo respectivamente. Esta coincidencia se sigue de la definición de tangente, que completa un haz armónico en cada punto de la cuarteta y este haz corta a cualquier línea (en particular a la diagonal del otro par) en una hilera armónica.

Por último, debemos subrayar que estamos muy cerca de la configuración 13-13 que se construyó en las Escenas 27 y 28 (¡falta un color!); pero ahora en la versión dual de la construcción (ver Ejercicio 50).

Dar un arreglo cíclico en la cuarteta de puntos, equivale a escoger cuatro de las seis líneas entre ellos (las líneas grises segmentadas que son el complemento de las diagonales): éstas junto con los cuatro puntos forman una configuración que es

un ciclo combinatorio o 4-ciclo (4 puntos, 4 líneas y cada elemento incide en dos del otro tipo).

Las cuatro líneas del ciclo se cortan en seis puntos que se colorean naturalmente con tres colores (la cuarteta generadora con sus viejos colores y dos que recién incorporamos con el color que faltaba, el verde). Las líneas por puntos del mismo color dan un triángulo coloreado (el diagonal);... y las seis líneas entre puntos del mismo color concurren por ternas de los tres colores en los cuatro

puntos del 4-ciclo de las tangentes y que generan, de manera dual, la misma configuración 13-13. ■

Veámos ahora la noción dual de las curvas de armonía. Será de particular interés la que surge de las cuatro líneas tangentes de una loseta.

**Definición.** Cuatro líneas en *posición general* (i.e., sin tres concurrentes) y ordenadas cíclicamente generan *su haz de armonía*: la familia de líneas que contienen una hilera armónica incidente en las cuatro líneas y con el mismo orden cíclico.

Hay dos tipos de líneas en un haz de armonía. Las *genéricas* que cortan a las cuatro generadoras en una hilera armónica. Y ellas cuatro, las *generadoras*, que escogen un punto que las represente para satisfacer el criterio: el cuarto armónico de su intersección con las otras tres. A este punto especial se le llama su *punto de contacto*.

#### ESCENA 35. Haz de armonía.

Sean  $a, c, b, d$  cuatro líneas en posición general con el orden cíclico de escritura; esto equivale a definir las por los cuatro puntos de intersección consecutivos (y a colorearlas de dos colores alternan-

tes). La dualización de la escena anterior es:

Sea  $x$  una línea variable que pasa por el punto  $a \wedge b$  (se puede definir a  $x$  con un punto de control en la línea  $c$ , pues ésta no pasa por  $a \wedge b$ ). Sea  $y$  la línea armónica de  $x$  respecto a  $a, b$  y sea

$$z = (c \wedge x) \vee (d \wedge y)$$

que genera (al variar  $x$ ) al haz armónico deseado.

Para dibujarlo, otra vez con la herramienta “Curva-Familia” activa, se arrastra la línea  $z$  al punto  $c \wedge x$ : así

se dibujan (algunas de) las líneas en la familia. ■

EJERCICIO 56. Demuestra que la familia de líneas construida ( $z$  al variar  $x$  en las líneas por  $a \wedge b$ ) es efectivamente el haz de armonía de  $a, c, b, d$ .

EJERCICIO 57. Continúa la escena anterior, llamando  $A, C, B, D$  a los cuatro puntos de contacto de las líneas  $a, c, b, d$ , respectivamente; y construye su curva de armonía sin introducir nuevos puntos de control. ¿Puedes exhibir de manera experimental que cada línea del haz contiene a un único punto de la curva? (hay que tener cuidado con a quién denotas  $X \in A \vee B$ ). A esto lo llamaremos el **Teorema de Dualidad Curvas-Haces**.

EJERCICIO 58. Al principio de la escena anterior se definieron los cuatro puntos de contacto usando la herramienta “Armonía”. Constrúyelos sin usarla; es decir, con las dos herramientas de incidencia. Trata de hacerlo con tan pocas instrucciones como puedas. (Pista: sigue la construcción de la configuración 13-13).

EJERCICIO 59. Dada una cuarteta de puntos en posición general, se pueden ordenar cíclicamente de tres maneras distintas. Haz una construcción en la que se dibujen las tres curvas de armonía correspondientes.

### 3.3.1. Curvas de armonía y cónicas

Por su importancia, al enunciado siguiente lo llamaremos Teorema, aunque su demostración sea de esas que casi se podrían saltar pues “no tienen dobleces”, “van derechito”.

**Teorema 6.** *Las proyecciones entre planos mandan curvas de armonía en curvas de armonía.*

**Demostración.** Sea  $\pi_{P,\Lambda} : \Pi \rightarrow \Lambda$  la proyección de un plano  $\Pi$  en un plano  $\Lambda$ . Y sean  $A, C, B, D$  cuatro puntos en posición general en  $\Pi$ . Si llamamos  $A', C', B', D'$  a sus imágenes en  $\Lambda$ : están en posición general pues  $\pi_{P,\Lambda}$  induce una biyección entre las líneas de los planos.

Sea  $Z$  un punto genérico en la curva de armonía que generan  $A, C, B, D$  en  $\Pi$ ; es decir, las líneas  $Z \vee A, Z \vee C, Z \vee B, Z \vee D$  son armónicas. Su imagen bajo la proyección también es una cuarteta armónica de líneas, pues las proyecciones preservan armonía, y pasan por  $A', C', B', D'$ . Por tanto, la imagen de  $Z$  en  $\Lambda$ ,  $Z' = Z \cdot \pi_{P,\Lambda}$ , está en la

curva de armonía de  $A', C', B', D'$  en  $\Lambda$ . Esto demuestra el teorema.  $\square$

Ahora veremos el ejemplo más común, que viene de la geometría pre-euclidiana.

**Teorema 7.** *El círculo es curva de armonía.*

### ESCENA 36. Demostración.

Dado un círculo, considérese a una cuarteta de puntos en él que sean los extremos de dos diámetros perpendiculares, y además con el orden cíclico que heredan del círculo. (Para su trazo es necesario usar herramientas euclidianas de ProGeo3D.)

Por un teorema clásico de geometría euclidiana, para un punto  $Z$  en el círculo: los ángulos de las líneas de  $Z$  a las parejas de puntos diametralmente opuestas, son rectos. Además, también se puede concluir que este par de ángulos rectos está a  $45^\circ$ . Éstas son cuartetos armónicas de líneas por el Ejercicio 44. Por lo tanto, el círculo es la curva de armonía de la cuarteta escogida.  $\square$

En conclusión, los dos teoremas anteriores implican que si una loseta en el plano es la proyec-

ción de un cuadrado, entonces la curva de armonía que generan sus vértices es la proyección del círculo circunscrito al cuadrado. Además, el centro de ese círculo se proyecta en el centro de la loseta.

Ésto ya justifica los Pasos 2 y 3 de la Escena 33 (**Movimientos Rígidos**) en los que se encuentra a un vector unitario en la dirección variable de control, usando a la curva de armonía y al centro de la loseta que rige a la geometría. (Se puede usar la herramienta “Intersección” con curvas de armonía.)

Nos falta encontrar al ortogonal de ese vector. Pero antes de hacerlo en la siguiente sección, debemos hacer la observación que ya tenemos al alcance de la mano de que

- *las curvas cónicas son de armonía.*

La definición que usaron los griegos de las curvas cónicas (que es la que llamamos “clásica” y da su nombre a estas curvas) es como *la intersección de un plano con un cono circular*. Éste último es la unión de las líneas de un círculo a su *ápice*, que es un punto en la línea perpendicular al plano del círculo y que sale de su centro. Entonces, su sección con un plano  $\Lambda$  (la curva cónica), corresponde a la proyección del círculo al plano  $\Lambda$  desde el ápice del cono (como foco de proyección). Así que la afirmación no es más que un caso especial del Teorema 6 (y, por supuesto, del 7).

#### ESCENA 37. *Las curvas cónicas son de armonía.*

*Cuando, en modo 3D, se usa la herramienta “Curva-Familia” con una línea (en este caso la que va del punto Z al ápice del cono, arrastrada a Z como parámetro en el círculo) aparece un nuevo botón “reglados” en la lista*

*inferior de la ventana. Con él, se despliegan las superficies de tres formas.*

Hay dos diferencias sutiles entre las curvas cónicas y las de armonía que es importante resaltar.

La primera es que las cónicas no están “atadas” a ciertos puntos en ellas; en ese sentido son libres, su definición es global. Por su parte, las curvas de armonía dependen de cuatro puntos que las generen y aún no tenemos claro cómo desprenderse de esa atadura, siguen siendo la “curva de armonía

de ...". La idea para liberarse (y entonces las llamaremos "curvas armónicas"), será con una nueva definición global muy parecida a la clásica de las cónicas, pero cambiando *conos* por *superficies regladas* que se pueden definir en términos de pura incidencia (sin usar círculos). Esto lo haremos en el Capítulo 5.

La otra gran diferencia es "dónde viven". A las curvas cónicas se les piensa desde su concepción como subconjuntos del Plano Euclidiano,  $\mathbb{E}^2$ . Sin embargo, a las curvas de armonía las definimos en el Plano Desarguesiano,  $\mathbb{D}^2$ . Así que una afirmación más precisa de lo que ya demostramos sería: "*las curvas cónicas y la parte euclidiana de las curvas de armonía, coinciden*".

Esto explica porque las curvas cónicas se parten en tres tipos, mientras que en las curvas de armonía no hay tal división.

Como es bien sabido, los tres tipos de cónicas son *elipses*, *hipérbolas* y *parábolas*. Corresponden a cómo se puede relacionar una curva de armonía con la línea al infinito: no la toca (*elipse*), la corta en dos puntos (*hipérbola*) o la toca en un único

punto (la tiene como línea tangente: *parábola*).

Y en términos visuales, también podemos definir a las cónicas, o tramos de ellas, como

- *las curvas con las que se deben dibujar a los círculos,*

(con buena perspectiva, se sobreentiende). En la figura se puede mover al ápice del cono (o foco) y al plano de intersección (o proyección) para jugar con las distintas posibilidades. ■

Los tres tipos de cónica dependen del punto de vista con que se vea a un círculo. A grandes rasgos serían: círculo chico visto desde afuera (las elipses, que vemos por doquier), círculo grande y visto desde adentro (las hipérbolas con sus dos ramas, una vista hacia adelante y otra hacia atrás con proyecciones tipo pintor y tipo cámara) y las parábolas (el esquivo momento de cambio entre los dos casos anteriores).

EJERCICIO 60. Construye una parábola en *ProGeo3D*, siguiendo a la construcción de la Escena 34. Con su notación, hay que mandar al punto  $D$ , junto con su línea tangente, al infinito. Así, la construcción queda determinada por tres puntos no colineales  $A, C, B$ . Hay que usar las herramientas euclidianas “Punto Medio” para encontrar armónicos de puntos ideales, y “Paralela” para trazar líneas por esos puntos.

EJERCICIO 61. Construye una hipérbola en *ProGeo3D*. Como en el ejercicio anterior, pero ahora hay que mandar a los puntos  $C$  y  $D$  al infinito: para definirlos allá se necesitan tres puntos  $Q', C', D'$ , de tal manera que  $C$  y  $D$  sean los puntos ideales de las líneas  $Q' \vee C'$  y  $Q' \vee D'$ , respectivamente. Además, va a depender de

los otros dos puntos  $A, B$ . De nuevo tienes que usar la herramienta “Paralela” para trazar líneas por puntos ideales. Construye además las tangentes a los puntos  $C$  y  $D$ : estas son las *asíntotas* de la hipérbola. Para esto necesitas “Punto Medio” para encontrar al armónico del punto ideal  $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ .

## 3.4. Reflexiones armónicas

Hemos concluido la primera tarea para fundamentar la construcción de Movimientos Rígidos (Escena 33), que era encontrar la proyección de un vector en el círculo con una orientación dada, para lo cual se usa la curva armónica de una loseta. Para rotar ese vector a uno perpendicular (la segunda tarea pendiente) necesitamos entender y controlar las simetrías de esa loseta; la noción básica para lograrlo es la de reflexión armónica.

### 3.4.1. Definición

Se puede pensar a la armonía en una línea como una función o, mejor dicho, como una familia de funciones. Al fijar dos puntos en una línea: el cuarto armónico respecto a ellos determina una manera de asociar puntos de la línea. Y esta forma de ver a la armonía se generaliza naturalmente a planos y al espacio con un fuerte y poderoso significado geométrico.

Sean  $A$  y  $B$  dos puntos en una línea  $\ell = A \vee B$ .

La *reflexión armónica* de  $\ell$  respecto a  $A, B$  es la función

$$\rho_{A,B} : \ell \rightarrow \ell,$$

que a un punto  $X \in \ell$  lo manda a su cuarto armónico,  $Y$ , respecto a  $A, B$ , según la Escena 21 (y la herramienta “Armonía”). Esto se denota:

$$Y = X \cdot \rho_{A,B}.$$

La letra griega  $\rho$ , que se lee “ro”, es equivalente a nuestra “erre” y la asociamos a la palabra “reflexión”. La función  $\rho_{A,B}$  deja en su lugar a los dos puntos  $A$  y  $B$ ; a veces diremos que son sus *espejos* pues la reflexión armónica en ellos intercambia los dos segmentos en que parten su línea.

Una reflexión armónica no sólo es una función, sino que es una transformación (pg. 121). Pues que sea biyectiva es equivalente a que tenga una función inversa, y en este caso es ella misma, ya que la simetría de la armonía implica que:

$$Y = X \cdot \rho_{A,B} \iff X = Y \cdot \rho_{A,B}.$$

Así que al aplicarla dos veces, cada punto regresa a su lugar. Y por lo tanto, se tiene que

$$\rho_{A,B}^2 = \rho_{A,B} \cdot \rho_{A,B} = \text{id}_\ell,$$

donde denotamos a la composición de funciones con un puntito “.” y por  $\text{id}_\ell$  a la *función identidad* de la línea  $\ell$ . Este tipo de transformaciones es tan importante que tiene nombre:

- una **involución** es una transformación que es su propia inversa.

Estas involuciones de la línea se generalizan al plano y al espacio.

#### ESCENA 38. Reflexión armónica en el plano.

Sean  $C$  un punto,  $e$  una línea que no lo contiene y  $\Pi$  el plano que generan ambos (es decir,  $\Pi = C \vee e$ ). Definimos a la **reflexión armónica** con **centro**  $C$  y **espejo**  $e$ , como la función

$$\rho_{C,e} : \Pi \rightarrow \Pi$$

que en cada línea por el centro  $C$  es la reflexión armónica respecto a  $C$  y su intersección con el espejo  $e$ ; es decir, definida por:

$$X \cdot \rho_{C,e} = X \cdot \rho_{C,(X \vee C) \wedge e},$$

para cualquier  $X \in \Pi$  (hemos dibujado el segmento entre  $X$  y  $Y = X \cdot \rho_{C,e}$ ). Se podría decir que  $\rho_{C,e}$  es un “abanico”, alrededor de  $C$ , de reflexiones armónicas con espejos en  $C$  y  $e$ .

*La herramienta “Armonía” se extiende naturalmente a reflexiones armónicas en el plano: primero se selecciona un punto (en este caso  $X$ ) y luego se arrastra el centro al espejo (el punto  $C$  hacia la línea  $e$ ), o viceversa ( $e$  hacia  $C$ ), para obtener  $Y = X \cdot \rho_{C,e}$ .*

La reflexión armónica  $\rho_{C,e}$  es una involución que se comporta como una reflexión cerca de su espejo  $e$ : intercambia sus dos lados dejando a cada punto de  $e$  en su lugar (haga que  $X$  caracolee cerca de  $e$ ). Pero cerca del centro  $C$ , mas bien se parece a una “inversión central” o “media vuelta”.

- *Las reflexiones armónicas son colineaciones.*

Para probarlo, consideremos una línea  $l$ . ...

Afirmamos que su imagen bajo  $\rho_{C,e}$  es la línea cuarto armónica de  $l$  respecto a  $e$  y  $(e \wedge l) \vee C$ , que hemos denotado  $l'$ . ...

Efectivamente, si  $X \in l$ , la línea  $C \vee X$  corta al haz armónico con centro en  $e \wedge l$  en la hilera armónica  $C, X, (C \vee X) \wedge e, X' = X \cdot \rho_{C,e}$ .

Tenemos entonces que la involución  $\rho_{C,e}$  se comporta en una línea  $l$  como la proyección desde  $C$  de  $l$  en su imagen  $l' = l \cdot \rho_{C,e}$  cuando  $C \notin l$  y cuando  $C \in l$  es una reflexión armónica en  $l = l'$ . ■

Las reflexiones armónicas también se pueden definir en el Espacio Desarguesiano  $\mathbb{D}^3$ . Dados un

punto  $C$ , que será su centro y un plano  $\Pi$  que será su espejo, se denota  $\rho_{C,\Pi}$  y se define como antes: en cada línea por el centro,  $C$ , es la reflexión armónica respecto a  $C$  y la intersección con el espejo, es decir,

$$X \cdot \rho_{C,\Pi} = X \cdot \rho_{C,(X \vee C) \wedge \Pi}.$$

Así que las reflexiones armónicas se restringen a reflexiones armónicas de planos o líneas que pasan por su centro y el espejo es la intersección con el espejo.

Claramente se cumple que cualquier reflexión armónica es una involución, es decir, ella es su propia transformación inversa.

Será importante tener en mente a los dos ejemplos euclidianos clásicos que se están generalizando, y de los que surgen los nombres que usamos. Primero, cuando el centro es el punto ideal de la dirección ortogonal al espejo (línea o plano, dependiendo de la dimensión), se tiene la *reflexión euclidiana* que intercambia ambos lados del espejo manteniendo distancias entre puntos. En este caso, que es la abstracción matemática de las reflexiones en el mundo físico, el espejo es la *mediatriz* de cualquier punto y su imagen.

Segundo, cuando el espejo es el plano o la línea al infinito, lo que se obtiene es la *inversión central* en el centro  $C$  que es el punto medio de cada punto y su imagen. Y en el caso del plano, también se le llama *media vuelta*, o *rotación de  $180^\circ$*  alrededor de  $C$ .

Así que las reflexiones armónicas son la amalgama proyectiva de estas dos transformaciones eu-

clidianas clásicas en una sola.

EJERCICIO 62. En el Paso 2 de la Escena 38, el segmento de  $X$  a  $Y$  brinca abruptamente de un lado al otro cuando  $X$  va del espejo al centro. ¿Puedes trazar el lugar geométrico en el que se produce este salto? (Para trazarlo necesitas herramientas euclidianas.)

### 3.4.2. Lema del Triángulo de Klein

Las reflexiones armónicas serán uno de nuestros caballitos de batalla. Para familiarizarse con su esencia de ser funciones, veremos el siguiente Lema y una consecuencia importante de él.

**Lema 2** (Triángulo de Klein). *Sean  $A, B, C$  los vértices de un triángulo, y sean  $a, b, c$  sus lados opuestos respectivos. Entonces:*

$$\rho_{A,a} \cdot \rho_{B,b} = \rho_{C,c}.$$

El nombre que le hemos dado a este lema viene de que da un ejemplo importante de lo que pronto llamaremos *grupo*. Implica que el conjunto

$$\{\text{id}_{\mathbb{D}^2}, \rho_{A,a}, \rho_{B,b}, \rho_{C,c}\}$$

donde hemos añadido a la función identidad de  $\mathbb{D}^2$ , es un *grupo de transformaciones* (que, en abstracto, es conocido como el *Grupo de Klein*) pues los inversos de sus cuatro elementos son ellos mismos y basta aplicar el lema (cambiando de nombres a los vértices del triángulo) para obtener que la composición de cualquier par sigue estando ahí.

#### ESCENA 39. Demostración.

Para demostrar la igualdad entre dos funciones se tiene que probar que le hacen lo mismo a todos los elementos del dominio.

Sea  $X$  un punto cualquiera de  $\mathbb{D}^2$  (queremos demostrar que  $X \cdot (\rho_{A,a} \cdot \rho_{B,b}) = X \cdot \rho_{C,c}$ ). Sean

$$X_A = X \cdot \rho_{A,a} \quad \text{y} \quad X_C = X \cdot \rho_{C,c};$$

y denotemos

$$A_X = (A \vee X) \wedge a \quad \text{y} \quad C_X = (C \vee X) \wedge c.$$

La proyección desde B de la línea  $A \vee X$  en la línea  $C \vee X$ , manda a la terna  $A, X, A_X$  en la terna  $C_X, X, C$ . Por lo tanto, ...

sus cuarto armónicos  $X_A$  y  $X_C$  están alineados con B (se está usando aquí la invariancia de la armonía bajo proyecciones (Teo. 3)).

La proyección desde A de la línea  $C \vee X$  en la línea  $B \vee X_A$  manda a la cuarteta armónica

$X_C, C_X, X, C$  en la cuarteta

$$X_C, B, X_A, (B \vee X_A) \wedge b;$$

que, por lo tanto, también es armónica. Y esto implica que

$$X_C = X_A \cdot \rho_{B,b} = (X \cdot \rho_{A,a}) \cdot \rho_{B,b}.$$

Que equivale, por la definición de  $X_C$ , a que

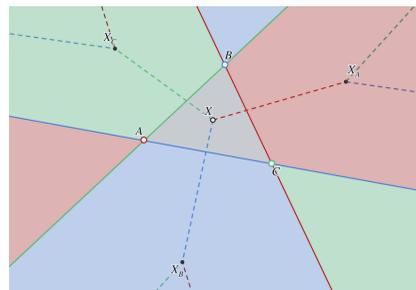
$$X \cdot (\rho_{A,a} \cdot \rho_{B,b}) = (X \cdot \rho_{A,a}) \cdot \rho_{B,b} = X \cdot \rho_{C,c}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Sin embargo, falta un detalle. Cuando  $X$  está en alguno de los lados del triángulo, una de las dos proyecciones que se usaron en la demostración no está bien definida. Pero en ese caso (restringidos a un lado del triángulo), una de las reflexiones armónicas involucradas se vuelve la identidad (en esa línea) y las otras dos coinciden (son la reflexión armónica en los vértices). De aquí se deduce que en los tres lados sigue siendo válida la ecuación anterior. Por lo tanto, se cumple para todo  $X \in \mathbb{D}^2$  y se concluye la prueba.  $\square$

Estamos muy cerca de una configuración que ya habíamos visto, la del cuadrángulo extendido: si se añaden a la escena el punto  $X_B = X \cdot \rho_{B,b}$  y tres líneas por él, se tiene que  $ABC$  es el triángulo derivado del cuadrángulo  $X, X_A, X_B, X_C$ , cuando  $X$  no está en las líneas del triángulo. Pero ahora se obtuvo esta configuración partiendo del triángulo diagonal y usando su grupo de Klein: el cuadrángulo es entonces lo que se llamará la *órbita* de  $X$  (sus imágenes bajo los cuatro elementos del grupo). ■

EJERCICIO 63. Decora la escena anterior: a) Colorea a las cuatro regiones triangulares en que el triángulo  $ABC$  parte al plano proyectivo, de tal manera que en la que está  $X$ , que es libre, siempre sea gris (se le llama *región fundamental* y corresponde a la identidad), mientras que las otras tres se pinten del color correspondiente a la transformación del grupo de Klein que manda a la región fundamental en ella. b) Pinta los segmentos entre los vértices del cuadrángulo que son frontera de sus losetas, usando el color de la reflexión armónica que manda a un extremo en el otro. (Al jugar con la imagen, verás cómo actúa el grupo de Klein en el conjunto de colores cuando cambia  $X$  de región triangular.)



### 3.4.2.1. Dualidad curvas-haces

Como consecuencia inmediata del Lema del Triángulo de Klein (2), podemos demostrar que las curvas armónicas y los haces armónicos se corresponden como deben.

**Teorema 8.** *Las curvas de armonía y los haces de armonía se aparean por sus generadores. Además, los puntos de la curva y las líneas del haz correspondiente se aparean en parejas incidentes.*

**Demostración.** Una curva de armonía está definida por cuatro puntos en posición general con un orden cíclico. Esta información produce sus cuatro líneas tangentes que, a su vez, generan un haz de armonía y determinan cuatro puntos de contacto que son con los que se empezó. A este apareamiento curvas-haces de armonía por medio de sus generadores es a lo que se refiere la primera frase del teorema. La segunda se refiere a un apareamiento por incidencia entre los puntos de una curva y las líneas de su *haz tangente*: el haz de armonía de sus cuatro líneas tangentes.

### ESCENA 40. Dualidad de curvas y haces.

Consideremos la curva de armonía,  $\mathcal{C}$ , generada por los puntos  $A, C, B, D$ ; sean  $a, c, b, d$  sus respectivas líneas tangentes y sea  $\mathcal{H}$  su haz de armonía (que hemos llamado el haz tangente a  $\mathcal{C}$ ).

Siguiendo a la Escena 34, la curva  $\mathcal{C}$  se parametriza por  $X$ : un punto libre en la línea  $q = A \vee B$ . Si  $Y$  es su cuarto armónico respecto a  $A, B$ , (es decir,  $Y = X \cdot \rho_{A,B}$ ) entonces  $Z = (C \vee X) \wedge (D \vee Y)$  está en  $\mathcal{C}$ ; y así se obtiene toda la curva.

Para la construcción dual, sea  $Q = a \wedge b$ . Como pareja de líneas por  $Q$  armónicas respecto a  $a, b$  tomamos  $x = Q \vee Y$  y  $y = Q \vee X$ , para obtener  $z = (c \wedge x) \vee (d \wedge y) \in \mathcal{H}$ .

Veremos que  $Z \in z$ , para concluir la prueba.

Consideremos el triángulo  $QXY$ . Por el Lema del Triángulo de Klein

$$\rho_{Y,y} = \rho_{Q,q} \cdot \rho_{X,x}.$$

Al aplicar esta igualdad a  $D$  y  $d$ , se tiene que

$$D \cdot \rho_{Y,y} = (D \cdot \rho_{Q,q}) \cdot \rho_{X,x} = C \cdot \rho_{X,x}$$

$$d \cdot \rho_{Y,y} = (d \cdot \rho_{Q,q}) \cdot \rho_{X,x} = c \cdot \rho_{X,x},$$

ya que al aplicar  $\rho_{Q,q}$  a  $D$  (resp. a  $d$ ) se obtiene  $C$  (resp.  $c$ ); pues  $D, O, C, Q$  es una hilera armónica.

Como un punto y su imagen bajo una reflexión armónica son colineales con el centro, se tiene que  $C \cdot \rho_{X,x} = D \cdot \rho_{Y,y}$  está en las líneas  $C \vee X$  y  $D \vee Y$ , y esto implica que es  $Z$ . Dualmente, una línea y su imagen bajo una reflexión armónica son concurrentes con el espejo, por lo cual:

$$c \cdot \rho_{X,x} = d \cdot \rho_{Y,y} = (c \wedge x) \vee (d \wedge y) = z.$$

Puesto que  $C \in c$  (o bien,  $D \in d$ ), la imagen de esta pareja bajo  $\rho_{X,x}$  (resp.,  $\rho_{Y,y}$ ) también es incidente, es decir  $Z \in z$ .

Esto prueba que  $Z \in z$  para  $X$  distinto de  $A$  y  $B$ , que es cuando están bien definidas las reflexiones armónicas que se usaron. Pero para  $A$  y  $B$  ya sabíamos que  $A \in a$  y  $B \in b$ , por lo que se concluye el teorema. ■

□

### 3.4.3. Las simetrías de una loseta

Ya tenemos las herramientas para concluir con la Escena 33 de movimientos rígidos para la cual necesitábamos rotar un vector un ángulo recto.

#### ESCENA 41. Simetrías de una loseta.

Consideremos una cuarteta cíclica de puntos  $A, C, B, D$  en posición general con sus parejas diagonales pintadas de rojo y azul; y sea  $\mathcal{C}$  su curva de armonía.

Recarguemos el final de la Escena 34 en la que se construyó a  $\mathcal{C}$ . Incluye a la configuración 13-13 que surge del cuadrilátero de lados de la loseta (las cuatro líneas grises segmentadas) y que completan el 4-ciclo de los puntos generadores; o bien y de manera dual, surge del cuadrángulo de los vértices (grises) del 4-ciclo de las tangentes. La construcción (partiendo de las 4 líneas como en el Ejercicio 50) da 6 puntos (los generadores y dos verdes) de tres colores; estos generan 3 líneas y sus 3 vértices (el triángulo diagonal  $OPQ$ ), que generan 6 líneas coloreadas (las tangentes y dos verdes) que concurren (por ternas de los 3 colores) en 4 puntos.

Consideremos ahora al triángulo  $OPQ$  (que es el *diagonal*). Si llamamos  $o, p$  y  $q$  a los correspondientes lados opuestos ( $o$  es el horizonte de la loseta, mientras que  $p$  y  $q$  son las diagonales azul y roja respectivamente), el grupo de Klein de este triángulo es:

$$\mathcal{G}\mathcal{K}_{OPQ} = \{ \text{id}_{\mathbb{D}^2}, \rho_{O,o}, \rho_{P,p}, \rho_{Q,q} \}.$$

Observemos primero que

- $\mathcal{G}\mathcal{K}_{OPQ}$  actúa en  $\mathcal{C}$ ,

es decir, sus cuatro transformaciones mandan a la curva  $\mathcal{C}$  en sí misma.

Esto se sigue de que manda a la cuarteta cíclica de generadores en sí misma y de que son colineaciones por lo que mandan a un punto que los ve armónicos en otro que también los ve armónicos. En la cuarteta cíclica de puntos generadores, la reflexión “azul”,  $\rho_{P,p}$ , actúa dejando fijos a los azules  $C$  y  $D$  e intercambia, o *traspone*, a los ro-

jos, que podemos escribir ( $A \leftrightarrow B$ ); mientras que la roja  $\rho_{Q,q}$  fija a los rojos y traspone a los azules (actúa como ( $C \leftrightarrow D$ )). La composición de los dos, que es  $\rho_{O,o}$ , traspone a ambos pares y geoméricamente es media vuelta en el centro  $O$ . En la curva armónica, cualquier tramo de ella entre dos generadores consecutivos se “replica” cuatro veces para obtenerla toda. Estas son las simetrías de la cuarteta cíclica que preservan la coloración; pero aún hay más, las que intercambian colores.

El grupo de Klein del triángulo verde

$$\mathcal{G}\mathcal{K}_{OMN} = \{ \text{id}_{\mathbb{D}^2}, \rho_{O,o}, \rho_{M,m}, \rho_{N,n} \},$$

donde  $M$  y  $N$  son los primeros puntos verdes (que definieron al horizonte  $o = M \vee N$ ) y  $m$  y  $n$  son sus respectivos lados opuestos en el triángulo  $OMN$ , también actúa en la cuarteta preservando su orden cíclico y, por lo tanto, en la curva  $\mathcal{C}$ . Las dos nuevas reflexiones actúan en la cuarteta generadora como:

$$\rho_{M,m} : (A \leftrightarrow C)(B \leftrightarrow D)$$

$$\rho_{N,n} : (A \leftrightarrow D)(B \leftrightarrow C)$$

que intercambian colores rojo y azul. Esto se sigue de que la proyección desde  $O$  de la hilera armónica en el horizonte  $P, M, Q, N$  en los lados del 4-ciclo (gris-segmentado) da hileras armónicas.

El grupo de simetrías de la cuarteta cíclica; es:

$$\{ \text{id}_{\mathbb{D}^2}, \rho_{O,o}, (\rho_{P,p} \cdot \rho_{M,m}), (\rho_{M,m} \cdot \rho_{P,p}), \\ \rho_{P,p}, \rho_{Q,q}, \rho_{M,m}, \rho_{N,n} \},$$

y corresponde a las simetrías euclidianas de un

cuadrado antes de proyectarse a la loseta correspondiente (cuatro rotaciones y cuatro reflexiones).

Si coloreamos alternadamente los ocho triangulitos en que los espejos de las cuatro reflexiones armónicas del segundo renglón parten a la loseta, y escogemos a alguno de ellos, cada transformación corresponde a uno de los triángulos (la identidad,  $\text{id}_{\mathbb{D}^2}$ , representa al elegido).

En el primer renglón, están las cuatro *rotaciones* (que preservan el color de los triangulitos). Las que nos interesan son las dos últimas (en el cuadrado son de un ángulo recto en ambas direcciones) para la escena de movimientos rígidos.

Llamemos  $\tau$  (“tau”) a una de estas rotaciones:

$$\tau = \rho_{P,p} \cdot \rho_{M,m}; \quad (3.1)$$

entonces, el subgrupo de las cuatro rotaciones también se puede escribir

$$\langle \tau \rangle = \{ \text{id}_{\mathbb{D}^2}, \tau, \tau^2, \tau^3 \}.$$

Pues, de hecho,  $\tau$  actúa en la cuarteta generadora de  $\mathcal{C}$  según su arreglo cíclico predeterminado:

$$\tau: (A \mapsto D \mapsto B \mapsto C \mapsto A).$$

De nuevo, el segmento de la curva  $\mathcal{C}$  entre dos puntos generadores consecutivos va a los otros tres segmentos bajo las tres transformaciones no triviales del grupo. Pero ahora *preservando la orientación* de  $\mathcal{C}$ ; por ejemplo, el segmento de-B-a-C va a dar bajo  $\tau$  al de-C-a-A y ambos dan la misma *orientación global* a la curva.

Este grupo  $\langle \tau \rangle$  es diferente a los grupos de Klein aunque ambos tengan cuatro elementos. Esto se puede ver de que tanto  $\tau$  como  $\tau^3 = \tau^{-1}$  no

son involuciones, tienen *orden 4* (hay que componerla cuatro veces consigo misma para obtener la identidad). El grupo  $\langle \tau \rangle$  se llama el *grupo cíclico de orden 4* y el completo de simetrías de la loseta con ocho elementos se llama *grupo diédrico de grado 4*; son miembros de familias generales que definiremos en la sección que sigue. ■

Una observación importante sobre  $\tau$  (la rotación de  $90^\circ$  en O) es que al aplicarla dos veces se obtiene la media vuelta en O. Es decir,

$$\tau^2 = \tau \cdot \tau = \rho_{O,o}.$$

Y esta función restringida a la línea horizonte es la identidad ahí (deja a todos los puntos en su lugar).

Así que  $\tau$  restringida al horizonte es una involución que, pensando a sus puntos como puntos de fuga de líneas, equivale a dar la línea ortogonal. Pero también es la composición de las reflexiones armónicas en los pares de una cuarteta armónica. Esto se puede usar para obtener el vector ortogonal en la Escena 33 y será la información central para describir la geometría euclidiana a la Klein.

EJERCICIO 64. Con la notación de la escena anterior, de-

muestra que

$$\tau = \rho_{N,n} \cdot \rho_{P,p} = \rho_{P,p} \cdot \rho_{M,m} = \rho_{M,m} \cdot \rho_{Q,q}.$$

Primero ve que le hacen lo mismo a los vértices de la loseta y por lo tanto (usando el Principio de 4 en 4) deben ser la misma transformación de  $\mathbb{D}^2$ .

EJERCICIO 65. Demuestra que la transformación inversa de  $\tau$  es

$$\tau^{-1} = \rho_{N,n} \cdot \rho_{Q,q}.$$

Se puede hacer como transformación de  $\mathbb{D}^2$ , usando la asociatividad de la composición de funciones.

## 3.5. Grupos de transformaciones

Ya hemos visto varios ejemplos de *grupos*. Ahora los vamos a definir formalmente y en general, pero no centrados en su versión más abstracta pues aquí los asociamos siempre con una *acción* geométrica concreta; es decir, los veremos primero como conjuntos de transformaciones, que es como los hemos visto y los vamos a usar, y luego veremos muy por ensimita su versión abstracta.

**Definición.** Un *grupo de transformaciones* es un conjunto,  $\mathcal{G}$ , de transformaciones de un conjunto  $\mathcal{X}$  (llamado su *conjunto base*), que cumple:

- i)  $\text{id}_{\mathcal{X}} \in \mathcal{G}$   
(la identidad de  $\mathcal{X}$  está en  $\mathcal{G}$ )
- ii)  $f \in \mathcal{G} \Rightarrow f^{-1} \in \mathcal{G}$   
( $\mathcal{G}$  es cerrado bajo inversas)
- iii)  $f, g \in \mathcal{G} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{G}$   
( $\mathcal{G}$  es cerrado bajo composición)

Hay que remarcar que se puede parafrasear la definición de transformación (pag. 121) como una

función  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  que tiene una *función inversa*  $f^{-1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , es decir, que cumple que:

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = \text{id}_{\mathcal{X}};$$

donde  $\text{id}_{\mathcal{X}}$  es la *función identidad* del conjunto  $\mathcal{X}$  (que manda a cada elemento de  $\mathcal{X}$  en sí mismo). De tal manera que la condición (i) se puede cambiar por que el conjunto  $\mathcal{G}$  es distinto de vacío; pues si tiene un elemento, los siguientes dos incisos implican que tiene a la identidad.

Para cualquier conjunto  $\mathcal{X}$ , el conjunto de todas sus transformaciones forma un grupo

$$\mathcal{T}\mathcal{r}(\mathcal{X}).$$

Cuando  $\mathcal{X}$  es infinito, por ejemplo los números reales, este grupo es demasiado grande y entonces, como pronto veremos, a sus grupos importantes se les define exigiéndole a sus miembros que cumplan cierta propiedad. Pero para  $\mathcal{X}$  finito,  $\mathcal{T}\mathcal{r}(\mathcal{X})$  también es finito y es conocido como el *grupo simétrico*, o de *permutaciones*, de  $\mathcal{X}$ . En el ejemplo de cuatro letras,

$$\mathcal{X} = \{A, B, C, D\},$$

su grupo de transformaciones tiene 24 elementos —es el grupo simétrico de grado 4 con todas las permutaciones de 4 elementos. Pero si además les damos un orden cíclico, por ejemplo A, C, B, D escrito así, las transformaciones que preservan ese arreglo cíclico ya sólo son 8; forman el *subgrupo* de  $\mathcal{T}\mathcal{r}(\mathcal{X})$  que describimos y usamos en la escena anterior y pronto veremos en general.

Veamos ahora la noción abstracta de grupo.

**Definición.** Un *grupo* es un conjunto,  $G$ , junto con un *producto* que es una *operación binaria* (es decir, para cada par de elementos  $\alpha$  y  $\beta$  de  $G$  se tiene bien definido su *producto*  $\alpha \cdot \beta \in G$ ) que cumple:

- i) El producto es *asociativo*:  
 $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in G.$
- ii) Tiene un elemento *identidad*, es decir: existe un elemento  $\mathbb{K} \in G$  tal que  
 $\alpha \cdot \mathbb{K} = \mathbb{K} \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in G.$
- iii) Tiene *inversos*, es decir: para cada  $\alpha \in G$  existe  $\alpha^{-1} \in G$  tal que:  
 $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = \mathbb{K}.$

Es fácil ver que cualquier grupo de transformaciones es un grupo abstracto cuya operación es la composición de funciones, pues ésta es asociativa. Y pronto veremos la idea de cómo argumentar que, al revés, cualquier grupo abstracto se puede pensar como grupo de transformaciones.

No es difícil deducir de los axiomas de grupo que el elemento identidad y los inversos son únicos, pero lo dejamos como ejercicio (ver Ejercicios) pues nuestro interés no es la teoría de grupos en abstracto, sino su uso en la geometría.

Una función entre grupos que preserva al producto (y por lo tanto, a la estructura de grupo) se llama *homomorfismo* y cuando además es biyectiva se llama *isomorfismo*. Es un abuso de lenguaje muy común, y casi necesario, decir que dos grupos son iguales, o inclusive el mismo grupo, cuando son *isomorfos* (i.e., cuando hay un isomorfismo entre ellos). Ya incurrimos en este abuso de lenguaje cuando dijimos que el grupo que surge de las reflexiones armónicas de un triángulo es el grupo de Klein; pues aunque surjan de distintos triángulos (y como conjuntos son distintos), todos comparten

su estructura básica de grupo. Y lo dijimos porque se conoce como *grupo de Klein* al que tiene cuatro elementos; los tres *no triviales* (es decir, que no son el elemento identidad) son su propio inverso (son *involuciones*) y el producto de cualquier par de ellos da al tercero.

A un homomorfismo entre un grupo  $G$  y el grupo de transformaciones de un conjunto  $\mathcal{X}$  se le llama una *acción* de  $G$  en  $\mathcal{X}$ . En este caso, para cualquier  $X \in \mathcal{X}$  y  $\alpha \in G$  se tiene bien definido  $X \cdot \alpha \in \mathcal{X}$ , pues si denotamos  $\tilde{\alpha} \in \mathcal{T}\mathcal{r}(\mathcal{X})$  a la imagen de  $\alpha$  bajo dicho homomorfismo, y definimos

$$X \cdot \alpha = X \cdot \tilde{\alpha},$$

se cumple que para  $\alpha, \beta \in G$ , se tiene que

$$(X \cdot \alpha) \cdot \beta = X \cdot (\alpha \cdot \beta).$$

Para lo cual hay que usar que el homomorfismo de  $G$  en  $\mathcal{T}\mathcal{r}(\mathcal{X})$  preserva la operación de los grupos.

En la sección anterior vimos como un mismo grupo (con conjunto base  $\mathbb{D}^2$ ) actuaba en distintos conjuntos (una cuarteta de puntos, sus colores, la

curva armónica, e inclusive los ocho triangulitos o sus sombreados).

Por último, conviene precisar dos nociones generales y naturales que serán muy útiles. Suponiendo que tenemos dada una acción del grupo  $G$  en un conjunto  $\mathcal{X}$ , se define la *órbita* bajo  $G$  de un elemento  $X \in \mathcal{X}$ , denotada  $X \cdot G$ , como el conjunto de todas las imágenes de  $X$  bajo la acción de  $G$ , es decir:

$$X \cdot G = \{X \cdot \alpha \mid \alpha \in G\} \subset \mathcal{X}.$$

Y el *estabilizador* de  $X$  es

$$G(X) = \{\alpha \in G \mid X \cdot \alpha = X\} \subset G,$$

que es un *subgrupo* de  $G$  (es decir, un subconjunto que a su vez es grupo con la misma operación).

EJERCICIO 66. Demuestra que el estabilizador  $G(X)$  (en el contexto en que lo acabamos de definir) es un grupo.

EJERCICIO 67. Si  $G$  es el grupo de Klein del triángulo  $A, B, C$  de la Escena 39:

- (a) Demuestra que  $G$  tiene tres subgrupos *no triviales* (los triviales son el total y el que sólo contiene a la identidad).

- (b) ¿Puedes distinguir en  $\mathbb{D}^2$ , puntos con órbitas de distintas cardinalidades?
- (c) ¿Puedes distinguir puntos con estabilizadores distintos?
- (d) ¿Puedes relacionar las dos respuestas anteriores?

EJERCICIO 68. Usando los axiomas de grupo, demuestra que el elemento unidad  $\mathbb{1}$  de un grupo  $G$  es único. Es decir, que si además existe  $\mathbb{1}' \in G$  tal que

$$\alpha \cdot \mathbb{1}' = \mathbb{1}' \cdot \alpha = \alpha \quad \forall \alpha \in G,$$

entonces  $\mathbb{1} = \mathbb{1}'$ .

EJERCICIO 69. Demuestra que “hay cancelación izquierda” en un grupo  $G$ . Es decir, que si  $\alpha, \beta, \gamma \in G$  son tales que  $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$  entonces  $\beta = \gamma$ . Enuncia y demuestra la ley de cancelación derecha.

EJERCICIO 70. Demuestra que en un grupo  $G$  el inverso de un elemento es único.

EJERCICIO 71. Se dice que en un grupo  $G$  dos elementos  $\alpha$  y  $\beta$  *conmutan* si se tiene que  $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ; y que el grupo es *conmutativo* o *abeliano* si todos sus elementos conmutan. Demuestra que en un grupo general

$G$ , los elementos que conmutan con un elemento dado forman un subgrupo; es decir, que si  $\eta \in G$ , entonces

$$G_\eta = \{ \alpha \in G \mid \alpha \cdot \eta = \eta \cdot \alpha \}$$

es un subgrupo de  $G$ .

### 3.5.1. La línea real y el círculo

Veremos ahora los ejemplos de grupos que van a aparecer con insistencia en el capítulo siguiente y que nos son muy familiares. El primero es la línea de los números reales: con la operación suma forma un grupo abstracto, que denotamos  $\mathbb{R}$ , cuyo elemento identidad es el  $0$  y con el cual hemos trabajado desde pequeños (en diversos grados de abstracción). Pero veremos ahora que se le puede pensar como grupo de transformaciones (y la idea funciona para cualquier grupo). Para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

se tiene la función *traslación* por  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \tau_\alpha : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \tau_\alpha = x + \alpha \end{aligned} \tag{3.2}$$

que es el “efecto de sumar  $\alpha$ ”; manda a  $0$  en  $\alpha$  y es transformación pues  $\tau_{-\alpha}$  es su inversa. Esto define una acción de  $\mathbb{R}$  (como grupo) en  $\mathbb{R}$  (como conjunto) pues se cumple que  $\tau_{\alpha+\beta} = \tau_\alpha \cdot \tau_\beta$  (la operación suma en  $\mathbb{R}$  va en la operación composición de funciones en  $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ ), ya que para todo  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} x \cdot \tau_{\alpha+\beta} &= x + (\alpha + \beta) = (x + \alpha) + \beta \\ &= (x \cdot \tau_\alpha) + \beta = (x \cdot \tau_\alpha) \cdot \tau_\beta \\ &= x \cdot (\tau_\alpha \cdot \tau_\beta). \end{aligned}$$

Las traslaciones son un grupo de transformaciones de  $\mathbb{R}$  que cumple la propiedad geométrica básica de preservar la distancia; son sus *transformaciones rígidas*. Denotemos

$$\mathcal{Iso}(\mathbb{R})$$

---

<sup>1</sup>Violaremos por un ratito nuestra convención de notación al usar minúsculas latinas para otro efecto que las líneas.

al *grupo de isometrías* de la línea real, es decir, al grupo de transformaciones de  $\mathbb{R}$  que preservan la distancia (ver Ejercicio 72). Hemos visto que tiene un subgrupo isomorfo a  $\mathbb{R}$  que son las traslaciones. Pero no son las únicas isometrías. También están las reflexiones. Para un punto  $a \in \mathbb{R}$ , sea

$$\begin{aligned} \rho_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \cdot \rho_a = 2a - x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ésta es la *reflexión* de  $\mathbb{R}$  en el punto  $a$  pues cumple que  $a \cdot \rho_a = a$  (es decir,  $a$  es un punto fijo) y cambia la orientación de la recta (al  $0$  lo manda del otro lado de  $a$  que es  $2a - 0 = 2a$ ), preservando distancias; además, es una involución (se prueba fácil haciendo el cálculo de  $x \cdot \rho_a^2$ ).

Puesto que en la línea real hay exactamente dos puntos a una misma distancia (no cero) de un punto dado, no es difícil ver que las isometrías de  $\mathbb{R}$  son las que ya describimos, y que se pueden distinguir por lo que le hacen a la orientación de la línea: las traslaciones la conservan y las reflexiones la invierten. Las isometrías que preservan orienta-

ción forman un subgrupo de  $\mathcal{Iso}(\mathbb{R})$  que se denota  $\mathcal{Iso}^+(\mathbb{R})$  y ya hemos visto que es isomorfo a  $\mathbb{R}$  con la suma.

Además, debemos observar que la composición de dos reflexiones es una traslación; de hecho, que  $\rho_a \cdot \rho_b = \tau_{2(b-a)}$ , se sigue de las fórmulas:

$$\begin{aligned} x \cdot \rho_a \cdot \rho_b &= (2a - x) \cdot \rho_b \\ &= 2b - (2a - x) \\ &= x + 2(b - a) = x \cdot \tau_{2(b-a)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pero lo que Sophus Lie observa (y es lo que los hace *grupos de Lie*) es que además de ser grupos,  $\mathcal{Iso}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{Iso}^+(\mathbb{R})$ , tienen *topología*, es decir tienen en sí una noción de continuidad compatible con la estructura de grupo y se puede hacer cálculo diferencial en ellos; en particular, también son *espacios topológicos*. Y en este carácter se les puede describir como:  $\mathcal{Iso}(\mathbb{R})$  consiste de dos copias disjuntas de la línea  $\mathbb{R}$  pues ya hemos parametrizado a ambas (con  $a \in \mathbb{R}$  en (3.2) y (3.3)); y una de esas dos copias ( $\mathcal{Iso}^+(\mathbb{R})$ ) es precisamente la

que es un subgrupo (isomorfo a  $\mathbb{R}$ ) pues es la componente que contiene a la identidad  $\text{id}_{\mathbb{R}}$ .

El único otro grupo de Lie *conexo* (en el que se puede ir continuamente de cualquier elemento a cualquier otro) y de dimensión 1 (además de  $\mathbb{R} \cong \mathcal{Iso}^+(\mathbb{R})$ ) es el círculo.

Denotemos por  $\mathbb{S}^1$  al *círculo unitario* dentro del plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ ; es decir,  $\mathbb{S}^1$  es el círculo con centro en el origen y radio 1. La distancia en  $\mathbb{S}^1$  equivale a medir los ángulos entre líneas orientadas por el origen con *radianes*. Al tener distancia, de nuevo tenemos su grupo de isometrías:

$$\mathcal{Iso}(\mathbb{S}^1),$$

que es el conjunto de transformaciones de  $\mathbb{S}^1$  que preservan distancias y que también se puede pensar dentro de las *transformaciones rígidas planas*  $\mathcal{Iso}(\mathbb{R}^2)$  (ver Ejercicio 72). En el mundo real,  $\mathcal{Iso}(\mathbb{S}^1)$  equivale a las maneras en que podemos regresar un anillo a su lugar sobre una mesa. Y de nuevo es claro que tiene dos tipos de transformaciones: las que preservan orientación y las que la

invierten (se cambia el lado del anillo que toca a la mesa). Las que preservan orientación forman un subgrupo que son las *rotaciones*:

$$\mathcal{Iso}^+(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{Iso}(\mathbb{S}^1)$$

(a este grupo le llamaremos el *grupo circular* y se le denota  $\mathbb{S}^1$ , pues es isomorfo al grupo multiplicativo de los números complejos unitarios al identificar a los números complejos,  $\mathbb{C}$ , con  $\mathbb{R}^2$ ). Y las que invierten la orientación son *reflexiones* (en líneas por el origen) que dejan fijos a dos puntos *antípodos* de  $\mathbb{S}^1$  (a distancia  $\pi$ , que es la máxima posible). Como en el caso de la línea real:

- *topológicamente,  $\mathcal{Iso}(\mathbb{S}^1)$  tiene dos componentes, ambas son un círculo y una de ellas es un subgrupo (las rotaciones).*

Se atribuye a Leonardo da Vinci<sup>2</sup> la observación de que la simetría de cualquier diseño plano (y

---

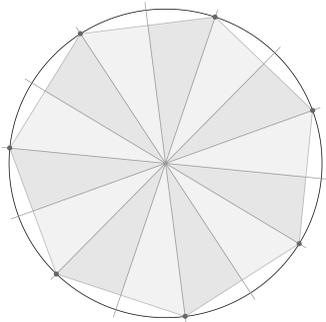
<sup>2</sup>En su maravilloso y accesible libro *Symmetry*, [?], Hermann Weyl así lo hace.

acotado) es equivalente a la simetría (orientada o completa) de un polígono regular, o bien a la completa de un círculo.

Sea  $P_n$  un polígono regular de  $n$  lados con sus vértices en el círculo unitario  $S^1$ . Dos de sus vértices consecutivos están a distancia  $2\pi/n$  y entonces la rotación  $\sigma$  con ese ángulo regresa a  $P_n$  a su lugar (cada vértice de  $P_n$  gira al siguiente). El grupo que *genera* esta rotación es

$$\langle \sigma \rangle = \{ \text{id}_{S^1}, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1} \} \subset \mathcal{I}_{\text{iso}}^+(S^1),$$

pues  $\sigma^n = \text{id}_{S^1}$ . Este es llamado el *grupo cíclico*



de orden  $n$ , y que denotaremos  $C_n$ . También se le conoce como  $\mathbb{Z}_n$  o  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pues en abstracto es el grupo de enteros módulo  $n$  con la operación suma.

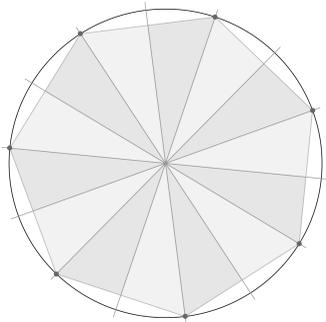
Pero además, el polígono  $P_n$  tiene otras  $n$  simetrías que son las reflexiones en las líneas que van del origen a los vértices y para  $n$  par, a los puntos medios de las aristas; de tal manera que dos líneas consecutivas tienen ángulo  $\pi/n$ .

El *grupo diédrico* de grado  $n$ , denotado  $D_n$ , contiene a  $C_n$  y a éstas  $n$  reflexiones y constituye el grupo de simetrías rígidas de  $P_n$ . En la figura,  $D_n$  actúa sobre los triángulos; las reflexiones cambian su sombreado y las rotaciones lo preservan. Si se componen dos reflexiones, se obtiene una rotación del grupo cíclico  $\langle \sigma \rangle$ ; en particular, en líneas consecutivas da  $\sigma$  o bien  $\sigma^{-1}$ .

Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  las reflexiones en dos líneas consecutivas en la orientación positiva, de tal manera que  $\sigma = \rho_1 \cdot \rho_2$ . Entonces todo el grupo diédrico  $D_n$  se puede obtener como el subgrupo *generado por*  $\rho_1$  y  $\rho_2$ ; esto se denota

$$D_n = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle \subset \mathcal{I}_{\text{iso}}(S^1)$$

que significa que es el subgrupo más chico que contiene a lo que está dentro de los “paréntesis angulares”  $\langle \_ \rangle$  ( en este caso  $\rho_1$  y  $\rho_2$ ). O bien, se puede construir: si pensamos a los generadores como letras, cualquier *palabra* en ellas se convierte en una transformación al componer en el orden establecido en la palabra, y se le asigna la identidad a la *palabra vacía*. El grupo que generan consiste en todo lo que se pueda obtener así. Pero una misma transformación se puede obtener de distintas palabras. Por ejemplo  $\rho_1 \cdot \rho_1 = \rho_1^2 = \text{id}_{S^1} = \mathbb{K}$ ; a estas palabras que equivalen a la vacía se les lla-



ma *relaciones*. Así que el grupo diédrico también se puede *describir por generadores y relaciones*; y en este caso basta con las relaciones

$$\rho_1^2 = \rho_2^2 = (\rho_1 \cdot \rho_2)^n = \mathbb{K}.$$

Como ambos generadores son involuciones, no se necesitó incluir a sus inversos como letras para armar palabras; y como cambian la orientación, se tiene que las palabras de longitud par (con letras alternadas) constituyen el subgrupo cíclico  $C_n$  mientras que las de longitud impar son todas las reflexiones; por ejemplo,  $\rho_2 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2$  es la reflexión en la línea que sigue al espejo de  $\rho_2$  en la orientación positiva.

Falta describir el caso límite. Regresando a las isometrías de la recta real  $\mathbb{R}$ , si tomamos dos reflexiones distintas  $\rho_a$  y  $\rho_b$  (ver (3.3)), el grupo que generan en  $\mathcal{Iso}(\mathbb{R})$  es el *grupo diédrico infinito*:

$$D_\infty = \langle \rho_a, \rho_b \rangle \subset \mathcal{Iso}(\mathbb{R}),$$

que contiene como subgrupo al *grupo cíclico infinito*,  $C_\infty \subset \mathcal{Iso}^+(\mathbb{R})$ ; que en este caso es el gene-

rado por la traslación (ver (3.4))

$$\tau_{2(b-a)} = \rho_a \cdot \rho_b.$$

Al grupo cíclico infinito, también se le conoce como el grupo *libre en un generador* (sin relaciones), o bien como el grupo de los enteros,  $\mathbb{Z}$ , con la suma.

EJERCICIO 72. Supongamos que en un conjunto  $\mathcal{X}$  cualquiera se tiene definida una “distancia”; es decir, para cada par de elementos  $X, Y \in \mathcal{X}$ , tenemos bien definido  $|X, Y|$  en algún conjunto (no se necesitará que sean los reales positivos). Demuestra que el conjunto de transformaciones de  $\mathcal{X}$  que preservan la “distancia” es un grupo de transformaciones de  $\mathcal{X}$ ; donde  $\alpha : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  *preserva* la distancia si se cumple que

$$|X, Y| = |X \cdot \alpha, Y \cdot \alpha|,$$

para todo  $X, Y \in \mathcal{X}$ .

EJERCICIO 73. Puesto que la composición de una transformación que cambie la orientación con una que la preserve da una que la cambia, al componer una traslación con una reflexión se debe obtener una reflexión, pero está depende del orden en que se efectúe la composición. Encuentra las dos fórmulas. Observa que  $\mathcal{I}_{30}(\mathbb{R})$  no es abeliano.

### 3.5.2. Colineaciones y proyectividades

Nuestro interés principal está en las transformaciones del Plano Desarguesiano, pero  $\mathcal{T}\tau(\mathbb{D}^2)$  es demasiado grande. Las que son relevantes geoméricamente son las *colineaciones* (pag. 121), que preservan las líneas y que forman un grupo que denotaremos

$$\text{Col}_2.$$

Efectivamente es un grupo de transformaciones, pues contiene a la identidad, cada colineación induce una biyección entre las líneas por lo que su inversa también es colineación y la composición de dos de ellas también manda líneas en líneas.

Es el grupo que respeta la estructura extra del Plano Desarguesiano,  $\mathbb{D}^2$ ; esa que le otorga el hecho de tener distinguidos a ciertos subconjuntos llamados líneas. Por esta razón, se cumple que

- *las colineaciones preservan armonía.*

Ya lo demostramos en ??, pero vale recordar que la esencia es que una colineación manda una configuración (conjunto de líneas y puntos con una relación de incidencia específica) en una equivalente y

la armonía se define por la existencia de una cierta configuración (un cuadrángulo externo).

Lo que queremos ver en el siguiente capítulo es que hay subgrupos distinguidos de  $Col(\mathbb{D}^2)$  asociados a las distintas “geometrías”.

Empecemos por definir con precisión a las *proyectividades*. Ojo, no corresponde a la definición clásica, asociada a las proyecciones, ni a la que hemos usado al principio del capítulo (definida intuitivamente y asociada a las cuadrículas), sino a algo que ya tenemos bien controlado formalmente y que ya ha rendido frutos, que son las reflexiones armónicas. Y, a la larga, coincidirán los tres enfoques, pero en su momento habrá que demostrarlo.

Una *proyectividad* es una composición de un número finito de reflexiones armónicas; ya sea en el plano, en el espacio o en la línea. Denotaremos por

$$\mathcal{P}roy_n$$

al grupo de proyectividades de  $\mathbb{D}^n$ , donde  $n$  puede ser 1, 2 o 3; y por ser la primera vez que usamos esta notación, hay que decir que  $\mathbb{D}^1$  es la Línea Desarguesiana (cualquier línea en  $\mathbb{D}^2$ , o en  $\mathbb{D}^3$ ).

Vamos a ver con cuidado que  $\mathcal{P}roy_n$  es efectivamente un grupo de transformaciones.

Primero, puesto que la identidad se obtiene componiendo a cualquier reflexión armónica consigo misma,  $id_{\mathbb{D}^n} \in \mathcal{P}roy_n$ .

Para las otras dos propiedades que hay que probar, conviene escribir a un elemento típico de  $\mathcal{P}roy_n$ : se escribe como

$$\sigma = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \dots \cdot \rho_k,$$

donde cada  $\rho_i$  es una reflexión armónica; es una *palabra de longitud*  $k$  cuyas letras son reflexiones armónicas. Su inverso se obtiene escribiendo la palabra al revés:

$$\sigma^{-1} = \rho_k \cdot \rho_{k-1} \cdot \dots \cdot \rho_1,$$

pues cada letra es una involución, así que al yuxtaponer las palabras, se van eliminando letra por letra (recordar el Ejercicio 65). Así que  $\mathcal{P}roy_n$  es cerrado bajo inversas. Y es cerrado bajo composición, pues al componer dos elementos, se yuxtaponen palabras que los definen y de nuevo es una palabra.

Como notación para *el grupo que generan ...*, seguiremos usando a los paréntesis angulares, extendiendo su uso como si fueran los de conjuntos. Así,

$$\mathcal{P}roy_2 = \langle \rho_{C,e} \mid C \notin e \rangle,$$

significa: el grupo que generan todas las reflexiones armónicas en  $\mathbb{D}^2$ , sobreentendiendo que  $C$  es un punto y  $e$  es una línea en  $\mathbb{D}^2$ . O bien,

$$\mathcal{P}roy_1 = \langle \rho_{A,B} \mid A, B \in \mathbb{D}^1; A \neq B \rangle.$$

Hay que volver a aclarar que cuando se define a un grupo de transformaciones por generadores, cada elemento de él tiene al menos una palabra que lo define, pero ésta no tiene por qué ser única. Cuando hay dos que dan a la misma transformación, se obtiene lo que hemos llamado una *relación* entre los generadores. Pero en los casos que estamos definiendo ahora es de esperarse que sean muchísimas, pues nuestros conjuntos de generadores son ahora enormes; de hecho son continuos. De aquí es de donde saldrá que son grupos de Lie.

Por último, debemos observar que

$$\mathcal{P}roy_n \subset Col_n,$$

para  $n = 2, 3$ . Pues los generadores son colineaciones. Una pregunta difícil es si se da la igualdad; es decir, si cualquier colineación se puede obtener como composición de un número finito de reflexiones armónicas; problema que estudiaremos en la Parte III.

## Capítulo 4

# Geometrías planas y polaridad

Al presentar los principios básicos de la geometría euclidiana *en perspectiva* y *a la Klein* surge naturalmente una nueva construcción de las curvas de armonía como círculos generales vistos en perspectiva. La relación de esta nueva presentación con la definición como lugar geométrico que tenemos de esas curvas, conduce a enunciar el Teorema de Polaridad de Von Staudt en la Sección 2. Este teorema, cuya demostración será el objetivo principal del Capítulo 5, es la herramienta constructiva esencial para desarrollar la geometría hiper-

bólica en la Sección 3. Usarlo como herramienta (tal y como hicimos con la armonía en la Parte I) dará una clara idea de su gran poder y alcance.

Y ya con dos *geometrías rígidas* descritas *a la Klein*, la tercera, íntimamente relacionada con la geometría de la esfera y del espacio euclidiano tridimensional resulta fácil de definir; completando así la exposición del Programa de Erlangen que nos hemos propuesto.

Quedarán abiertas al menos dos vertientes por abordar. La primera es ¿cómo se demuestra el Teo-

rema de Polaridad? para que el ciclo de rigor matemático quede bien sellado. Y la segunda, tratar de precisar qué fue lo que se usó sin demostrar o ¿de qué principios básicos se partió? pues también se hará evidente que la simple incidencia que hasta ahora hemos usado para demostrar las cosas ya no basta. Se relacionan estas dos preguntas con las *Superficies Regladas* y eso es lo que vemos en el capítulo siguiente.

Pero también quedará claro que al seguir el camino de presentar las tres geometrías planas rígidas con el método constructivo y no el analítico (que fue el que prevaleció históricamente), los obstáculos más serios para la formalización estricta vienen de los meollos topológicos (o de la continuidad) que se dilucidaron a mediados del siglo XIX acerca de los números reales y el Plano Cartesiano. Así, algunos de nuestros enunciados no tienen la contundencia que podrían tener, o a veces las demostraciones no alcanzan un alto estándar de formalidad; en particular, dos teoremas cuya demostración claramente nos rebasa en este sentido pero que son históricamente muy relevantes, los

enunciamos como proposiciones para indicar ese relajamiento de estándares. Queda como tarea crítica para el lector, encontrar otros de esos “huecos” en el texto.

Pero también hay que señalar que este camino constructivo y no analítico, pone de manifiesto que la geometría proyectiva motiva a, o es precursora de, una notable apertura de miras en las matemáticas del siglo XIX. En la Parte III, se aborda de lleno el tema de la axiomatización de la geometría proyectiva y se recapitula desde ese punto de vista en este capítulo.

## 4.1. Geometría euclidiana

Hemos visto en la Sección 3.2 que al fijar una línea  $h$  como horizonte se tiene una noción de *paralelismo*: dos líneas son *paralelas* (o *h-paralelas* para ser más precisos) si su punto de intersección está en  $h$ .

En el complemento de  $h$ ,

$$\mathbb{A}^2 = \mathbb{D}^2 \setminus h$$

que llamaremos el *plano afín*, se cumple el Axioma de Euclides (por cada par de puntos pasa una única línea), donde ahora hay que interpretar a las *líneas* como la parte afín de ellas (se les quita a las líneas proyectivas su punto en el horizonte  $h$ ).

Además, en  $\mathbb{A}^2$  también se cumple el Quinto Postulado de Euclides, o **Axioma de las Paralelas** que se puede parafrasear como

- *dada una línea  $\ell$  y un punto  $P$  fuera de ella, existe una única paralela a  $\ell$  que pasa por  $P$ .*

Pues la línea  $P \vee (\ell \wedge h)$  no corta a  $\ell$  en  $\mathbb{A}^2$ , son paralelas en ambos sentidos (el que acabamos de definir y el clásico conjuntista “no se tocan”).

En el espíritu Kleiniano, tenemos un grupo de transformaciones de  $\mathbb{A}^2$  que son las proyectividades que dejan a  $h$  en su lugar y que exploramos en la Escena 32 como “suma” de traslaciones y funciones lineales. Es decir,

$$\mathcal{A}f_2 = \{\eta \in \text{Proy}_2 \mid h \cdot \eta = h\}$$

se puede pensar como grupo de transformaciones de  $\mathbb{A}^2$  (su restricción a  $\mathbb{A}^2$ ), y es conocido como el grupo de *transformaciones afines*. Además, cumple algo muy importante que es que hace a  $\mathbb{A}^2$  *homogéneo*; es decir para cualquier par de puntos (y de líneas) hay una transformación en el grupo que manda a uno en el otro. Esto constituye una geometría en el sentido Kleiniano; la que ahora se conoce como geometría afín.

EJERCICIO 74. Demuestra que dados  $P, Q \in \mathbb{A}^2$ , existe  $\alpha \in \mathcal{A}f_2$  tal que  $P \cdot \alpha = Q$ ; es decir, que  $\mathbb{A}^2$  es homogéneo.

### 4.1.1. Perpendiculares y círculos

La geometría euclidiana tiene más estructura que la afín aunque compartan su espacio base (el complemento de una línea), y esto se traduce en que el grupo de la euclidiana es más chico; cumple más restricciones.

Los axiomas clásicos de la geometría euclidiana incluyen, además del quinto y el de Euclides, uno sobre perpendiculares y otro sobre la existencia de

círculos. Veremos ahora que basta establecer la noción de perpendicularidad como estructura extra, para también poder construir los círculos y definir el grupo correspondiente.

#### ESCENA 42. Polaridad básica y ortogonalidad.

En esta construcción y todas las de esta sección, el papel que juega la loseta-control será únicamente para definir un horizonte,  $h$ , junto con una hilera armónica  $P, M, Q, N$  en él. Definimos al horizonte y su cuarteta de esta manera para poder llevarlos, en principio, a cualquier lugar; y muy en particular a la línea al infinito con su cuarteta euclidiana *estándar*, (haciendo a la loseta un cuadrado perfecto) para obtener la geometría clásica. Pero lo único que usaremos en las construcciones es a la línea horizonte con su cuarteta armónica.

Llamaremos *polaridad básica*, o *polaridad en el horizonte*, a la transformación “tau” de  $h$ :

$$\tau = \rho_{P,Q} \cdot \rho_{M,N} : h \rightarrow h. \quad (4.1)$$

El nombre de “polaridad” tiene que ver con “polo de un ecuador” y luego cobrará más sentido. Por

ahora, representará “la dirección perpendicular” al pensar a los puntos de  $\mathfrak{h}$  como las direcciones de las líneas en su complemento, y está motivado por la ecuación (3.1) de la Sección 3.4.3 que se uso para obtener el “vector ortogonal” de la Escena 33 de movimientos rígidos (de hecho, es la restricción a  $\mathfrak{h}$  de la  $\tau$  definida en (3.1)). Hemos dibujado a un punto variable  $X \in \mathfrak{h}$ , y a sus imágenes bajo las tres transformaciones que aparecen en la ecuación anterior, (4.1);...

pero es mucho más fácil, e ilustrativo, verlo con un punto,  $A$ , fuera de  $\mathfrak{h}$ , y sus cuatro líneas a ellos (“lo que ve  $A$ ”). Pues el papel básico que juega  $\tau$  es que determina una noción de perpendicularidad:

Diremos que dos líneas  $a$  y  $b$  (distintas de  $\mathfrak{h}$ , por supuesto) son *ortogonales* o *perpendiculares* si sus intersecciones con el horizonte se corresponden por la polaridad básica  $\tau$ , es decir, si

$$(a \wedge \mathfrak{h}) \cdot \tau = b \wedge \mathfrak{h}.$$

En la escena se ven dos parejas de líneas ortogonales: una con puntos de fuga  $X$  y  $X \cdot \tau$ ; y la otra que corta a  $\mathfrak{h}$  en  $X \cdot \rho_{P,Q}$  y  $X \cdot \rho_{M,N}$ .

Al mover o animar  $X$ , una pareja se mueve en una dirección y la otra en la contraria. Esto lleva a cruces que se producen, simultáneos, al pasar  $X$  por la cuarteta armónica distinguida. Que los puntos en  $\mathfrak{h}$  viajen (o las líneas por  $A$  giren) en direcciones encontradas se debe a que las reflexiones *invierten* la orientación en la línea, pero tanto la identidad como la polaridad básica (que es composición de dos reflexiones) la preservan. ■

Queremos ahora demostrar que:

- la polaridad básica es una involución;

es decir,  $\tau^2 = \text{id}_h$ .

Puesto que  $\tau^{-1} = \rho_{M,N} \cdot \rho_{P,Q}$  por ser  $\tau$  el producto de estas involuciones pero en el otro orden ( $\tau = \rho_{P,Q} \cdot \rho_{M,N}$ ), que  $\tau$  sea una involución equivale a que las reflexiones *conmuten*, es decir, a que se cumple

$$\rho_{M,N} \cdot \rho_{P,Q} = \rho_{P,Q} \cdot \rho_{M,N};$$

y esto, multiplicando ambos lados a la derecha por la inversa de  $\rho_{M,N}$ , a su vez equivale a

$$\rho_{M,N} \cdot \rho_{P,Q} \cdot \rho_{M,N} = \rho_{P,Q}. \quad (4.2)$$

Al lado izquierdo de esta ecuación se le llama *conjugar* a  $\rho_{P,Q}$  por  $\rho_{M,N}$ , y para demostrar la ecuación, nos conviene salirnos de la línea  $h$  al plano y demostrar algo más general.

**Lema 3.** *En  $\mathcal{P}roy(2)$ , el conjugado de una reflexión armónica es la reflexión armónica en la imagen del centro y el espejo. Es decir, dados  $\alpha \in \mathcal{P}roy(2)$  y un par punto-línea no incidente  $B \notin b$ , entonces*

$$\alpha \cdot \rho_{B,b} \cdot \alpha^{-1} = \rho_{B \cdot \alpha, b \cdot \alpha}.$$

**Demostración.** Veamos primero el caso de un generador de  $\mathcal{P}roy(2)$ .

**ESCENA 43.** *Conjugación de reflexiones armónicas.*

Sean  $A \notin a$  y  $B \notin b$  dos pares no incidentes punto-línea, y sean  $\alpha = \rho_{A,a}$ ,  $\beta = \rho_{B,b}$ ,  $C = B \cdot \alpha$ ,  $c = b \cdot \alpha$  y  $\gamma = \rho_{C,c}$ .

Dado un punto cualquiera en  $X \in \mathbb{D}^2$ , consideremos la hilera armónica  $X, C, X \cdot \gamma, (X \vee C) \wedge c$ .

Su imagen bajo  $\alpha$  es la hilera armónica

$$X \cdot \alpha, B, Y, ((X \cdot \alpha) \vee B) \wedge b$$

en la línea roja segmentada  $(X \cdot \alpha) \vee B$ . Y que sea armónica, por ser la imagen de una tal, prueba que

$$Y = (X \cdot \gamma) \cdot \alpha = (X \cdot \alpha) \cdot \beta .$$

Como  $X \in \mathbb{D}^2$  es arbitrario, esto demuestra que  $\alpha \cdot \beta = \gamma \cdot \alpha$ , que a su vez implica

$$\alpha \cdot \rho_{B,b} \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \rho_{C,c} = \rho_{B \cdot \alpha, b \cdot \alpha} .$$

Esto concluye la demostración del lema para conjugaciones por reflexiones armónicas. ■

El caso general se sigue por inducción en la longitud de las palabras que expresan a un elemento de  $\mathcal{P}roy(2)$  como producto de reflexiones armónicas. Pues su inverso es la misma palabra pero escrita al revés y al expresar la conjugación, en la mitad de la palabra se van incorporando las “letras” al cambio de centro-espejo en la reflexión armónica que se está conjugando. □

Regresemos ahora a la demostración de la ecuación (4.2) cuando  $M, P, N, Q$  es una hilera armónica en  $h$ . Consideremos un punto  $O$  fuera de  $h$  y denotemos por la letra minúscula correspondiente

a las líneas de  $O$  a estos cuatro puntos (ojo: estos no son los nombres que habíamos usado en la Escena 41 para estas líneas). Por el Lema anterior y por ser  $M, P, N, Q$  una hilera armónica, tenemos

$$\rho_{M,n} \cdot \rho_{P,q} \cdot \rho_{M,n} = \rho_{P \cdot \rho_{M,n}, q \cdot \rho_{M,n}} = \rho_{Q,p} \cdot$$

La restricción a la línea  $h$  de esta igualdad, da

$$\rho_{M,N} \cdot \rho_{P,Q} \cdot \rho_{M,N} = \rho_{Q,P} = \rho_{P,Q} ,$$

donde la última igualdad es por ser reflexiones armónicas en una línea. Así que al restringirse a la

línea  $h$  sí conmutan, pero en el plano no (la ecuación anterior), lo cual concuerda con la Escena 41 donde habíamos interpretado que  $\rho_{M,n} \cdot \rho_{P,q}$  es la rotación de un ángulo recto y en el otro orden es la rotación inversa (en el otro sentido), pero a nivel de líneas (o puntos de fuga en el horizonte) ambas mandan a cada línea en su perpendicular.

Por lo tanto  $\tau = \rho_{M,N} \cdot \rho_{P,Q}$  es una involución, y entonces es fácil ver que  $\{id_h, \rho_{M,N}, \rho_{P,Q}, \tau\}$  es un grupo de Klein (Ejercicio 79); pero visto como grupo de transformaciones de  $h$ .

Con la noción de perpendicularidad, podemos asociar a cada línea la reflexión que cambia sus dos lados “rígidamente” a semejanza de lo que hacen los espejos en nuestro mundo. Y estas reflexiones generan al grupo de transformaciones que determina a la geometría euclidiana.

**Definición.** Dada  $l$ , línea distinta de  $h$ , su *reflexión euclidiana* es la reflexión armónica con espejo  $l$  y centro en el punto de fuga de su dirección ortogonal, es decir,

$$\varepsilon_l = \rho_{(l \wedge h)} \cdot \tau, l.$$

Y el *grupo euclidiano* (que determinan  $h$  y su polaridad básica  $\tau : h \rightarrow h$ , hay que remarcar), es el grupo generado por las reflexiones euclidianas de todas las líneas distintas del horizonte:

$$\mathcal{Euc}_2 = \langle \varepsilon_l \mid l \neq h \rangle \subset \mathcal{Af}_2 \subset \mathcal{P}roy_2.$$

Ya podemos construir círculos:

#### ESCENA 44. Círculos.

Como antes, tenemos un horizonte  $h$  con una polaridad básica  $\tau$  definida por una hilera armónica.

Dados dos puntos  $A$  y  $B$  fuera de  $h$ ,...  
 sea  $X \in h$  un punto variable y sea  $B' = B \cdot \varepsilon_{A \vee X}$ .

El *círculo con centro en  $A$*  y que pasa por  $B$  es lo que traza  $B'$  cuando  $X$  corre a lo largo de  $h$ . Es decir, consiste de todos los *reflejados* (euclidianos) de  $B$  cuando el espejo incide en  $A$ ; y se parametriza naturalmente con los puntos de  $h$ . Es la curva:

$$C_\tau(A, B) = \{B \cdot \varepsilon_{A \vee X} \mid X \in h\},$$

donde enfatizamos la dependencia de la polaridad básica  $\tau$ .

Explore a estas curvas parametrizadas por  $h$  y observe que incluyen a la curva de armonía de la loseta básica (hay que mostrar dos colores) cuando  $A$  es su centro y  $B$  es un vértice. Convénsase de que son cómo se ven los círculos bajo una proyección. Cruce el horizonte con  $B$  para observar el cubrimiento 2 a 1 del círculo sobre él. ■

Por último, debemos enfatizar que el grupo euclidiano  $\mathcal{E}uc_2$  actúa tanto en  $\mathbb{D}^2$  como en el complemento de  $h$  que habíamos llamado  $\mathbb{A}^2$ . Para Klein, una geometría es un *espacio* junto con un

grupo. Entonces, el espacio para el *plano euclidiano*, o para ser más precisos y fieles a la historia y a los dibujos, el *plano euclidiano en perspectiva* debe ser  $\mathbb{E}_\tau^2 = \mathbb{D}^2 \setminus h = \mathbb{A}^2$  (donde, al usar a  $\tau$  como subíndice pensamos que por ser función incluye como información a su dominio  $h$ ) con la acción de  $\mathcal{E}uc_2$  (también determinado por  $\tau$ ).

El grupo euclidiano clásico se obtiene como cuando  $h$  es la línea al infinito de  $\mathbb{D}^2$  y  $\tau$  provie-

ne de un cuadrado perfecto.

EJERCICIO 75. Continúa la escena anterior para comprobar experimentalmente que *las perpendiculares a los radios son tangentes al círculo*; es decir, encuentra la perpendicular a  $A \vee B'$  en  $B'$  (para esto, debes mostrar la cuarteta armónica del horizonte para usarla en el cálculo de  $\tau$ ) y despliega su familia con parámetro  $X$ .

EJERCICIO 76. Demuestra que dada una línea  $\ell$  y un punto  $P$  en  $\mathbb{E}_{\tau}^2$ , existe una única perpendicular a  $h$  que pasa por  $P$ .

EJERCICIO 77. Demuestra que una reflexión armónica de  $h$ ,  $\rho_{A,B}$ , conmuta con  $\tau$  si y sólo  $A = B \cdot \tau$ .

EJERCICIO 78. Sea  $G$  el grupo de transformaciones de  $h$  que son la restricción a  $h$  de un elemento de  $\mathcal{Euc}_2$ . Demuestra que  $G$  está contenido en el subgrupo de  $\mathcal{P}roy(h)$  que conmuta con  $\tau$  (donde denotamos por  $\mathcal{P}roy(h)$  al grupo generado por las reflexiones armónicas en  $h$  y es isomorfo a  $\mathcal{P}roy_1$ ); ver Ejercicio 71.

EJERCICIO 79. Demuestra que  $\{\text{id}_h, \rho_{M,N}, \rho_{P,Q}, \tau\}$  es un grupo de Klein (con  $M, N, P, Q, \tau$  y  $h$  como en las páginas anteriores, ver pg. 171).

EJERCICIO 80. Dada una proyectividad  $\eta \in \mathcal{P}roy_2$ , sean

$h' = h \cdot \eta$  y  $\tau' = \eta \cdot \tau \cdot \eta^{-1}$ . Demuestra que  $\tau'$  es una polaridad básica en  $h'$  y que los grupos  $\mathcal{Euc}_{\tau}$  y  $\mathcal{Euc}_{\tau'}$  definidos como se definió  $\mathcal{Euc}_2$  pero usando  $\tau$  y  $\tau'$  respectivamente, son *conjugados*; es decir, que sus elementos se corresponden biyectivamente al conjugarse por  $\eta$ .

## 4.1.2. Traslaciones y rotaciones

Vamos a ver ahora que el grupo euclidiano corresponde a los movimientos rígidos que exploramos en la Escena 33 y que motivó, en buena medida, el desarrollo de la teoría. Efectivamente, al componer dos reflexiones euclidianas, se obtienen traslaciones o rotaciones dependiendo de si los espejos son paralelos (se cortan en el horizonte) o no. A estos dos casos corresponden las siguientes escenas que, como en las anteriores, están basadas en una loseta oculta que define el horizonte  $h$  con una polaridad básica,  $\tau$ .

### ESCENA 45. Traslaciones.

Dadas dos líneas  $a$  y  $b$  (roja y azul) que se cortan en un punto  $D$  (su “dirección”) del horizonte  $h$ , sea

$$\sigma = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b = \rho_{D \cdot \tau, a} \cdot \rho_{D \cdot \tau, b}.$$

Sea  $X$  un punto libre. A su imagen bajo  $\sigma$ , lo llamamos  $Y = X \cdot \sigma$ ; y también hemos dibujado al punto “intermediario”,  $X \cdot \varepsilon_a$  (pintado de rojo), que se necesita para definir a  $Y$ . Los tres caen en una línea perpendicular a los espejos  $a$  y  $b$ , pues

$\sigma$  resulta ser una *traslación* en la dirección  $D \cdot \tau$  del doble del “tamaño” de la “franja” entre  $a$  y  $b$ . Para apreciarlo, conviene estudiar al grupo que generen estas dos reflexiones:

$$\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle,$$

que consiste de palabras en las dos “letras”  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$  que se alternan pues son involuciones.

La inversa de  $\sigma$  es  $\sigma^{-1} = \varepsilon_b \cdot \varepsilon_a$ . Sea  $Z = X \cdot \sigma^{-1}$ ; y también dibujamos  $X \cdot \varepsilon_b$  (azul).

En la figura, tenemos a las imágenes de  $X$  bajo las transformaciones de  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$  que corresponden a las cinco palabras con a lo más dos letras (la identidad corresponde a la palabra vacía).

La siguiente palabra (elemento de  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$ ) es de longitud 3:

$$\varepsilon_a \cdot \varepsilon_b \cdot \varepsilon_a \cdot$$

Por el Lema 3, es la reflexión en la línea  $b \cdot \varepsilon_a$ .

Análogamente,  $\varepsilon_b \cdot \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b$  es la reflexión en la línea  $a \cdot \varepsilon_b$ . Y junto con ella, de una vez hemos añadido las imágenes de  $X$  bajo todas las palabras de a lo más 4 letras, que incluyen a  $X \cdot \sigma^2$  y  $X \cdot \sigma^{-2}$ .

Los 9 puntos que tenemos dibujados se agrupan en dos sucesiones armónicas en la línea  $X \vee (D \cdot \tau)$ : una de 5 puntos que se mueve con “el comandante”  $X$  al centro y el “otro bando” de las cuatro reflexiones de  $X$  que se mueven en dirección contraria.

Y este patrón se continua por siempre. El grupo  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$  es isomorfo al grupo diédrico infinito,  $D_\infty$ , que describimos en § 3.5.1; pero ahora vive dentro de  $\mathcal{P}roy_2$ , aunque su acción en la línea  $(X \vee (D \cdot \tau))$  quitándole el punto de fuga es

equivalente. Tiene un subgrupo distinguido de palabras pares o que preservan la orientación, que son las *traslaciones* generadas por  $\sigma$ ,  $\langle \sigma \rangle$ . Este es un *grupo cíclico infinito*; cuyo complemento (en  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$ ) consiste de reflexiones (palabras con un número impar de letras). Además, en la línea horizontal se restringen a las dos transformaciones del grupo cíclico de orden 2  $\{id_h, \rho_{D, D \cdot \tau}\}$ : la identidad  $id_h$  (para las traslaciones) y la reflexión armónica  $\rho_{D, D \cdot \tau}$  (para las reflexiones). ■

De esta escena, queremos concluir dos cosas. Primera, que hay un subgrupo distinguido de  $\mathcal{E}uc_2$  que son las transformaciones que preservan la orientación de  $\mathbb{E}_\tau^2$ ,

$$\mathcal{E}uc_2^+ \subset \mathcal{E}uc_2 .$$

Sus elementos son composición de un número par de reflexiones euclidianas, es decir, consiste de las palabras pares de  $\mathcal{E}uc_2$ ; y se le llama el grupo de *movimientos euclidianos* pues a sus elementos se puede llegar continuamente desde la identidad.

Y segunda, que si consideramos una línea  $\ell$  de  $\mathbb{E}_\tau^2$  (piénsese en la línea  $X \vee (D \cdot \tau)$  de la escena anterior) se tienen suficientes reflexiones en líneas ortogonales a ella (una para cada punto) como para ver intuitivamente que las traslaciones a lo largo de  $\ell$  (la composición de dos de estas reflexiones) debieran ser isomorfos a  $\mathcal{I}so^+(\mathbb{R})$  (o bien  $\mathbb{R}$ ) por como presentamos a estos grupos en § 3.5.1.

#### ESCENA 46. Rotaciones.

Consideremos ahora dos líneas  $a$  y  $b$  que se cortan en un punto  $O$  fuera del horizonte  $h$ . Sean

$A = a \wedge h$  y  $B = b \wedge h$  sus correspondientes puntos de fuga; y en  $h$  también están sus dos *puntos polares*  $A \cdot \tau$  y  $B \cdot \tau$ .

El grupo que generan sus dos reflexiones euclidianas,  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$ , es de nuevo un grupo diédrico y su composición  $\sigma = \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b$ , ahora es una *rotación* con *centro* en  $O$ ; que por ser donde se cortan los espejos no sólo es punto fijo de la rotación sino también de todo el grupo; pues si sus generadores no lo mueven, ningún producto de ellos lo hará.

En la escena hay un punto libre,  $X$ , y sus imágenes bajo las primeras 5 transformaciones de

$$\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle = \{ \text{id}_{\mathbb{D}^2}, \varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_a \cdot \varepsilon_b, \varepsilon_b \cdot \varepsilon_a, \dots \},$$

que suponemos ordenado lexicográficamente.

Si extendemos la órbita de  $X$  hasta las palabras de longitud 4, ya aparecen dos nuevas reflexiones (las de longitud 3 que son conjugaciones); hemos trazado sus espejos. Y además, dibujamos al círculo,  $\mathcal{C}_\tau(O, X)$ , con centro en  $O$  y que pasa por  $X$ , pues en él caerá toda la órbita de  $X$  y permite visualizar mejor lo que está pasando.

Qué grupo diédrico es  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$  depende del ángulo,  $\theta$ , entre  $a$  y  $b$ . Desde la posición inicial: mueve al punto de control de  $b$  o  $a$ , para aumentarlo. Los dos extremos de la cadena morada —que liga a las palabras pares y pertenece a la órbita del subgrupo cíclico que preserva orientación— entran en curso de colisión. Detente cuando coincidan.

Ahí, se tiene al grupo  $D_4$  de 8 elementos que ya habíamos visto (en la Escena 41) como simetrías de una loseta; aunque hay que tener cuidado, no es

la loseta que se dibuja ahora, a menos que  $X$  esté sobre un espejo. El ángulo entre  $a$  y  $b$  es  $\theta = \frac{1}{4}\pi$ .

Si se sigue agrandando el ángulo  $\theta$ , se disciernen con claridad los ángulos:  $\frac{1}{3}\pi$  (la cadena se convierte en un triángulo y el grupo se hace de 6 elementos, es  $D_3$ );  $\frac{1}{2}\pi$  en que el grupo se colapsa a un grupo de Klein, o  $D_2$ , con cuatro elementos (observa aquí al horizonte: los espejos son ortogonales); y le siguen  $\frac{2}{3}\pi$  y  $\frac{3}{4}\pi$  donde gráficamente parece que estamos en casos anteriores, pero las rotacio-

nes generadoras van en el sentido inverso. Podemos seguir agrandando el ángulo hasta  $\pi$ : *cuando coinciden los espejos, pero con direcciones encontradas*. Aquí, tenemos al único grupo abstracto de 2 elementos,  $D_1 \cong C_2 \cong \mathbb{Z}_2$ , pues  $\varepsilon_a = \varepsilon_b$ .

Regresemos el ángulo  $\theta$  a ser chico.

Si hacemos crecer la cadena a 8 eslabones (y la órbita de  $X$  a palabras de longitud 8 o menos en  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$ ), se pueden detectar todos los ángulos  $\theta = \frac{q}{p}\pi$  con  $p \leq 8$ . Pues  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$  es un grupo finito cuando el ángulo entre los espejos generadores es *racional*, es decir, se escribe como  $\theta = \frac{q}{p}\pi$  con  $q$  primo relativo a  $p$ ; entonces, es el grupo diédrico  $D_p$  y  $q$  es el número de vueltas que da una cadena de longitud  $q$  antes de regresar al punto de partida (ver Ejercicios 81 y 82).

Pero además hay *ángulos irracionales*, los que no se pueden expresar como  $\frac{q}{p}\pi$ . En ellos, no hay ninguna *relación* fuera de que los dos generadores de  $\langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle$  son involuciones, es decir, no hay dos palabras simples (sin repetición de letras) que den la misma transformación. Entonces, como grupo abstracto, es el diédrico infinito,  $D_\infty$  de la esce-

na anterior. Lo que lo distingue de aquellos como grupo de transformaciones es que no es *discreto* (una condición topológica en la que no queremos ahondar), es decir, que sus órbitas se apelmazan, se vuelven *densas* en un círculo; le dan vueltas y vueltas sin que haya nunca una coincidencia. ■

EJERCICIO 81. Con la escena anterior, tómale fotos a los ángulos  $\frac{2}{5}\pi$ ,  $\frac{3}{5}\pi$ ,  $\frac{2}{7}\pi$  y  $\frac{3}{8}\pi$  vistos en perspectiva.

EJERCICIO 82. Cuáles son los ángulos más cercanos a  $\frac{1}{2}\pi$  que puedes encontrar con la escena anterior.

### 4.1.3. Mediatrices, bisectrices y rayos

Se dice que un grupo de transformaciones es *transitivo* si para cada par de elementos de su conjunto base, hay una transformación del grupo que manda a uno en el otro. En este caso, el conjunto base es *homogéneo* pues todos sus elementos son equivalentes desde “el punto de vista” del grupo. Veremos ahora que  $\mathcal{E}uc_2^+$  (y por lo tanto  $\mathcal{E}uc_2$ ) son transitivos cuando se les piensa como trans-

formaciones del complemento de la línea horizonte. Para esto, podemos usar la construcción clásica de la mediatriz, en su versión a la Klein, sin haber definido distancia explícitamente.

#### ESCENA 47. Mediatriz y punto medio.

Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , fuera de  $h$ , ... sea  $D = (A \vee B) \wedge h$  el punto de fuga de su línea. Entonces, el armónico de  $D$  respecto a ellos,  $C = D \cdot \rho_{A,B}$ , es su *punto medio*; y la perpendicular allí,  $m = C \vee (D \cdot \tau)$ , es su *mediatriz*.

La reflexión euclidiana con espejo  $m$ ,  $\varepsilon_m$ , intercambia a  $A$  y  $B$ ; también lo hace la media vuelta en  $C$ , que se puede expresar  $\varepsilon_m \cdot \varepsilon_{A \vee B}$ . Y la traslación  $\varepsilon_{A \vee (D \cdot \tau)} \cdot \varepsilon_m$ , manda a  $A$  en  $B$  preservando su línea  $A \vee B$  y su orientación.

Además, cualquier punto  $X \in m \setminus h$  es centro de un círculo que pasa por  $A$  y  $B$ ; es interesante ver estos círculos cuando  $X$  tiende al horizonte. ■

Podemos ser aún más generales en las propiedades de transitividad de los grupos. Cuando el grupo *actúa* naturalmente en otro conjunto (por ejemplo las colineaciones actúan en las líneas y en los segmentos), se dice que *actúa transitivamente* si

para cada par de elementos del conjunto hay un elemento del grupo que los relaciona. En el caso del grupo euclidiano, no sólo hay transitividad en los puntos sino también en las líneas y veremos que más aún, en los rayos; donde un *rayo* es la mitad de una línea y su *origen* es el punto donde empieza, es decir, es un segmento que termina en el horizonte  $h$ .

#### ESCENA 48. Bisectrices.

Consideremos dos rayos, rojo y azul, con origen  $O$ ; se definen y controlan con puntos intermedios  $A$  y  $B$  respectivamente. Queremos ver que se puede mandar un rayo en el otro.

Consideremos un círculo  $\mathcal{C}$  con centro en  $O$  (escogimos el que pasa por  $A$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\tau(O, A)$ ). Éste corta a las líneas por  $O$  que tenemos dibujadas en dos puntos, y uno de ellos está en el rayo.

Sea  $m$  la mediatriz entre estos dos puntos del círculo (uno en cada rayo); se puede obtener como la línea por  $O$  y su punto medio. La reflexión  $\varepsilon_m$  intercambia a los rayos azul y rojo, por lo que se llama la *bisectriz* entre ellos, “bisecta el ángulo”. Si componemos esta reflexión con las reflexiones

en las líneas *soporte* de los rayos, obtenemos rotaciones que mandan a un rayo en el otro.

Como líneas,  $O \vee A$  y  $O \vee B$  tienen *otra bisectriz*; la reflexión en ella manda a los rayos en sus complementarios (o, podríamos decir, invierte la orientación que ellos definen). Además, *las dos bisectrices son perpendiculares*; sus reflexiones generan un grupo de Klein y los cuatro puntos de intersección de las líneas con el círculo son una órbita de ese grupo (ver Ejercicios ?? y 67). ■

Las dos construcciones anteriores se juntan para demostrar un teorema de *homogeneidad*.

**Teorema 9.** *El grupo de movimientos euclidianos es transitivo en rayos.*

ESCENA 49. *Transitividad en rayos.*

**Demostración.** Consideremos dos rayos, rojo y azul, con origen en  $A$  y en  $B$ , respectivamente. Tenemos que encontrar a un elemento en  $\mathcal{Euc}_2^+$  que mande a uno en el otro.

Sea  $m$  la mediatriz entre  $A$  y  $B$ . Con ella como espejo de reflexión, el rayo rojo en  $A$  es mandado a un rayo morado con origen en  $B$ .

Sea  $n$  la bisectriz de los rayos morado y azul (con origen en  $B$ ); como espejo los refleja.

La transformación euclidiana que se obtiene de componer estas dos reflexiones:

$$\sigma = \varepsilon_m \cdot \varepsilon_n,$$

manda entonces al rayo rojo en el rayo azul. Hemos añadido a la escena un punto  $X$ , su imagen  $X \cdot \sigma$  y el segmento que los une, para explorar esta correspondencia entre los rayos. Puesto que  $\sigma$  preserva orientación, esto concluye la prueba.  $\square$

Pero antes de concluir la escena, vale la pena hacer varias observaciones.

En general,  $\sigma$  es una rotación con centro en  $m \wedge n = C$ . Solamente cuando los rayos son paralelos, es una traslación. Por eso se dice que las traslaciones son el límite de rotaciones cuando su centro tiende al infinito. Para verlo, gire alguno de los rayos: el centro  $C$  de la rotación  $\sigma$  recorre la mediatriz  $m$ . Y hay dos momentos singulares: cuando

C pasa por el horizonte (la traslación para rayos paralelos) y cuando pasa por el punto medio entre los orígenes, una rotación de  $\pi$  (o media vuelta), cuando los rayos son paralelos pero con direcciones encontradas y sus segmentos llegan por ambos lados al mismo punto del horizonte. ■

Con esto, concluimos la presentación de la geometría eculidiana como un *modelo* dentro de la geometría proyectiva. Pero vale la pena comentar varios puntos y detectar cabos sueltos.

Primero. Al demostrar que los movimientos eulidianos son transitivos en rayos, estamos interpretando a la Escena 33 de Movimientos Rígidos de una manera más abstracta. Si pensamos que el rayo rojo está fijo, al mover los controles del rayo azul, se obtienen las mismas transformaciones que en aquella escena moviendo al “origen” y a la dirección preferida. Ahora estamos dando de manera explícita a la transformación, que quizá antes era más intuitiva como movimiento visual. Pero los parámetros son los mismos, o mejor dicho, equivalentes, y con tres grados de libertad.

Segundo. Klein decía que el grupo determina la geometría. En nuestro caso, vimos que los ángulos racionales están determinados por los grupos. Y las distancias también lo estarán en el momento en que uno determine la unidad de medida: dos puntos como “vara de medir”. Pues con el grupo de movimientos, se le puede llevar a medir cualquier otra distancia con la precisión que se necesite. Y al revés es más fácil, si tenemos noción de distancia se deduce un grupo de transformaciones que la preservan, llamadas isometrías (ver Ejercicio 72).

No presentaremos esta equivalencia con cuidado, sólo queremos señalar, intuitivamente, que está ahí a la mano.

Tercero. Aunque se haya definido al grupo euclidiano como todas las posibles palabras en reflexiones euclidianas, resultó que muy pronto se abarca todo. Es decir, no hay que ir a palabras de longitud grande. Parece que con dos se obtienen todas las orientadas y entonces bastan tres para las no orientadas. Pero demostrar esto necesita argumentos de *unicidad* para los que no estamos aún preparados. En la Parte III abundaremos en las dificultades.

Y por último, que las curvas de armonía, si bien nos dieron la base para poder desarrollar nuevas construcciones, dejaron muchas interrogantes abiertas. Esto es lo que sigue y es lo que nos conducirá a las geometrías no euclidianas.

EJERCICIO 83. Al final de la Escena 48, traza la curva de armonía de los cuatro puntos que se obtienen como intersección del círculo  $\mathcal{C}$  con las líneas de los rayos. Comprueba experimentalmente que no necesariamente es el círculo  $\mathcal{C}$ .

EJERCICIO 84. Al final de la Escena 48, traza la curva de armonía de los cuatro puntos que se obtienen como intersección del círculo  $\mathcal{C}$  con las bisectrices a las líneas de los rayos. Comprueba experimentalmente que coincide con el círculo.

EJERCICIO 85. Haz una construcción que dibuje el círculo que pasa por tres puntos  $A, B, C$  que no están en una línea horizonte,  $h$ , que viene con una polaridad básica determinada por una cuarteta armónica.

EJERCICIO 86. Con una configuración inicial como en el ejercicio anterior, desarrolla una construcción en que se dibujen los cuatro círculos tangentes a los lados de un triángulo  $ABC$  visto en perspectiva.

## 4.2. Polaridad

Hemos visto las *curvas armónicas* de dos maneras distintas: como curvas de armonía ligadas a 4 puntos y como los círculos de la geometría euclidiana en perspectiva. Aunque visualmente sea claro que ambos tipos de curvas son lo mismo —y sí lo son— aún estamos lejos de una demostración formal de ello. La primera definición, que depende de una loseta, fue como un lugar geométrico (a la que después se asoció una construcción, Escena 34), y la segunda “definición” fue constructiva. Fue el resultado de una construcción (Escena 44) que dependía de un par de puntos (un centro con otro por el cual pasaba la curva-círculo); pero se usó de manera fundamental lo que llamamos una polaridad básica en el horizonte.

Vamos a presentar ahora una tercera construcción. Se parece filosóficamente o en estilo a la segunda, pero seremos capaces de demostrar que corresponde a la primera. Es un acercamiento o puente entre las dos definiciones.

Esto nos dará elementos que motivan el enun-

ciado del **Teorema de Polaridad de Poncelet-von Staudt** cuya primera aplicación será demostrar la equivalencia de las dos definiciones. Su poderío se pone de manifiesto en la existencia de la geometría hiperbólica, que presentamos en la siguiente sección.

### 4.2.1. La construcción-A

ESCENA 50. Curvas de armonía por Construcción-A.

El nombre de esta construcción viene de “Armo-

nía” y de la imagen que producen sus datos iniciales; su producto será una curva de armonía.

Los **datos** son dos líneas  $a$  y  $b$ , que serán tangentes a la curva con sus puntos de contacto determinados ( $A \in a$  y  $B \in b$ ), y un tercer punto  $C$  por el que debe pasar. Las tangentes se definen por su punto de intersección  $Q$  y sus puntos de contacto  $A$  y  $B$  respectivamente.

En la línea  $q = A \vee B$ , que pintamos de rojo, se define un punto variable  $X$ . Sean  $Y$  el armónico de  $X$  respecto a  $A, B$  y llamaremos  $y$  a la línea de  $X$  a  $Q$ , es decir:

$$Y = X \cdot \rho_{A,B} \quad ; \quad y = X \vee Q.$$

Sea  $Z$  la reflexión armónica de  $C$  con espejo  $y$  y centro  $Y$ :

$$Z = C \cdot \rho_{Y,y}.$$

La curva que traza  $Z$  al variar  $X \in q$ , que llamaremos  $\mathcal{C}$ , es el **resultado de la construcción-A**.

Quisiera uno escribir

$$\mathcal{C} = \{ C \cdot \rho_{Y,y} \mid X \in A \vee B \},$$

pero es incorrecto. Pues para  $X$  igual a  $A$  o  $B$  la reflexión armónica  $\rho_{Y,y}$  no está definida. Aunque ahí, la construcción completa a la curva con los puntos mismos. Entonces, lo que sí es correcto escribir es:

$$\mathcal{C} = \{ C \cdot \rho_{Y,y} \mid X \in A \vee B \setminus \{A, B\} \} \cup \{A, B\}.$$

Queremos ahora demostrar que

- $\mathcal{C}$  es una curva de armonía.

Sea  $D = C \cdot \rho_{Q,q}$ , el reflejado de  $C$  con centro en  $Q$  y espejo en la línea roja  $q = A \vee B$ .

Afirmamos que  $\mathcal{C}$  es la curva de armonía de la cuarteta, cíclicamente ordenada,  $A, D, B, C$ .

La prueba sigue a la de la dualidad entre curvas y haces de armonía (§ 3.4.2.1, Escena 40).

Sea  $x = Y \vee Q$ . Para  $X \notin \{A, B\}$ , consideremos al triángulo  $QXY$ , con respectivos lados opuestos  $qx, y$ , y al grupito de Klein que produce según el Lema 2 (del Triángulo de Klein):

$$\{id_{\mathbb{D}^2}, \rho_{Q,q}, \rho_{X,x}, \rho_{Y,y}\}.$$

Para completar la órbita de  $C$  bajo este grupo falta en la figura

$$Z' = C \cdot \rho_{X,x} = D \cdot \rho_{Y,y} = Z \cdot \rho_{Q,q};$$

que, por tanto, es donde concurren las líneas  $C \vee X, D \vee Y$  y  $Z \vee Q$ .

Al trazar las 6 líneas que unen a los cuatro puntos de esta órbita, se obtienen las ternas colineales suficientes (con los centros  $X$  y  $Y$  de las reflexiones) para ver que  $Z$  y  $Z'$  están en la curva de armonía de  $A, D, B, C$  según la Escena 34. Como en ambas escenas las curvas están parametrizadas

por la línea  $\bar{A} \vee B$ , queda demostrado que son la misma curva como queríamos.

Antes de concluir conviene recordar que la prueba, en la Escena 40, de que cada punto  $Z$  (o  $Z'$ ) en  $\mathcal{C}$  tenía bien definida una línea tangente  $z$  (o  $z'$ ), consistió en aplicar las reflexiones  $\rho_{Y,y}$  (o  $\rho_{X,x}$ ) a las tangentes  $c$  y  $d$  en los puntos  $C$  y  $D$  respectivamente. Pues el punto clave que vamos a precisar a continuación es que la correspondencia entre puntos y líneas dada por la curva  $\mathcal{C}$  es general. ■

## 4.2.2. Teorema de Polaridad de Poncelet-von Staudt

Empezamos por definir y discutir el concepto de *polaridad*. Luego enunciaremos el Teorema de Poncelet-von Staudt y veremos cómo resuelve dos problemas con los que ya nos hemos enfrentado.

**Definición.** Una *polaridad* en  $\mathbb{D}^2$  es un apareamiento entre puntos y líneas que preserva incidencia. En  $\mathbb{D}^3$ , es un apareamiento entre puntos y planos que preserva incidencia. Y en  $\mathbb{D}^1$  es un apareamiento entre puntos —esto es, una involución de  $\mathbb{D}^1$ — que como transformación está en  $\mathcal{P}roy(1)$ .

En las geometrías de muchas dimensiones se tiene la noción de *hiperplano* para referirse a los subespacios más grandes que no son el total. Así que los *hiperplanos* en dimensión 3 son los planos; en dimensión 2 son las líneas, y en una línea son los propios puntos. De tal forma que en general, *una polaridad es un apareamiento entre puntos e hiperplanos*.

Como en dimensión 1 la incidencia entre puntos

es igualdad, la condición que se pone al apareamiento es de muy distinta índole (pero veremos a la larga que encaja bien con las demás). Los ejemplos que hemos visto son una reflexión armónica y una polaridad básica en el horizonte (ver pag. 167), que fue la base para la geometría euclidiana.

Por *apareamiento* nos referimos a una función biyectiva entre los dos conjuntos involucrados (puntos e hiperplanos), pero que se usa en las dos direcciones. Así, para una polaridad dada, se habla del *polar* de un punto o del *polo* de un hiperplano y juntos dan una *pareja polar*; y en  $\mathbb{D}^1$ , cuando los dos conjuntos coinciden, se usa *polo* o *polar* indistintamente y se tiene una función entre puntos que es su propia inversa; que es una involución.

Finalmente, debemos precisar la condición de *preservar incidencia*. Recordemos que *incidencia* es la manera de referirse a “ser elemento de” o “contener a”, sin una dirección establecida. Así que, con una polaridad dada, y en  $\mathbb{D}^2$  para fijar ideas, si el punto P tiene como polar a la línea p (que podemos denotar  $P \leftrightarrow p$ ), y la línea q tiene como polo al punto Q ( $Q \leftrightarrow q$ ), que se *preserve la incidencia*

es que se cumple que:

$$P \in q \iff Q \in p;$$

“si un punto y una línea inciden, la polar y el polo correspondientes también inciden”.

El matemático alemán Karl Georg Christian von Staudt (1798 – 1867) escribe en varios tomos sus “Contribuciones a la geometría de lugar”<sup>1</sup>. Se le considera la obra cumbre de la geometría proyectiva sintética. En ella, entre otras cosas, es donde se define por primera vez a la armonía independiente de la distancia como aquí lo hemos hecho; y también se da una definición nueva de las curvas cónicas usando y estableciendo la noción de polaridad. Puesto que nosotros ya definimos curvas armónicas, corresponde presentar a este resultado como un teorema que las caracteriza. Su demostración la haremos en el Capítulo 5. Por lo pronto queremos enunciarlo y experimentar su gran poder usándolo como herramienta constructiva, como lo hicimos con la armonía.

---

<sup>1</sup>Beiträge zur Geometrie der Lag

**Teorema** (Polaridad de curvas armónicas). *Una curva armónica  $\mathcal{C}$  induce una polaridad en el plano, tal que para cualquier pareja polar  $P \leftrightarrow p$ , se cumple:*

i)  $P \in p \iff P \in \mathcal{C}$ .

ii) Si  $P \notin p$ , la reflexión armónica  $\rho_{P,p}$  deja invariante a  $\mathcal{C}$ .

El Teorema de Polaridad extiende el apareamiento de puntos en una curva armónica con las líneas en su haz tangente (el Teorema 8, de Dualidad Curvas-Haces, es el inciso (i) del teorema) a un apareamiento de todos los puntos y líneas del plano (una polaridad), dándole a la curva armónica mucha simetría (el inciso (ii)): pues el resto de las líneas y los puntos se aparean como espejos y centros que producen simetrías de la curva armónica.

Jean-Victor Poncelet (Francés, 1788 – 1867) es uno de los matemáticos más influyentes para el renacimiento de la geometría proyectiva en el siglo

XIX. Se atribuyen a él, entre otras muchas cosas, establecer la relación de las parejas polares de una cónica con las cuartetos armónicas. El inciso (ii) del Teorema es una reformulación de sus resultados basada en la noción de reflexión armónica. Así que el Teorema de Polaridad, como lo enunciamos, debe atribuirse a Poncelet y von Staudt.

Con la polaridad como herramienta constructiva, podemos demostrar la equivalencia de las dos construcciones de curvas armónicas que tenemos.

#### ESCENA 51. La herramienta “Polaridad” y las dos construcciones de curvas armónicas.

Primero presentamos la herramienta “Polaridad”. Empezamos con una curva armónica general, que llamaremos  $\mathcal{C}$ : la herramienta “Armónica5Pts”, hasta arriba a la izquierda de la columna de herramientas de ProGeo3D, produce a la curva armónica que pasa por 5 puntos (se les señala o bien se producen con la herramienta activa). En su momento, veremos una demostración de por qué funciona. Esta es la forma usual de definir curvas cónicas en los programas de geometría dinámica.

Cambiamos el color de los 5 puntos control para poder ocultarlos en los siguientes pasos; así que aprove-

che para moverlos un poco.

La herramienta “Armonía” se extiende para dar la polaridad inducida por curvas armónicas según el Teorema de Polaridad. Con un punto previamente definido, que llamaremos  $P$ , y la herramienta “Armonía” activa:

- Se arrastra una curva armónica hacia un punto o una línea, para generar la polar o el polo, respectivamente.

En nuestro caso, al arrastrar (cualquier punto en)  $\mathcal{C}$  hacia  $P$  se produce la polar de  $P$  que llamaremos  $p$

$(P \leftrightarrow p)$  y también está pintada de morado. Pronto usaremos la otra posibilidad de arrastrar la curva armónica a una línea para producir su polo.

Obsérvese, moviendo a  $P$ , que hay tres casos:

-Primero,  $P$  está *adentro* de la curva armónica, si su línea polar  $p$  no toca a  $\mathcal{C}$ .

-Segundo,  $P$  está *afuera* de la curva armónica, si su línea polar  $p$  corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos.

-Y tercero, el paso entre los dos anteriores, cuando  $P$  es un punto de la curva, su línea polar  $p$  es tangente a la curva y la toca en ese único punto.

Cuando  $P$  está afuera, se pueden definir los dos puntos de intersección de  $p$  con  $\mathcal{C}$ , digamos que  $A$  y  $B$ , con la herramienta “Intersección”. Y al construir sus líneas polares (repetimos, con la herramienta “Armonía” activa, se arrastra cualquier otro punto en la curva a ellos)... se dibujan las tangentes  $a$  y  $b$ , en  $A$  y  $B$ , que pasan por  $P$  ( $P \in a$  y  $P \in b$ ) pues la incidencia se preserva y  $A \in p$  y  $B \in p$ .

**Con  $P$  adentro** —por favor hágalo— y su línea polar  $p$  afuera sin tocar a  $\mathcal{C}$ , se puede repetir el trazo de círculos de la Escena 44:

Sea  $X$  un punto variable en  $p$ ; llamemos  $y$  a su

línea a  $P$ , esto es,  $y = X \vee P$ . Entonces, el polo de  $y$  es un punto  $Y \in p$  pues la polaridad preserva incidencia y  $P \in y$ . (Para obtener  $Y$ , se arrastró la curva  $\mathcal{C}$  a la línea  $y$  con “Armonía” activa.)

Para un punto libre  $C$ , sea  $Z = C \cdot \rho_{Y,y}$ .

Entonces, la curva que dibuja  $Z$  al correr  $X \in p$  es otra curva armónica  $\mathcal{C}_{P,C}$ , que depende de  $\mathcal{C}$ , y de los puntos  $P$  y  $C$ .

Mantengamos fijo a  $P$ . La familia de curvas armónicas,  $\mathcal{C}_{P,C}$ , que depende de  $C$  “surge” de  $P$  y

concluye con un “cubrimiento” 2-1 sobre su línea polar  $p$ . Y claramente pasa por  $C$ . Al variar  $C$  en  $\mathcal{C}$ , se mantiene en su lugar. Esto viene del punto (ii) en el Teorema, pues se usó a una familia de simetrías de la curva  $\mathcal{C}$  para dibujar la imagen de  $C$ .

También corresponde a un círculo con centro en  $P$  y que pasa por  $C$  según la Escena 44. Lo que se usó ahora como polaridad básica fue la *restricción a la línea*  $p$  de la polaridad de  $\mathcal{C}$ : *el polar de un punto ahí es la intersección con la línea polar*; y esto dió la pareja polar  $X \leftrightarrow Y$  en  $p$ .

Pero además, **si se lleva el punto  $P$  afuera**:  $p$  corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos y ¡la construcción sigue funcionando! De hecho, es justo la construcción-A de la Escena 50 (cambiando el nombre a  $P, p$  por  $Q, q$ ):

Se tiene que  $Y$  es armónico de  $X$  respecto a  $A$  y  $B$ , pues la reflexión armónica  $\rho_{Y,y}$  deja invariante a la curva  $\mathcal{C}$  y a la línea  $p$  que pasa por su centro  $Y$ . Por tanto, intercambia a los puntos  $A$  y  $B$ ; y esto implica que  $A, X, B, Y$  es una cuarteta armónica.

En este caso ( **$P$  afuera**):

- *la restricción de la polaridad a la línea*

*$p$  es la reflexión armónica en su intersección con  $\mathcal{C}$ ; es decir, en  $A, B$ .*

y se le llama *polaridad hiperbólica* en la línea  $p$  (pronto hará sentido el nombre).

En el caso anterior ( **$P$  adentro**):

- *la polaridad inducida en  $p$  no tiene puntos fijos;*

se le llama *polaridad euclidiana* en la línea, pues da lugar a la geometría euclidiana como vimos en la sección anterior. ■

En resumen, lo que diferencia a la construcción de círculos euclidianos (Escena 44) y la construcción-A (Escena 50) es el tipo de polaridad en la línea que parametriza a la familia de reflexiones armónicas que se aplican a un punto fijo.

En la siguiente escena queremos hacer énfasis en algo importante, pero que pasamos muy de prisa en la escena anterior. Veremos primero una construcción análoga a la del “cuarto armónico”, usando la polaridad que induce una curva armónica  $\mathcal{C}$ .

#### ESCENA 52. Polaridad y cuartetos armónicas.

Dada una terna de puntos  $A, B, C$  en  $\mathcal{C}$ , con dos de ellos apareados ( $A, B$  de color rojo).

Sea  $q = A \vee B$ ; sea  $Q$  el polo de  $q$ , y sea

$$D = C \cdot \rho_{Q,q};$$

que es un punto en  $\mathcal{C}$  (pues  $\mathcal{C}$  es invariante bajo la reflexión armónica  $\rho_{Q,q}$  según (ii) del Teorema de Polaridad);  $D$  es el análogo del cuarto armónico para una terna colineal. Por las Escenas 50 y 51:

- La curva de armonía de  $A, C, B, D$  es la curva armónica  $\mathcal{C}$ .

Podemos definir que una cuarteta cíclicamente ordenada de puntos en  $\mathcal{C}$  es *armónica* si el polo de una diagonal incide con la otra diagonal.

Y son justo estas cuartetos armónicas las que la definen como su curva de armonía.

En esta figura, que ya vimos en la Escena 41, todos los elementos nuevos, excepto por el centro  $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ , se obtuvieron por polaridad (con la herramienta “Armonía”). Tiene siete pares polares, y demostramos entonces que sus re-

flexiones armónicas son simetrías de la curva (dan evidencia de la validez del Teorema de Polaridad).

EJERCICIO 87. Reconstruye el último paso, para que sólo se use la herramienta “Punto-Recta” una vez, en vez de la de “Intersección”, y todo lo demás con “Armonía”.

■

### 4.3. Geometría hiperbólica

Un problema clásico de la geometría fue tratar de demostrar el postulado de las paralelas; se creía que era de índole distinta a los otros y que debía ser un teorema, pues de manera experimental se comprobaba su validez. Al intentar demostrarlo negándolo y buscando alguna contradicción, se fue vislumbrando la posibilidad de otras geometrías. Para algunos, esta posibilidad parecía ser una blasfemia pues negaba la evidencia “física”.

Uno de los matemáticos que más influyeron en acabar de establecer la existencia de las geometrías no euclidianas fue el italiano Eugenio Beltrami (1835 – 1900). A él se deben varios modelos de la geometría hiperbólica cuyo desarrollo en abstracto, se atribuye básicamente al húngaro János Bolyai (1802 – 1860) y el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792 – 1856).

La idea de un *modelo* es determinar dentro de otra geometría —en el caso histórico la euclidiana aceptada por todos— a un subconjunto con las propiedades que hereda de su ambiente. Si se acepta

al ambiente y dentro de él vive el modelo: se tiene que aceptar la existencia de lo que se está modelando. Ésta fue la argumentación. Así fue que con ejemplos muy concretos y elegantes, se acabó por zanjar una discusión sobre la pertinencia o no del postulado de las paralelas. Pero también se discutía, en el fondo, lo que son las matemáticas, su relación con la realidad y la validez o pertinencia de la abstracción.

Un ejemplo de modelo es el que hemos visto de la geometría euclidiana metida dentro de la proyectiva.

Vamos a presentar a continuación al llamado *modelo de Beltrami-Klein*, pues Felix Klein lo propuso independientemente de Eugenio Beltrami y casi al mismo tiempo. No vive dentro de la geometría euclidiana clásica sino (como el plano euclidiano en perspectiva) dentro del Plano Desarguesiano, por lo cual, también se le conoce como el *modelo proyectivo* del Plano Hiperbólico. Y a él conduce naturalmente el Teorema de Polaridad de Poncelet-von Staudt junto con el espíritu Kleiniano de lo que es la geometría.

### 4.3.1. El plano y el grupo

#### ESCENA 53. El plano hiperbólico.

Sea  $\mathcal{C}$  una curva armónica fija.

Los *puntos del plano hiperbólico*, que denotaremos  $\mathbb{H}^2$ , son todos los puntos de adentro de  $\mathcal{C}$  (es decir, aquellos cuya línea polar no toca a  $\mathcal{C}$ ).

Y las *líneas* de este plano son la intersección de las líneas de  $\mathbb{D}^2$  con  $\mathbb{H}^2$ . Es decir, para cada punto de afuera,  $Q$ , su polar,  $q$ , toca a  $\mathcal{C}$  en dos puntos y

por tanto, tiene un segmento abierto (sin sus extremos) dentro de  $\mathbb{H}^2$ : ese segmento abierto es una *línea hiperbólica*. Conviene controlarla por sus dos puntos de intersección con  $\mathcal{C}$  para que, en principio, podamos llevarla a cualquier instancia posible. Pero hay que tener claro que sus puntos extremos no son parte de la línea hiperbólica —y los llamaremos sus *puntos límite* o al *infinito*. Usar a estos puntos y a la línea proyectiva que subyace a una línea hiperbólica será crucial para el modelo.

Si consideramos un punto  $P$  en  $\mathbb{H}^2$  que no esté en la línea hiperbólica  $q$ ...

se puede trazar todo un segmento cerrado de líneas hiperbólicas por  $P$  que no tocan a  $q$ . Hay dos especiales que comparten un punto límite con  $q$ : son sus *paralelas*. Pero además, hay un segmento abierto de líneas por  $P$  que no tocan a  $q$  ni a sus extremos: se dice que son *ultraparalelas* con  $q$ . Se parametrizan de manera natural por los puntos no hiperbólicos de  $q$  con su punto de intersección. ■

En esto de que la paralela no es única, de que el axioma de las paralelas no se cumple, es donde se establece una gran diferencia con la geometría

euclidiana. Pero veremos que califica tanto como la euclidiana en los otros aspectos de la geometría clásica; pues viene equipado con un grupo, como torta bajo el brazo, por el Teorema de Polaridad.

#### ESCENA 54. Reflexiones hiperbólicas.

Dada una línea hiperbólica  $q$ , sea  $Q$  su polo. La *reflexión hiperbólica* en  $q$  (o simplemente la *reflexión* en  $q$  si el contexto es claro) es la reflexión armónica

$$\eta_q = \rho_{Q,q};$$

donde  $\eta$ , “eta”, es la letra griega que más se acerca a nuestra aache de “hiperbólico”. Por el Teorema de Polaridad, (5.2.3),  $\eta_q$  deja invariante a  $\mathcal{C}$ , y también a su *interior*  $\mathbb{H}^2$ ; por tanto, se le puede considerar como transformación de ellos.

Hemos añadido un punto libre  $X$  y su imagen bajo la reflexión en  $q$ ,  $X' = X \cdot \eta_q$ , para jugar con su efecto.

Las líneas hiperbólicas que pasan por  $Q$  son las *perpendiculares* u *ortogonales* a  $q$ ; juntas forman su *haz ortogonal* y  $\eta_q$  las manda en sí mismas intercambiando sus dos *rayos* (o lados) a partir de

su intersección con el espejo; las “voltea” ahí.

Nótese que actuando dentro de  $\mathbb{H}^2$ , y de  $\mathcal{C}$ , una reflexión hiperbólica invierte la orientación, aunque como transformación de  $\mathbb{D}^2$  decir esto no tenga sentido. ■

El *grupo de transformaciones hiperbólicas*,  $\mathcal{H}ip_2$ , es el grupo generado por todas las reflexiones hiperbólicas. Es decir,

$$\mathcal{H}ip_2 = \langle \eta_q \mid q \text{ línea en } \mathbb{H}^2 \rangle.$$

Y el *grupo de movimientos hiperbólicos*,  $\mathcal{H}ip_2^+$ , es su subgrupo que preserva orientación, o bien, que consiste en las palabras de longitud par.

Hay que resaltar que en este grupo de movimientos están todas las reflexiones armónicas en pares polares cuyo centro está adentro (las medias vueltas); pues, por el Lema del Triángulo de Klein, se obtienen como la composición de cualquier par de reflexiones en líneas perpendiculares en el centro. Por lo tanto,  $\mathcal{H}ip_2$  se puede reinterpretar como el subgrupo de  $\mathcal{P}roy_2$  generado por todas las reflexiones armónicas en pares polares no incidentes.

La tentación de pensar que el plano hiperbólico es “chico” porque lo vemos todo de golpe es incorrecta. De hecho, es mucho más “espacioso” que el euclidiano en varios sentidos. En particular, cada cachito cortado por una línea es igual a su complemento: es lo que acabamos de declarar al instaurar sus grupos de transformaciones; cualquier línea lo parte por la mitad (ambos lados son equivalentes).

### 4.3.2. Homogeneidad y subgrupos

Veremos primero que en el plano hiperbólico se tienen ciertas construcciones “clásicas”.

**ESCENA 55. Bisectrices, mediatriz y perpendicular común.**

Consideremos dos líneas hiperbólicas que no comparten puntos al infinito. Queremos ver que se puede mandar una en la otra. Aunque haya dos casos (que se corten o que sean ultraparalelas), su

simetría se parece pues depende básicamente de sus cuatro puntos límite.

Afirmamos que *las líneas polares de los tres puntos diagonales de un cuadrángulo inscrito en  $\mathcal{C}$  son precisamente sus lados opuestos.*

Para verlo, considérese uno de esos puntos y una de las dos líneas por él. La línea corta a  $\mathcal{C}$  en dos puntos (del cuadrángulo) a los cuales debe trasponer la reflexión armónica con ese centro y su línea polar como espejo, por lo cual...

dicho espejo pasa por el cuarto armónico de ese punto derivado respecto a los dos de  $\mathcal{C}$  (es uno de los seis puntos morados). Esto determina dos puntos en cada línea polar...

y entonces las polares coinciden con los lados del triángulo derivado. Dos de ellas son líneas hiperbólicas y la tercera es la polar de su punto de intersección.

Que en el triángulo derivado, cada vértice sea el polo de su lado opuesto, implica que el grupito de Klein de este triángulo es subgrupo de  $\mathcal{H}ip_2$ ; y los cuatro puntos de  $\mathcal{C}$  son una de sus órbitas.

Regresando a las dos líneas hiperbólicas con

que empezamos: sea  $O$  su punto de intersección. Tenemos dos casos que considerar.

**Cuando  $O$  está adentro** (como en la posición inicial). Este es el caso en que **las líneas hiperbólicas se cortan** (su intersección como líneas proyectivas cae en  $\mathbb{H}^2$ ). Entonces las dos líneas hiperbólicas del triángulo derivado son sus *bisectrices*. Reflejan a las dos líneas con sus dos posibles orientaciones; es decir, si se les orienta, una de las dos bisectrices las refleja preservando orientación.

**Cuando  $O$  esta afuera** (deslice un punto límite de las líneas para que cruce a otro) es el caso en que las dos líneas son **ultraparalelas**. Entonces, la línea hiperbólica del triángulo derivado que corta a ambas es la única *perpendicular común*. La otra es la *mediatriz*: el espejo que las refleja. Además, el punto del triángulo derivado que cae adentro, es su *punto medio*: la media vuelta en él intercambia las líneas.

Ya se ven aquí diferencias esenciales con la geometría euclidiana. Si bien, en el plano euclidiano las líneas paralelas también tienen un único espejo que las refleja, cualquier media vuelta en uno de sus puntos las intercambia y cualquier perpendicular a una lo es de la otra; en el plano hiperbólico estos son únicos. Pero a la vez, ya tenemos las herramientas para demostrar que la geometría hiperbólica es equivalente a la euclidiana en términos de cómo actúa su grupo de movimientos. Antes de pasar a ello, veamos el caso inestable:

Si dos extremos de las líneas coinciden, las líneas son paralelas (por favor, haga lo propio en la escena). El punto  $O$  se vuelve ese punto en su viaje

entre afuera y adentro. Dos de las líneas del triángulo diagonal se hacen la tangente en  $O$  y el otro lado se vuelve su *mediatriz* pues las refleja... es la línea polar de la intersección de la línea por los otros dos puntos límites con la tangente. ■

Pasemos ahora a demostrar el equivalente del Teorema 9.

**Teorema 10.** *El grupo de movimientos hiperbólicos es transitivo en rayos.*

ESCENA 56. Transitividad en rayos hiperbólicos y subgrupos distinguidos.

Empezemos con la prueba del Teorema.

**Demostración.** Consideremos dos rayos hiperbólicos, uno rojo con origen  $A$  y uno azul con origen  $B$ . Veremos que se puede mandar uno en el otro por un movimiento hiperbólico como en el caso euclidiano.

La mediatriz entre los orígenes (que es la mediatriz entre las perpendiculares a la línea por ellos)

refleja al rayo rojo en uno (rosa) con origen  $B$ .

La bisectriz que hace de espejo entre los dos rayos con origen  $B$ , completa el trabajo: ...

la composición de las reflexiones en la mediatriz y la bisectriz mencionadas, llamémosla  $\sigma$ , manda al rayo rojo en el azul y por estar en  $\mathcal{H}ip_2^+$ , completa la demostración del Teorema.  $\square$

Pero la contundencia visual de la escena deja aún mucho que desear. Sea  $O$  la intersección de los espejos —si  $O \in \mathbb{H}^2$  (como en la posición inicial),  $\sigma$  es una rotación, y si está afuera es una traslación. Para ver con nitidez que  $\sigma$  hace lo que debe, vamos a movernos continuamente en el estabilizador de  $O$  en  $\mathcal{H}ip_2^+$ , que denotamos  $\mathcal{H}ip_2^+(O)$  en la página 155, y que es el subgrupo de las transformaciones de  $\mathcal{H}ip_2^+$  que dejan fijo a  $O$ .

Sean:  $o$  la línea polar de  $O$ ;  $\ell = A \vee O$ ;  $x$  una línea variable por  $O$  controlada por un punto libre en  $o$ ;  $X \in o$  su polo, y

$$\sigma_x = \eta_\ell \cdot \eta_x = \eta_\ell \cdot \rho_{X,x} \quad (4.3)$$

(escribimos la segunda igualdad pues será necesaria cuando  $x$  no sea línea hiperbólica). El rayo mo-

rado es la imagen del rojo bajo  $\sigma_x$ , y se mueve del rojo al azul cuando  $x$  se mueve de  $\ell$  (pues  $\sigma_\ell$  es la identidad) a la mediatriz (cuando  $\sigma_x$  se vuelve  $\sigma$ ).

Para analizar los distintos casos que se tienen, conviene dibujar la curva  $\mathcal{C}' = \{A \cdot \sigma_x \mid x \ni O\}$  (verde oscura que pasa por  $A$  y por  $B$ ) y a la familia de rayos que son imagen del rojo bajo  $\sigma_x$ .

Si  $O \in \mathbb{H}^2$  (**adentro** como en la posición inicial),

$$\mathcal{H}ip_2^+(O) = \{\sigma_x \mid x \ni O\} \subset \mathcal{H}ip_2^+$$

es el *grupo de rotaciones* con centro en  $O$ , que es isomorfo al grupo circular  $\mathbb{S}^1$  (pág. 158). La curva armónica  $\mathcal{C}'$  es la órbita de  $A$  bajo ese grupo ( $\mathcal{C}' = A \cdot \mathcal{H}ip_2^+(O)$ ) y, para la geometría hiperbólica, es el *círculo* con centro en  $O$  que pasa por  $A$ . Además, se distingue una tercera curva armónica más adentro: es el contorno del haz armónico que es la órbita de las líneas soporte de los rayos. Anime al punto libre  $x \wedge o$  que controla a  $x$  para ver cómo gira el rayo morado y pasa por los originales como debe.

Gire los rayos para llevar  $O$  **afuera** (después veremos el caso límite cuando  $O$  está en la curva). Entonces, su polar  $o$  es una línea hiperbólica y

$$\mathcal{T}_o = \{\sigma_x \mid x \text{ línea hiperbólica por } O\}$$

es el *grupo de traslaciones* de  $o$ , pues  $\sigma_x$  es la composición de dos reflexiones en espejos perpendiculares a  $o$  (que son  $\ell$  y  $x$ ). Es isomorfo a  $\mathbb{R}$  y está parametrizado por  $x \wedge o$  dentro de  $\mathbb{H}^2$ . Pero no es todo  $\mathcal{H}ip_2^+(O)$  que aún tiene sentido pues  $\mathcal{H}ip_2^+$  actúa en todo  $\mathbb{D}^2$ . La órbita  $A \cdot \mathcal{T}_o$  es un lado de  $o$  (en el cual está  $A$ ) de la curva armónica  $\mathcal{C}'$ .

En la figura aparece mas pues  $x \wedge o$  corre por todo  $o$ . Cuando la línea  $x$  está afuera (su polo  $X$  está en  $\mathbb{H}^2$ ), se tiene que  $\sigma_x = \eta_\ell \cdot \rho_{X,x}$  (que así se definió en (4.3)) invierte orientación pues es composición de la reflexión hiperbólica  $\eta_\ell$  con la media vuelta en  $X \in \mathbb{H}^2$  (es un *pasó* en  $o$ ); se dibuja entonces el cachete de  $C'$  que no tiene a  $A$ . Y tampoco a  $B$ : intente mover los datos para que  $A$  y  $B$  queden en distintos lados de la línea  $o$ . ¡No se puede! pues  $\sigma$  es una traslación.

Si dibujamos la familia de rayos que se obtienen al aplicar las medias vueltas  $\rho_{X,x}$  al rayo rojo, también se obtiene el otro lado de  $C'$  aplicando a  $A$  elementos de  $\mathcal{H}ip_2^+$ , pero los rayos van en distinta dirección.

Los movimientos hiperbólicos que mandan a la línea  $o$  en sí misma (que también podemos llamar el *estabilizador* de  $o$  en  $\mathcal{H}ip_2^+$ , y denotar  $\mathcal{H}ip_2^+(o) = \mathcal{H}ip_2^+(O)$ ) son isomorfos a  $\mathcal{I}so(\mathbb{R})$ ; esto se puede escribir

$$\mathcal{H}ip_2^+(o) \cong \mathcal{I}so(\mathbb{R}).$$

Puesto que  $o$  parte a  $\mathbb{H}^2$  en dos pedazos, las traslaciones son las que los dejan (como lados) en su lugar y preservan la orientación de  $o$ , mientras que los medios giros intercambian los lados e invierten la orientación de  $o$ . Habíamos visto que topológicamente  $\mathcal{I}so(\mathbb{R})$  es dos copias ajenas de la línea real  $\mathbb{R}$ ; en la órbita de  $A$  se expresan como los dos lados de  $C'$  (sin sus dos puntos en  $C$  en los que comparten tangentes). Esta curva es la *equidistante* de la línea hiperbólica  $o$ , pues cuando se define la *distancia* en  $\mathbb{H}^2$  para que  $\mathcal{H}ip_2^+$  sea su grupo de

isometrías (que se puede, aunque no lo haremos) son los puntos a la misma distancia de  $o$  que  $A$ . ■

Esto describe tres tipos de subgrupos unidimensionales de  $\mathcal{H}ip_2^+$ . Los de *rotaciones*, isomorfos a  $\mathbb{S}^1$ , que fijan a un punto interior y sus órbitas son los círculos hiperbólicos; los de *traslaciones*, que dentro del plano hiperbólico mueven rígidamente a una línea en sí misma preservando su orientación y, añadiéndole las medias vueltas en sus puntos, se obtiene el estabilizador de la línea. Estos dos últimos son isomorfos a  $\mathcal{I}so^+(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$  e  $\mathcal{I}so(\mathbb{R})$  respectivamente.

Nos falta describir otro tipo de subgrupo de  $\mathcal{H}ip_2^+$ : los que dejan fijo a un punto de  $\mathcal{C}$ . Conviene verlos en una construcción aparte pues como son *inestables* o de transición, cualquier movimiento lo cambia de manera esencial, brincaría a alguno de los anteriores.

#### ESCENA 57. Traslaciones horocíclicas.

Supongamos que  $O$  cae en  $\mathcal{C}$  (en un punto límite de  $\mathbb{H}^2$ ). Las líneas  $\chi$  que pasan por  $O$  se parametrizan por su polo  $X$  en la tangente o a  $\mathcal{C}$  en  $O$ . Sea  $\sigma_\chi = \eta_\ell \cdot \eta_\chi$ , donde  $\ell = A \vee O$  y  $A \in \mathbb{H}^2$ .

Entonces el estabilizador de  $O$  en  $\mathcal{H}ip_2^+$  es

$$\mathcal{H}ip_2^+(O) = \{\sigma_\chi \mid X \in o, X \neq O\}.$$

Hemos dibujado a un rayo rojo con origen  $A$  y a su imagen bajo  $\sigma_\chi$  (morado)...

A las transformaciones,  $\sigma_\chi$  se les conoce como *traslaciones horocíclicas* y la órbita  $A \cdot \mathcal{H}ip_2^+(O)$  se le llama *horociclo*. Aunque en abstracto sean también isomorfos a los números reales con la suma, estos grupos actúan de distinta manera que

los de traslaciones. Esto se ve muy nítido por su acción en la curva armónica  $\mathcal{C}$ : ahí las traslaciones horocíclicas tienen un punto fijo  $O$ , y su otra órbita es todo  $\mathcal{C} \setminus \{O\}$ , mientras que los grupos de traslaciones actúan con dos puntos fijos en  $\mathcal{C}$  y los dos segmentos en que estos parten a  $\mathcal{C}$  son dos órbitas distintas.

Por último, es interesante observar de la figura y moviendo al rayo, que los horociclos son curvas armónicas “*doblemente tangentes*” a  $\mathcal{C}$ , no sólo son tangentes sino que tienen ahí la misma “*curvatura*”, se pegan muy rápido (en la escena anterior se ve que cuando  $O$  tiende a  $\mathcal{C}$  desde afuera, que dos puntos que compartían tangentes se colapsan en uno). Pero precisar esto nos rebasa, entra en el campo de la *geometría diferencial*. ■

EJERCICIO 88. Repite la escena anterior, pero con  $O$  libre; es decir, no en la curva  $\mathcal{C}$ . La curva que traza  $A$  al moverse  $X$ , es el *círculo* con centro en  $O$  y que pasa por  $A$  cuando  $O \in \mathbb{H}^2$ ; y cuando está afuera es la *equidistante* de su línea polar  $o$ , que pasa por  $A$ .

EJERCICIO 89. Describe las curvas equidistantes euclidianas a una línea. Son muy distintas a las hiperbólicas.

EJERCICIO 90. Describe las cuatro componentes de  $\mathcal{H}ip_2(O)$  y argumenta por qué se puede decir que se comportan como un grupo de Klein.

EJERCICIO 91. Describe la órbita de un punto  $A \in \mathbb{H}^2$  de las cuatro componentes de  $\mathcal{H}ip_2(O)$ .

EJERCICIO 92. Describe  $\mathcal{H}ip_2(O)$  cuando  $O \in \mathbb{H}^2$  y cuando  $O \in \mathcal{C}$ .

### 4.3.3. Movimientos hiperbólicos

Hemos descrito teóricamente el grupo de movimientos hiperbólicos. Cerraremos el ciclo presentando a este grupo en una escena análoga a la de movimientos euclidianos rígidos en perspectiva (Escena 33) que motivó el desarrollo de la teoría.

#### ESCENA 58. Movimientos hiperbólicos.

Con una curva armónica  $\mathcal{C}$  dada, tenemos dos controles: uno es un punto  $O$  en el plano hiperbólico,

y el otro, que se mueve en un círculo, da una dirección que se pasa como paralela euclidiana a  $O$  (la línea roja). De esta manera, el control de la dirección de la línea se puede animar para ver rotaciones. Nótese que son los controles análogos a los de la Escena 33.

Se traza la ortogonal a la línea roja que pasa por  $O$  (pintada de azul) y...

... sus dos bisectrices. Esto nos da los cuatro espejos de un grupo diédrico  $D_4$  centrado en  $O$ ; es decir las líneas están en ángulos de  $\frac{\pi}{4}$  o  $45^\circ$ .

El resto de la construcción consiste en trazar los segmentos, o líneas hiperbólicas, del octágono que determinan sus puntos límite en  $\mathcal{C}$ .

Juegue con los movimientos hiperbólicos y su extensión a todo el Plano Desarguesiano.

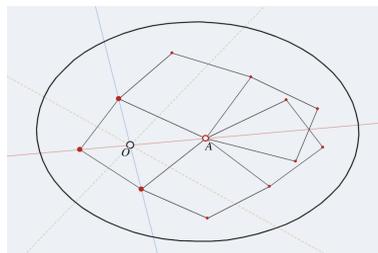
En este paso se muestran únicamente los trazos dentro del Plano Hiperbólico, para apreciar la acción en él. También resulta interesante mover a la curva armónica; para lo cual, hemos activado sus cinco puntos de control.

Hay quien ve tridimensionalidad cuando se mueve esta figura. Se debe a que interpretamos

tres dimensiones a partir de movimientos proyectivos de una figura plana. Así que al percibirlos, nuestro cerebro intuye que debe haber tridimensionalidad, pero no acaba de decidir bien a qué cuerpo sólido corresponden, y entonces sólo da una sensación sin acabar de concluir con precisión qué produce esta imagen en movimiento. En fin, en éste modelo de Beltrami-Klein de la geometría hiperbólica, sus movimientos resultan ser cercanos a, o compatibles con, nuestro aparato perceptivo.

En cierta forma, nos resultan “orgánicos” o “naturales”.

EJERCICIO 93. Construye una escena para ver experimentalmente que los ángulos de los cuadrados hiperbólicos son menores que uno recto (que  $\frac{\pi}{2}$  o  $90^\circ$ ) y que disminuyen con su tamaño. a) Empieza con dos puntos:  $O$  que será su centro y  $A$  que será uno de sus vértices. b) Traza la ortogonal a  $\overline{AO}$  en  $O$  y las bisectrices a estas dos líneas. c) La órbita de  $A$  bajo el grupo diédrico  $D_4$  que generan las cuatro reflexiones es un cuadrado hiperbólico regular. d) Refléjalo en los dos lados de  $\overline{AO}$ ; eso da otros dos cuadrados con vértice en  $\overline{AO}$ . e) Refléjalos de nuevo en su arista por  $\overline{AO}$ . f) Tómale una foto a los cinco cuadrados con ángulo  $\frac{2\pi}{5}$ . Aunque parezcan abarcar mucho espacio de  $\mathbb{H}^2$  apenas son el principio de un mosaico regular que cubre todo.



#### 4.3.4. Dos teoremas acerca de $\mathcal{P}roy_1$

Antes de describir la tercera geometría plana, vamos a ver dos teoremas clásicos que ya tenemos al alcance de la mano.

El primero, relaciona a dos de los grupos que hemos definido.

**Teorema 11.** *La acción del grupo hiperbólico en la curva armónica límite de  $\mathbb{H}^2$  es equivalente a las proyectividades de la línea proyectiva  $\mathbb{D}^1$ . En términos de grupos,*

$$\mathcal{H}ip_2 \cong \mathcal{P}roy_1.$$

**Demostración.** La prueba consiste en dar una biyección explícita de la curva armónica,  $\mathcal{C}$ , con una línea proyectiva, de tal manera que las transformaciones en ambos grupos se correespondan.

**ESCENA 59. Correspondencia tangencial.**

Dado un punto  $P$  en la curva armónica  $\mathcal{C}$ , vamos a dar una correspondencia biyectiva (o apareamiento) entre sus puntos y los de  $p$ : la línea tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$  (o bien, la polar de  $P$ ).

Primero, a  $P \in \mathcal{C}$  le corresponde  $P \in p$ . Y en general, dado un punto  $X \in \mathcal{C}$  distinto de  $P$ , sea  $x$  su línea polar y sea

$$X' = p \wedge x \in p.$$

De tal manera que la polar de  $X'$  es  $x' = P \vee X$ .

Esto es claramente un apareamiento, que llamaremos la *correspondencia tangencial* de  $\mathcal{C}$  con su línea tangente  $p$ . ■

Ahora, veremos que los generadores de los gru-

pos se corresponden.

**ESCENA 60. Cuartetos armónicas van en cuartetos armónicas.**

Un generador de  $\mathcal{H}ip_2$  es la reflexión hiperbólica  $\eta_\ell$ , donde  $\ell$  es una línea hiperbólica, es decir,  $\ell = A \vee B$  con  $A, B \in \mathcal{C}$  puntos distintos. Queremos demostrar que  $\eta_\ell$  corresponde a la reflexión armónica  $\rho_{A',B'}$  en  $p$ ; donde, siguiendo a la escena anterior, denotamos con prima a la imagen de un punto bajo la correspondencia tangencial.

Dado  $X \in \mathcal{C}$ , sea

$$Y = X \cdot \eta_\ell.$$

Puesto que  $A, X, B, Y$  es una cuarteta armónica en  $\mathcal{C}$ , su curva de armonía es la misma  $\mathcal{C}$  (Escena 52). Entonces, sus cuatro tangentes tienen como haz de armonía al haz tangente de  $\mathcal{C}$  (Escena 40). Como  $p$  es una de sus líneas, por la definición de haz de armonía (pág. 133),  $p$  las corta en una cuarteta armónica  $A', X', B', Y'$ . Es decir,

$$Y' = X' \cdot \rho_{A',B'}.$$

Puesto que  $X \in \mathcal{C}$  es arbitrario, esto demuestra que la transformación  $\eta_\ell$  de  $\mathcal{C}$  corresponde bajo la correspondencia tangencial a la transformación  $\rho_{A',B'}$  de  $p$ . Al variar  $A, B$  tenemos que los generadores de los grupos coinciden como funciones al identificar los conjuntos base. Por tanto, los grupos son isomorfos (en abstracto, son el mismo).  $\square$

El segundo teorema es la versión unidimensional del Principio de 4 en 4, que describimos al principio del Capítulo 3 y que, por lo que acabamos de probar, podemos ver en una nueva perspectiva.

**Teorema 12** (3 en 3). *Dadas dos ternas de puntos en una línea, existe una proyectividad que manda una en la otra.*

**Demostración.** Podemos pensar a la línea proyectiva como la curva armónica  $\mathcal{C}$ , límite del plano hiperbólico. La idea será usar la transitividad en rayos hiperbólicos (Teorema 10) por lo cual, hay que relacionar ternas en  $\mathcal{C}$  con rayos en  $\mathbb{H}^2$ .

**ESCENA 61. Triangulos ideales a rayos.**

Dada una terna de puntos  $A, B, C$  en  $\mathcal{C}$ , se le llama *triángulo ideal* a las líneas hiperbólicas que definen y que son dos a dos paralelas.

Los tres puntos tienen sus líneas tangentes y vale la pena hacer un paréntesis para observar que:

- *Tres puntos de  $\mathcal{C}$  forman una configuración de Ceva en el triángulo de sus líneas tangentes.*

Para verlo, consideremos la línea  $\ell$  de  $A$  al vértice opuesto en el triángulo de tangentes. Su reflexión hiperbólica asociada,  $\eta_\ell$ , transpone a  $B$  y  $C$  y a sus tangentes. Por tanto, intercambia las líneas de  $B$  y  $C$  a su respectivo vértice opuesto en el triángulo tangente. Pero una línea y su imagen bajo una

reflexión armónica concurren con el espejo.

El punto de Ceva,  $O$ , es el centro de simetría del triángulo ideal, y sus tres *alturas* (ortogonales a los lados que cruzan) lo reflejan en sí mismo. El punto  $O$  es el punto de  $\mathbb{H}^2$  que ve a los tres vértices del triángulo ideal en ángulos iguales de  $\frac{2\pi}{3}$ , o  $120^\circ$ .

Puesto que la terna tiene un orden implícito, podemos escoger su primer punto y asociarle el rayo que determina su altura, es decir, de  $H$  a  $A$ , donde  $H = \ell \wedge (B \vee C)$ , que llamamos su rayo-altura. ■

### ESCENA 62. De rayos a triángulos ideales.

Y al revés, si tenemos un rayo hiperbólico de  $H \in \mathbb{H}^2$  a  $A \in \mathcal{C}$ : ...

consideramos la línea soporte  $(A \vee H)$  y...

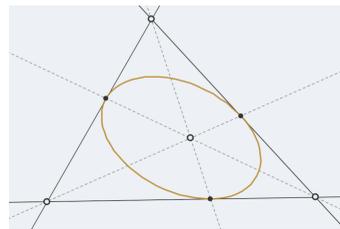
su línea hiperbólica ortogonal en  $H$  determina el lado opuesto a  $A$  de un triángulo ideal, con los vértices distintos de  $A$  sin ordenar. ■

La demostración del Teorema 12 ya está a la mano. Dadas dos ternas  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  en  $\mathcal{C}$ . Por el Teorema 10, hay una transformación  $\sigma$  de

$\mathcal{H}ip_2^+$  que manda al rayo-altura de la primera en el de la segunda. Por tanto, manda  $A$  en  $A'$  y a la línea hiperbólica por  $B$  y  $C$  en la línea hiperbólica por  $B'$  y  $C'$ .

Si  $\sigma$  manda  $B$  a  $B'$ , y  $C$  a  $C'$ , ya acabamos. Si no, los manda al revés ( $B$  a  $C'$  y  $C$  a  $B'$ ); entonces, al componer  $\sigma$  con la reflexión en la altura por  $A'$  se logra lo que queríamos. En este caso, se invierte la orientación y en el primero, se preserva. □

EJERCICIO 94. Una configuración de Ceva se determina por un triángulo y su punto de Ceva en el interior. Con estos datos iniciales, construye a la curva armónica que tiene a los lados como tangentes con sus puntos de contacto en los de la configuración. Demuestra que la línea de Menelao armónica de la configuración de Ceva es la polar (respecto a la curva armónica) del punto de Ceva.



### 4.3.5. La unicidad y sus implicaciones

Teoremas de existencia como el anterior (Teo. 12) o el de transitividad en rayos (Teo. 10) que fue la base de su demostración, incitan a preguntarse la unicidad de aquello que se exhibió, pues es común que se enuncien juntos como “teoremas de existencia y unicidad”. Pero aquí postergamos la unicidad pues su demostración es de una índole enteramente diferente a la existencia que probamos. De hecho, la unicidad se acerca a ser axioma y en algunos libros, como el de H.S.M. Coxeter [4] que ha sido muy influyente, se le considera como tal. En la Parte III abundaremos en esto.

Supongamos que no se cumple la unicidad del Teorema de 3 en 3 (Teo. 12). Entonces tendríamos dos transformaciones hiperbólicas distintas  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}ip_2$  que mandan una terna de  $\mathcal{C}$  en otra. Esto implica que  $\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1}$  fija a una terna de puntos pero no es la identidad. Así que la unicidad en el Teorema de 3 en 3 (Teo. 12) se sigue de:

**Proposición 1** (Unicidad 3-3). *La única proyectividad de  $\mathbb{D}^1$  que fija tres puntos es la identidad.*

Lo hemos llamado *Proposición* y no *Teorema*, pues la argumentación que daremos, aunque es intuitivamente clara, pierde formalidad pues depende de hechos ajenos al contenido del libro.

**ESCENA 63. Red armónica (demostración).**

Otra vez, gracias al Teorema 11, podemos pensar a la línea proyectiva,  $\mathbb{D}^1$ , como la curva  $\mathcal{C}$  de puntos límite de  $\mathbb{H}^2$  y verla toda de golpe. Supongamos

que  $\sigma \in \mathcal{H}ip_2$  deja en su lugar a tres puntos de  $\mathcal{C}$ , queremos probar que entonces es la identidad.

Puesto que  $\sigma$  preserva armonía, ... se tiene que el cuarto armónico de cualquiera de los tres puntos respecto a los otros dos (su reflexión hiperbólica respecto al lado opuesto del triángulo ideal) también se queda fijo bajo  $\sigma$ .

Esto nos da seis puntos fijos de  $\sigma$ , y el mismo argumento...

implica que los reflejados en los seis lados del hexágono ordenado de puntos fijos, también son puntos fijos de  $\sigma$ ; y ya llevamos 30.

A estos los podemos reflejar en cualquier pareja de ellos, ...

por ejemplo, de nuevo en uno de los lados del hexágono y da 24 puntos más. Y así al seguir iterando este proceso se siguen produciendo y reproduciendo nuevos puntos fijos de  $\sigma$ .

Al conjunto de puntos que se obtienen a partir de los tres primeros por una serie de reflexiones armónicas en parejas de ellos y aplicadas a otro ya obtenido así, se le llama la *red armónica* de la terna original.

Lo que hemos visto es que si  $\sigma$  fija a una terna, entonces fija a toda su red armónica; se comporta como la identidad en ella.

Para deducir de esto que  $\sigma$  es la identidad se necesitan dos cosas: que la red armónica sea *densa* y que  $\sigma$  sea *continua*. Ambos conceptos topológicos.

Que la red armónica es densa se sigue de que no tiene huecos: dos puntos en ella tienen “lo mismo” de los dos lados pues la reflexión en el par intercambia sus lados (la red armónica es invariante ba-

jo reflexiones en parejas). Y la continuidad se sigue de que los generadores del grupo son continuos. ■

Esta sería la demostración y debe ser claro ahora que es de otra índole. Necesitaríamos ahondar en nociones topológicas (qué es un conjunto denso y qué es la continuidad), y a mediados del siglo XIX apenas se estaban precisando estas cuestiones. La intuición nos dice que la prueba es válida, pero hacerlo con formalidad matemática es muy diferente. Por el momento (aunque sea cierto en el Espacio Desarguesiano que hereda la topología local y la noción de continuidad del Espacio Euclidiano), lo podemos tomar como *Postulado* y no haremos uso formal de él fuera de este capítulo. Lo volveremos a discutir en la Parte III junto con otros enunciados equivalentes. Por el momento, queremos señalar algunas de sus implicaciones cercanas a lo que ya hemos hecho:

*Con la composición de tres reflexiones o menos, se obtiene cualquier elemento de  $\mathcal{H}ip_2$  (y de  $\mathcal{P}roy_1$ ), pues con tres ya logramos mandar a una terna en cualquier otra. Así que las proyectividades de  $\mathbb{D}^1$  son de los siguientes tipos: tres que preser-*

*van orientación: rotaciones (sin puntos fijos), traslaciones horocíclicas (con un solo punto fijo) y traslaciones (fijan dos puntos) que se obtienen como composición de dos reflexiones; y las que invierten orientación son las reflexiones y los pasos (ambas con dos puntos fijos) y estas últimas se obtienen como reflexión en una línea seguida de dos reflexiones en líneas perpendiculares. De esta lista, para la geometría euclidiana plana solamente hay que eliminar a las traslaciones horocíclicas.*

## 4.4. Geometría esférica

La geometría euclidiana clásica en dimensión 3 está asociada con una geometría rígida en el Plano Desarguesiano,  $\mathbb{D}^2$ , pensado como el plano al infinito en  $\mathbb{D}^3$ . Ésta es la tercera geometría rígida plana, que, a su vez, está naturalmente asociada con la geometría clásica de la esfera; esa que llevó a los griegos a considerarla como la *forma perfecta*.

### 4.4.1. Polaridades euclidianas en el Plano Desarguesiano

En § 4.1.1, a partir de una polaridad en una línea horizonte, dedujimos la geometría euclidiana vista en perspectiva; en particular, se obtuvo una noción de perpendicularidad. Y también funciona al revés: si tenemos una noción de perpendicularidad en un plano afín, se obtiene una polaridad en su horizonte (la que apareja los puntos de fuga de direcciones perpendiculares). Veremos a continuación que este hecho se generaliza bien a la tercera dimensión.

ESCENA 64. Polaridad euclidiana en  $\mathbb{D}^2$ .

Consideremos un plano,  $\Delta$ , dentro del Espacio Desarguesiano y un punto  $O$  fuera de él.

Dado un punto  $A$  en el plano  $\Delta$ , definimos su *línea polar* en  $\Delta$ , que denotamos  $\alpha$ , como la intersección con  $\Delta$  del plano ortogonal a la línea  $OA$  en el punto  $O$ .

Esta asignación de puntos a líneas en  $\Delta$  es una biyección. Efectivamente, una línea en  $\Delta$  genera un plano con  $O$  y la línea ortogonal a ese plano en  $O$

corta a  $\Delta$  en el *polo* correspondiente. Además:

- *ningún punto incide en su línea polar.*

A una polaridad que cumple esta propiedad se le llama *euclidiana*. En contraste con las asociadas a curvas armónicas en las que existen puntos incidentes con su polar y que se llaman polaridades *hiperbólicas* por la geometría asociada a ellas.

El nombre de “polaridad” que ya hemos usado bastante, viene del hecho de que si se considera una esfera alrededor de  $O$  y la “cubierta” 2-1 sobre  $\Delta$  (que vimos en § 2.3.2), la polaridad se *levanta* al apareamiento entre “ecuadores” (que parten la esfera por mitad y son las *líneas esféricas*) con sus “polos” que son la pareja antípoda más lejana posible al ecuador (los *polos* norte y sur del *ecuador* en la tierra son los que propician el término).

Si tomamos otro punto  $B \in \Delta$  y llamamos  $b$  a su línea polar (ambos de color rojo), entonces la intersección  $C = a \wedge b \in \Delta$  tiene como polar  $a \dots$  la línea  $c = A \vee B$ , pues la correspondencia preserva incidencia (es una polaridad) ya que la hemos definido usando la ortogonalidad euclidiana de líneas y planos.

Si se lleva el punto  $B$  a la línea  $a$  (o bien,  $A$  a  $b$ ) se obtiene lo que llamaremos una *terna ortogonal*: un triángulo  $ABC$  en el que los vértices son polos de sus lados opuestos, pues se dice que dos líneas son *ortogonales* si el polo de una está en la otra. En la esfera alrededor de  $O$ , se ven los ocho “ortantes” en que tres planos mutuamente ortogonales la cortan.

Obsérvese que la polaridad en  $\Delta$  depende de la posición de  $O$ . ■

Si tomamos como  $\Delta$  al plano al infinito en  $\mathbb{D}^3$ , al que denotaremos  $\mathbb{D}^2$ , obtenemos una polaridad en  $\mathbb{D}^2$  que ya no depende del punto  $O$ . Y se tiene que la polaridad en cualquier otro plano  $\Delta$  según la escena anterior es su proyección desde  $O$ .

Tener esa polaridad en el plano ideal  $\mathbb{D}^2$  es equivalente a poder trazar líneas (planos) perpendiculares a planos (respectivamente, líneas) en  $\mathbb{E}^3$ , que fue lo que hicimos en la escena anterior. Y esta polaridad da lugar a dos grupos:

Primero,  $\mathcal{E}uc_3$  es el grupo de transformaciones de  $\mathbb{D}^3$  (y que actúa en  $\mathbb{E}^3$ ) generado por las reflexiones armónicas con espejo en un plano de  $\mathbb{E}^3$  y centro en el punto ideal (en  $\mathbb{D}^2$ ) que es polo de su línea al infinito (la dirección de sus líneas perpendiculares). Como vimos en § 3.4.1, ésta es la reflexión euclidiana en ese plano (la versión abstracta de lo que hacen los espejos en el mundo real); una isometría para la distancia clásica que invierte orientación. Actuando en  $\mathbb{E}^3 = \mathbb{D}^3 \setminus \mathbb{D}^2$ ,

- $\mathcal{E}uc_3$  es el grupo que define a la Klein la geometría euclidiana tridimensional.

El subgrupo de los *movimientos euclidianos*,  $\mathcal{E}uc_3^+$ , consta de las transformaciones que preservan orientación (las palabras pares). Al componer dos reflexiones se obtienen *traslaciones* (cuando los espejos son paralelos) y *rotaciones* a lo largo de un *eje* que es la línea de intersección de los dos espejos (no paralelos). Sin embargo, aparece un nuevo tipo de movimientos, los *tornillos*; pero no ahondaremos en ello (ver Ejercicios 95 y 96).

Segundo y el que más nos interesa es el *grupo esférico*,  $\mathcal{E}sf_2$  de transformaciones de  $\mathbb{D}^2$  generado por las reflexiones armónicas en *pares polares*. Es decir, si denotamos por  $X \leftrightarrow x$  (mayúsculas y minúsculas) a una polaridad euclidiana fija, se tiene el grupo

$$\mathcal{E}sf_2 = \langle \rho_{X,x} \mid X \in \mathbb{D}^2 \rangle, \quad (4.4)$$

en el que cada línea  $x$  en  $\mathbb{D}^2$  es espejo de una reflexión generadora, que, abusando de la notación, denotaremos  $\rho_x = \rho_{X,x}$  suponiendo que se tiene una polaridad euclidiana fija en el contexto.

Este grupo actuando en  $\mathbb{D}^2$  da lugar a la tercera geometría rígida plana, que se conoce como geo-

metría *elíptica* o *esférica* (quedará claro el porqué del nombre después). Sus líneas son las de  $\mathbb{D}^2$  y no cumple con el quinto postulado: como cualquier par de líneas se corta, simplemente **no** hay líneas paralelas. Así que dado un par no incidente punto-línea: en la geometría hiperbólica hay muchas líneas por el punto que no tocan a la línea, en la euclidiana hay una única y aquí en la esférica, simplemente no las hay.

#### 4.4.2. El plano proyectivo rígido

Queremos ver tres cosas: que en  $\mathbb{D}^2$  se puede definir una polaridad euclidiana de manera intrínseca (sin salirse a  $\mathbb{E}^3$ ); que la métrica que surge del grupo corresponde a saber medir ángulos, y que, tanto como espacio topológico como por nuestra experiencia cotidiana, ya conocemos al grupo.

**ESCENA 65. Las rotaciones son traslaciones.**

Para construir una polaridad euclidiana, partimos de un triángulo  $ABC$  que será una terna ortogonal. Y se necesita algo más de información: ... un cuarto punto,  $D$ , en posición general con los an-

teriores. Éste determina una configuración de Ceva en el triángulo, cuya línea de Menelao,  $\bar{d}$ , será la polar de  $D$ . Las dos cuartetos armónicas que se usaron para trazar a  $\bar{d}$ , determinan polaridades euclidianas en las líneas roja y azul como en la Escena 42, y con ellas se extiende la polaridad a todo el plano.

Dado un punto libre  $P$ , para construir su línea polar,  $p$ , consideramos sus proyecciones (desde el vértice opuesto) a las líneas roja y azul; a ellos,...

les aplicamos la polaridad en la línea (composición de dos reflexiones armónicas) y, finalmente, trazamos la línea por estos puntos: esa debe ser  $p$ .

La propiedad en que se basó esta construcción es que una polaridad euclidiana se restringe a polaridades euclidianas en todas las líneas; y acabamos de ver que con dos de esas polaridades euclidianas lineales definidas, se determina todo.

Verifique que esta polaridad hace lo que pretendíamos, paseando a  $P$  cerca de la cuarteta original. Y que, aunque ciertamente depende de esa cuarteta de puntos, nunca pierde su esencia; siempre es una polaridad euclidiana en la que la polar “le huye” al polo, no hay manera de lograr que incidan.

Recordemos que la polaridad determina (como en las otras dos geometrías) una noción de perpendicularidad: dos líneas son *perpendiculares* u *ortogonales* si el polo de una incide en la otra.

Consideremos ahora una línea variable  $x$  que pasa por  $P$ . Para encontrar su polo,  $X$ : tomamos su intersección con una de las líneas en las que conocemos la polaridad (la roja,  $c$ ); se le aplica ésta, y la línea al punto básico rojo ( $C$ , polo de  $c$ ) corta a

$p$  en  $X$ .

Para visualizar las rotaciones en  $\mathcal{E}f_2$  alrededor de  $P$ , debemos tomar una línea fija por  $P$ ; conviene  $\ell = P \vee C$ , pues tanto ella como su polo  $L$  ya son parte de la construcción. Para cualquier línea  $x$  que incide en  $P$ , sea

$$\sigma_x = \rho_\ell \cdot \rho_x,$$

de tal manera que el grupo de rotaciones en  $P$  es

$$\mathcal{R}_P = \{ \sigma_x \mid x \ni P \}. \quad (4.5)$$

Consideremos ahora a un punto libre  $Y$ , a su imagen bajo  $\sigma_x$  ( $Z = Y \cdot \sigma_x$ ) y a la órbita de  $Y$  bajo el grupo  $\mathcal{R}_P$  ( $Y \cdot \mathcal{R}_P$ ): como en las otras dos geometrías, ésta curva armónica es el *círculo* con centro en  $P$  que pasa por  $Y$ .

El primer hecho que queremos remarcar es que:

- *las rotaciones en  $P$  son las traslaciones en su línea polar  $p$ .*

Pues la composición de dos reflexiones (armónicas) ciertamente deja fijo al punto de intersección de los espejos, pero también manda a la línea por sus centros en ella misma y se comporta como la reflexión en dos de sus líneas perpendiculares. (El haz de líneas perpendiculares a una línea dada es el haz de líneas concurrentes en su polo).

En la escena se puede ver que  $p$  es una de las órbitas de  $\mathcal{R}_P$ ; al mover  $Y$  hacia  $p$ : los círculos cubren 2-1 a la línea y se le aproximan por ambos lados.

Como las rotaciones en un punto son al mismo tiempo traslaciones de su línea polar, resulta natural medir distancias en la línea  $p$  como se miden

ángulos entre líneas por un punto, relacionados a los grupos que generan sus parejas de reflexiones como en la Escena 46. Así,

- *la distancia entre dos puntos de  $p$  es el ángulo entre sus líneas perpendiculares*

(que concurren en su polo  $P$ ).

Para facilitar la medición experimental de ángulos y distancias, hemos añadido tres lados a la trayectoria centrada en  $Y$  de sus imágenes bajo el grupo que genera  $\sigma_x$ .

Cuando  $\chi$  es perpendicular a  $\ell$  (mueve la línea  $\chi$  para que incida en  $L$ ), el ángulo entre  $\chi$  y  $\ell$  es  $\frac{\pi}{2}$ ; las reflexiones  $\rho_\chi$  y  $\rho_\ell$  conmutan y su composición (por el Lema del Triángulo de Klein) es la reflexión en  $p$ . En este caso, la distancia de  $L$  a  $X$  es  $\frac{\pi}{2}$  (como el ángulo entre  $\chi$  y  $\ell$ ) y la rotación  $\sigma_\chi$  es una rotación de  $\pi$  (es decir, media vuelta) en  $P$ ; pero restringida a  $p$  es su identidad. Si  $\chi$  partió de  $\ell$  y continuamente se mueve a su posición actual (que incide en  $L$ ) la línea  $p$  se traslada (bajo  $\sigma_\chi$ ) dentro de sí misma hasta completar una vuelta entera (regresa a su lugar) pero sus dos lados se han intercambiado, pues “su vecindad es una banda de Moëbius”. Así que

- *la longitud de la línea  $p$  es  $\pi$ ,*

pues las rotaciones son del doble del ángulo entre los espejos que la producen. Y si se mueve  $\chi$  un poco más,  $\sigma_\chi$  es un paso (una reflexión en  $p$  seguida de una traslación en  $p$ ); o mejor dicho, esta sería una descripción de  $\sigma_\chi$  pues no hay manera de diferenciar entre traslaciones y pasos (de nuevo porque las líneas no tienen dos lados, es uno sólo y es lo que hace que  $\mathbb{D}^2$  sea no orientable).

Localmente la línea  $p$  tiene dos lados pero globalmente sólo uno. Rotaciones, traslaciones y pasos son lo mismo. ■

En resumen, *todas las transformaciones de  $\mathcal{Esf}_2$  son rotaciones*. De lo cual vamos a deducir:

**Proposición 2.**  *$\mathcal{Esf}_2$  es isomorfo al grupo de movimientos rígidos de la esfera y además, como espacio topológico, es homeomorfo a  $\mathbb{D}^3$ .*

**Demostración.** Consideremos a  $\mathbb{D}^2$  como el plano

ideal en  $\mathbb{D}^3$  (o al infinito de  $\mathbb{E}^3$ ) y a  $\mathcal{Esf}_2$  como el grupo de transformaciones de  $\mathbb{D}^2$  que surge de la ortogonalidad clásica en  $\mathbb{E}^3$  y define la polaridad euclidiana estándar en  $\mathbb{D}^2$  (como en la Escena 64).

Sea  $O \in \mathbb{E}^3$  un punto que jugará el papel de *origen* y sea  $\mathbb{S}^2$  una esfera centrada en  $O$ .

Primero, vamos a extender a todo  $\mathbb{D}^3$  la acción de  $\mathcal{Esf}_2$  (que tiene como espacio base a  $\mathbb{D}^2$ ).

Dado un generador  $\rho_{X,x}$  de  $\mathcal{Esf}_2$ , ver (4.4), sea

$$\rho_X : \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

la media vuelta en el eje  $O \vee X$ . Es decir,  $\rho_X$  es la rotación de  $\pi$  en la línea que pasa por  $O$  con la dirección que define  $X \in \mathbb{D}^2$ . Claramente, en  $\mathbb{D}^2$  se tiene que  $\rho_X$  y  $\rho_{X,x} = \rho_x$  coinciden, es decir,

$$\rho_X|_{\mathbb{D}^2} = \rho_{X,x}.$$

A cada generador de  $\mathcal{Esf}_2$  le hemos asignado un elemento de  $\mathcal{Euc}_3^+$  (el grupo de movimientos euclidianos de  $\mathbb{E}^3$ , ver pág. 216). Esta asignación se extiende a un homomorfismo de grupos

$$\mathcal{Esf}_2 \subset \mathcal{Euc}_3^+,$$

que de hecho es un isomorfismo con  $\mathcal{Euc}_3^+(O)$ , el estabilizador de  $O$  en  $\mathcal{Euc}_3^+$ ; que, a su vez, se puede pensar como el grupo de movimientos rígidos (i.e., de isometrías que preservan orientación) de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . En particular, hemos descrito a este grupo como el generado por las medias vueltas alrededor de todos los puntos de  $\mathbb{S}^2$  (y hay que observar que en los puntos antípodas, éstas medias vueltas son la misma transformación).

Por último, pensando a  $\mathcal{Esf}_2$  como *espacio topológico*, debemos asignarle a cada transformación en  $\mathcal{Esf}_2$ , un punto en  $\mathbb{D}^3$  de manera *continua* y *biyectiva*:

Primero: a cada generador  $\rho_{X,x}$  de  $\mathcal{Esf}_2$ , le asignamos el punto  $X \in \mathbb{D}^2$ . Segundo: a la identidad  $\text{id}_{\mathbb{D}^2}$  le asignamos el origen  $O$ ; y tercero, veremos a continuación como identificar a las rotaciones con centro en  $X \in \mathbb{D}^2$  con los puntos de la línea proyectiva  $O \vee X$  que es el eje de  $\rho_X$ .

Las rotaciones con centro en  $X \in \mathbb{D}^2$ , que habíamos denotado  $\mathcal{R}_X$  en (4.5), forman un subgrupo de  $\mathcal{Esf}_2$  que tiene a la identidad,  $\text{id}_{\mathbb{D}^2}$  como punto distinguido. Además también tiene a la media vuel-

ta en  $X$ ,  $\rho_{X,x}$ , como su único elemento de orden 2 (involución) y tiene exactamente dos elementos de orden 4 (dos *rotaciones rectas*, o de  $\frac{\pi}{2}$ ) que juntos forman un  $C_4$  (grupo cíclico de orden 4) en  $\mathcal{R}_X$ .

Es natural parametrizar a  $\mathcal{R}_X$  por los puntos de un círculo centrado en  $X$  (ver Paso 8 de la Esceña 65, pág. 219); que es una curva armónica, y que a su vez, por la correspondencia tangencial (Esceña 59 usada en el Teorema 11), se puede identificar naturalmente con una línea proyectiva  $\mathbb{D}^1$  de tal manera que los cuatro elementos de  $C_4 \subset \mathcal{R}_X$  forman una cuarteta armónica.

Por otro lado, la línea  $O \vee X$  corta a  $\mathbb{S}^2$  en dos puntos,  $Y$  y  $Z$  digamos, que son armónicos respecto a  $O$  y  $X$ , pues son puntos antípodas en la esfera.

Usando al Teorema 12 (de 3 en 3) no es difícil ver que entonces hay exactamente dos maneras de identificar proyectivamente a  $\mathcal{R}_X$  con la línea  $O \vee X$  de tal manera que las rotaciones rectas (o de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ ) se asignen a los puntos  $Y$  y  $Z$  de  $\mathbb{S}^2$  (y por supuesto, como ya habíamos quedado,  $\text{id}_{\mathbb{D}^2}$  a  $O$  y  $\rho_{X,x}$  a  $X$ ). Falta escoger una de estas dos asignaciones, para lo cual debemos fijar una orien-

tación de  $\mathbb{S}^2$  y entonces será más fácil dar la asignación al revés (de  $O \vee X$  a  $\mathcal{R}_X$ ).

Llamemos *orientación positiva* a aquella dirección de giro tal que al poner la palma de la mano derecha sobre un punto de una superficie, se gira con la intención de llevar los cuatro dedos hacia el pulgar —con la mano izquierda la orientación positiva lleva al pulgar hacia los dedos, ponga ambas manos en una mesa y véalo: es contra las manecillas del reloj.

La asignación entre líneas proyectivas que escogemos de  $O \vee X$  a  $\mathcal{R}_X$  es la que hace corresponder al punto  $Y \in (O \vee X) \cap \mathbb{S}^2$ : la rotación recta (de ángulo  $\frac{\pi}{2}$  o “90 grados”) en su orientación positiva con eje  $O \vee X = O \vee Y$ . Si escogieramos  $Z$  en vez de  $Y$ , la rotación sería justo la inversa —junte las palmas de las manos y gírelas positivamente— y por lo tanto nuestra regla de asignación es coherente y continua (pues  $\mathbb{S}^2$  es orientable).  $\square$

EJERCICIO 95. Demuestra que dos generadores de  $\mathcal{Euc}_3$  conmutan si y solo si sus espejos son planos perpendiculares.

EJERCICIO 96. Se llama *tornillo* a una transformación de  $\mathbb{E}^3$  que se obtiene como una rotación seguida de una traslación en su eje. Describe un tornillo como composición de cuatro generadores de  $\mathcal{Euc}_3$ . Demuestra que se puede expresar como una traslación seguida de una reflexión.

EJERCICIO 97. Una *reflexión rotatoria* es la transformación de  $\mathbb{E}^3$  que se obtiene como una rotación seguida de una reflexión en un plano ortogonal al eje (invierte orientación). Describe una reflexión rotatoria como composición de tres generadores de  $\mathcal{Euc}_3$ . Demuestra que se puede expresar como una reflexión seguida de una rotación

EJERCICIO 98. ¿Cuál es la distancia máxima entre dos puntos de  $\mathbb{D}^2$ ?

EJERCICIO 99. Dado un punto  $P$  en la esfera  $\mathbb{S}^2$ , describe a la *rotación* en  $P$  de un ángulo  $\alpha$  (medido con la orientación positiva) como composición de dos medias vueltas en puntos de  $\mathbb{S}^2$ .

# Capítulo 5

## Superficies regladas y polaridad

El Teorema de Polaridad de Poncelet-von Staudt (5.2.3) confiere a las curvas de armonía una rica simetría de la cual deriva un gran poder teórico. Para demostrarlo formalmente —más allá de exhibir evidencias experimentales— vamos a retornar a la tercera dimensión y estudiar ahí a las líneas.

### 5.1. Superficies regladas

En un plano Desarguesiano cualquier par de líneas se corta. Pero en el Espacio Desarguesiano,

ya con tres dimensiones, que dos rectas se corten es algo muy raro y especial, una *coincidencia* que equivale a que sean coplanares (PI:(1—1), pág. 62). El caso genérico es que estén en *posición general*, esto es, que no se toquen. Y diremos que un conjunto de líneas en  $\mathbb{D}^3$  está en *posición general* si dos a dos lo están.

Las ternas de rectas en posición general determinan por simple incidencia a unas superficies que llamaremos *superficies regladas*. En el mundo euclidiano se les conoce como hiperboloides de una

hoja o paraboloides hiperbólicos que son a lo que visualmente remiten los haces armónicos que hemos dibujado en el plano. De estas superficies y su rica estructura, habremos de extraer las definiciones, el entendimiento y las pruebas que buscamos.

### 5.1.1. Reglados

A dos líneas que no se tocan, también es correcto llamarlas *líneas generadoras*, pues

- *cualquier punto del espacio vive en una línea que toca a ambas y si el punto está fuera de ellas, ésta línea es única.*

#### ESCENA 66. Dos líneas generan el espacio.

Para probarlo, consideremos dos líneas en posición general,  $a$  y  $b$ ; y sea  $X$  un punto que no está en ellas.

Por esto último,  $X \vee a$  y  $X \vee b$  son planos; y además son distintos pues por hipótesis,  $a$  y  $b$  no son coplanares.

Por lo tanto, se cortan en una línea

$$\ell = (X \vee a) \wedge (X \vee b) \quad (5.1)$$

(por PI:(2 – 2), pág. 62), que pasa por  $X$  y también toca a  $a$  y a  $b$ , pues está en ambos planos.

Esto demuestra que  $a$  y  $b$  *generan* al espacio tridimensional. Y de manera muy justa y precisa, pues podemos ser aún más explícitos. Sean:

$$A = (X \vee b) \wedge a \in a$$

$$B = (X \vee a) \wedge b \in b;$$

entonces,  $A \vee B$  es la única línea que pasa por  $X$  y que claramente incide con  $a$  y con  $b$ . ■

En términos visuales, dos líneas en el espacio son coplanares si alguien las confunde, si hay algún punto de vista que las ve como la misma línea; y cuando una figura gira, estos puntos se perciben al “pasar” un plano por el ojo pues estos puntos especiales forman el plano que generan las líneas. Que sean generadoras equivale a que nadie las confunde, siempre se ven como dos líneas. Sin embargo, parece que se cortan en un punto: y ahí, por esa “intersección visual”, pasa la línea que acabamos de encontrar para el ojo “X” en cuestión.

Entonces, tres líneas en *posición general* siempre se van a ver tres y, casi siempre, como un triángulo que varía conforme se mueve el punto de vista. Pero determinan puntos especiales: aquellos que las ven como tres líneas concurrentes (búscalo alguno). Estos puntos de vista distinguidos forman la *superficie reglada* que generan las tres líneas.

**Definición.** Un *reglado*,  $\mathcal{R}$ , es el conjunto de todas las líneas que tocan a tres líneas en posición general. A los elementos de un reglado dado (que son líneas) se les llama sus *reglas*.

## 5.1.2. Construcción de Hilbert-Cohn Vossen

**ESCENA 67.** Reglado transversal a tres líneas.

Consideremos tres líneas,  $a, b, c$ , en posición general. Su *reglado transversal*  $\mathcal{R} = \mathcal{RT}(a, b, c)$  consiste de todas sus líneas *transversales*, es decir, las que tocan a las tres. Conviene pensar que las *líneas generadoras*,  $a, b, c$  son de un color, digamos que rojo, para colorear de azul a las reglas

de su reglado transversal y poder distinguirlas en los dibujos.

La construcción que sigue aparece en las primeras páginas del libro clásico *Geometría e Imaginación* de David Hilbert y Stephan Cohn Vossen, [6], y como ahí no le dan crédito a nadie, nosotros se la atribuimos a ellos: ahí la conocimos, como todos los colegas a los que les hemos consultado.

Dado un punto  $A \in \alpha$ , se toma al plano que genera con la línea  $b$  y se intersecta a éste con la línea  $c$ , para darnos un punto que llamamos  $C$ . Es decir, sea

$$C = (A \vee b) \wedge c.$$

La línea  $A \vee C$  está en el reglado transversal  $\mathcal{R}$ , pues toca a las tres líneas: a  $\alpha$  en  $A$ , a  $c$  en  $C$  y a  $b$  en  $B = (A \vee C) \wedge b$  que es un punto pues ambas rectas están en el mismo plano  $A \vee b$ .

Al variar el punto  $A$  en la línea  $\alpha$  (¡anímelos!), la regla  $(A \vee C) \in \mathcal{R}$ , barre una *superficie reglada* que depende de las líneas generadoras  $\alpha, b, c$ . ■

Otra manera de verlo es con la observación del apartado anterior, pues implica que por cualquier

punto en una de las rectas,  $\alpha, b, c$ , pasa una única línea que toca a las otras dos, así que, usando (5.1), el reglado  $\mathcal{R}$  se puede parametrizar por los puntos en cualquiera de las tres líneas generadoras:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(A \vee b) \wedge (A \vee c) \mid A \in \alpha\} \\ &= \{(B \vee c) \wedge (B \vee a) \mid B \in b\} \\ &= \{(C \vee a) \wedge (C \vee b) \mid C \in c\}. \end{aligned}$$

De tal manera que es correcto pensar que un reglado es una “línea de líneas”.

Y también será importante observar que, de manera dual, un reglado se puede parametrizar por los planos que contienen a alguna de las líneas generadoras. Si denotamos  $\hat{x}$  al conjunto de planos que contienen a una línea  $x$ , se tiene (para  $b$ ):

$$\mathcal{R} = \{ (\Pi \wedge a) \vee (\Pi \wedge c) \mid \Pi \in \hat{b} \}. \quad (5.2)$$

Pues  $\hat{b}$  está en biyección natural (por intersección) con cualquier línea que no toca a  $b$ , en particular se parametriza por  $a$  y entonces la expresión anterior es la construcción de Hilbert-CohnVossen.

Como ya mencionamos, al juntar o dibujar las reglas del reglado  $\mathcal{R}$  se obtiene una superficie  $\mathcal{S}$  que es común asociar con el nombre de *hiperboloide de una hoja* (el *paraboloide hiperbólico* sería un caso particular). Al ver la figura estática de lado (o por fuera), el contorno es una hipérbola con las reglas de  $\mathcal{R}$  como su haz envolvente; pero si la vemos desde su interior (por las bocas) se ven elipses, también con su haz envolvente o tangente; veremos pronto que en esto se está expresando visualmente el Teorema de Polaridad de superficies regladas que implicará al de curvas armónicas.

### 5.1.3. Axioma del Equipal

#### ESCENA 68. Dobles reglados.

Teniendo tanta regla azul (tantas como puntos en una línea), se antoja escoger a tres, ...

llamémoslas  $p, q, r \in \mathcal{R} = \mathcal{RT}(a, b, c)$ , que pintamos de azul oscuro, para repetir la construcción de Hilbert-Cohn Vossen con ellas. Se vale, porque están en posición general; pues que dos azules (en  $\mathcal{R}$ ) se toquen, implicaría que las tres rojas ori-

ginales (las generadoras) son coplanares y no es así.

De tal manera que  $p, q, r$  definen un nuevo reglado  $\mathcal{R}' = \mathcal{RT}(p, q, r)$ , que pintamos de rojo, y que contiene a  $\alpha, b$  y  $c$ , pues por definición de reglado, éstas tocan a  $p, q, r$ . Diremos que el reglado  $\mathcal{R}'$  *extiende* a la terna de líneas  $\alpha, b, c$ .

Al dibujar juntos los dos reglados, se ve que “van en direcciones opuestas” ahí donde la superficie no se traslapa consigo misma; pues en las zonas en que sí se traslapa, la transparencia hace que se confundan las reglas con reglas opuestas (del otro color) en el otro lado. Hemos dejado visible al punto que controla una de las reglas azules: al animarlo no cambia el reglado rojo, pero parece girar pues cambia la parametrización que lo dibuja.

Y con los dos últimos pasos de esta escena:  
reglado azul...  
reglado rojo...  
damos la posibilidad de verlos alternadamente. ■

Nuestra intuición del espacio físico indica que estos dos reglados definen a la misma superficie; y en la geometría real (la asociada a los *números*

*reales*, con la que modelamos nuestros dibujos y al Espacio Desarguesiano que extiende al Euclidiano) se tiene que efectivamente así es. Pero hay que demostrarlo en ese contexto explícito, pues *no es posible probarlo a partir de los Principios de Incidencia* (pág. 62) que es lo único que quisieramos usar y es lo único que hemos usado en este capítulo — al final del libro veremos un ejemplo que prueba esta afirmación.

La demostración de que los dos reglados gene-

ran la misma superficie consiste en ver que se definen por un mismo polinomio de segundo grado; corresponde a la Geometría Analítica clásica. Así que nosotros debemos incorporarlo como axioma.

Otra manera de expresar que la superficie obtenida como unión de reglas es la misma, y que por tanto es *doblemente reglada*, es que el reglado rojo sea único, que no dependa de las tres reglas azules que se escogieron de manera arbitraria para definirlo, y lo llamaremos:

**Axioma del Equipal.** *Tres líneas en posición general se extienden a un único reglado.*

El nombre viene de los reglados dobles en que se sustentan los “*equipales*”: un estilo artesanal mexicano de sillones y muebles cuyas bases están hechas de tiras burdas de madera que “*circulan*” inclinadas en dos direcciones (Figura 5.1).

El Axioma del Equipal —que supondremos como cierto en adelante— implica que un reglado,  $\mathcal{R}$ , tiene bien definido a su *reglado opuesto*  $\mathcal{R}'$ , que es el reglado transversal de cualquier terna en  $\mathcal{R}$  (pues

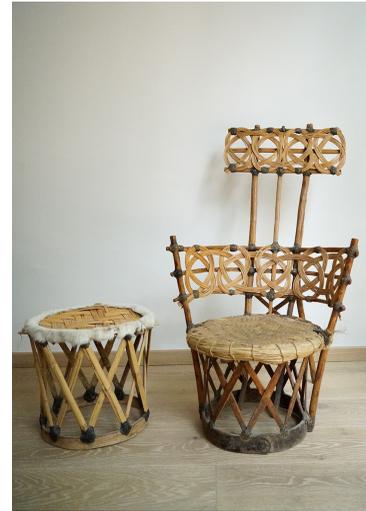


Figura 5.1: Equipal de un maracáme huichol.

estos extienden a la terna generadora). Entonces, su superficie reglada  $\mathcal{S}$  es, más aún, una *superficie doblamente reglada*; es decir,

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\ell \in \mathcal{R}} \ell = \bigcup_{\ell' \in \mathcal{R}'} \ell'.$$

Y por lo tanto, pintando a las reglas de  $\mathcal{R}$  de rojo

y a las de  $\mathcal{R}'$  de azul, se cumple que:

- Por cualquier punto en  $\mathcal{S}$  pasan dos reglas: una roja en  $\mathcal{R}$  y una azul en  $\mathcal{R}'$ .
- Dos reglas de  $\mathcal{S}$  de color distinto se tocan.
- Dos reglas de  $\mathcal{S}$  del mismo color son generadoras (no se tocan).

#### 5.1.4. Planos tangentes, curvas armónicas y haces envolventes

Concluimos con un poker de definiciones.

Sean  $\mathcal{S}$  una superficie doblemente reglada y  $P$  un punto en ella. Por  $P$  pasa una regla de cada color (o de cada reglado). Al plano que generan esas dos líneas se le llama el *plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$* , o bien el *plano polar de  $P$  respecto a  $\mathcal{S}$* . Y se cumple que este plano tangente corta a la superficie justo en esas dos líneas: las reglas de distinto color que se cortan en  $P$ .

ESCENA 69. Curvas armónicas.

**Definición** • Una *curva armónica*  $\mathcal{C}$  es la intersec-

*ción de una superficie doblemente reglada  $\mathcal{S}$  con un plano  $\Pi$  que no es tangente a  $\mathcal{S}$ . Es decir,*

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \Pi.$$

• Para cada punto  $P \in \mathcal{C}$ , la *línea tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$*  es la intersección de  $\Pi$  con el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$ .

• Y el *haz envolvente* o *tangente a  $\mathcal{C}$*  es la familia de sus líneas tangentes. ■

En los capítulos anteriores, a veces usamos el

término *curva armónica* como sinónimo de *curva de armonía* (que definimos a partir de cuatro puntos en posición general y ordenados cíclicamente). Pero ya no: de aquí en adelante las *curvas armónicas* serán secciones de superficies regladas, como encimita, pues debemos demostrar que son lo mismo que las curvas de armonía definidas como lugar geométrico dentro de un plano, para lo cual es conveniente tener términos distintos para los dos conceptos y ser escrupulosos en su uso.

EJERCICIO 100. Demuestra que un punto y un plano no incidentes generan a  $\mathbb{D}^3$ . Es decir, que por cualquier punto pasa una línea que incide en ambos, y que si el punto no incide en ellos, esa recta es única.

EJERCICIO 101. Escribe al reglado  $\mathcal{R} = \mathcal{RT}(a, b, c)$  como conjunto parametrizado por los planos que contienen a  $a$  y a  $c$ .

EJERCICIO 102. Dadas dos líneas  $x, y$  generadoras, demuestra que los planos por  $x, \hat{x}$ , están en biyección natural por incidencia con los puntos de  $y$ . Escribe las fórmulas de las funciones correspondientes.

EJERCICIO 103. Un *paraboloide hiperbólico* es una su-

perficie doblemente reglada que tiene al plano ideal (al infinito) como plano tangente. Haz una construcción que dibuje paraboloides hiperbólicos, adaptando la de Hilbert-Cohn Vossen a que una de las tres líneas sea ideal.

EJERCICIO 104. Demuestra que si las líneas  $p$  y  $q$  son coplanares y transversales a las líneas  $a$  y  $b$ , entonces  $a$  y  $b$  son coplanares.

EJERCICIO 105. Demuestra que si un plano  $\Pi$  contiene a una regla  $\ell$  de una superficie doblemente reglada  $\mathcal{S}$  entonces también contiene a una única regla  $\ell'$  del reglado opuesto. Y que su intersección con  $\mathcal{S}$  es la unión de esas dos reglas.

EJERCICIO 106. Continúa la escena anterior dibujando la línea armónica de la línea tangente a  $\mathcal{C}$  en  $P$  respecto a las dos reglas en  $P$ . Observa experimentalmente, que todas esas líneas son concurrentes usando la herramienta *Curva-Familia*. ¿Qué ve el punto de concurrencia?

## 5.2. Teoremas de Polaridad

Recordemos que nuestra misión en la vida (de este capítulo) era demostrar que las curvas de armonía cumplen la propiedad de inducir una polaridad hiperbólica en todo su plano. Veremos que para las superficies regladas, la polaridad se expresa de manera muy natural y que demostrar sus propiedades es... no sería correcto decir que fácil, pero sí muy directa y natural: sin recovecos ni trucos. Las ideas van hilvanándose con fluidez y los argumentos se enlazan con claridad y contundencia sorprendentes.

En el primer apartado enunciamos el Teorema de Polaridad para Reglados y demostramos que la polaridad existe. En el segundo, probamos que preserva incidencia; esta demostración es un poco más abigarrada pero necesaria y reveladora. Abundaremos entonces en la interpretación visual de la polaridad. Y para concluir, demostramos lo que pretendíamos: la versión bidimensional del teorema. Primero para las curvas armónicas como simple restricción de la polaridad de superficies re-

gladas a un plano, y por último queda por probar que las curvas armónicas coinciden con las curvas de armonía, pero para entonces ya tendremos un buen trecho avanzado y mucho cayó.

### 5.2.1. Polaridad en superficies regladas

Empezemos por recordar de §4.2.2 que una *polaridad* en  $\mathbb{D}^3$  es un apareamiento (es decir, una biyección) entre puntos y planos que preserva incidencia (es decir, que voltea la relación de contención). Más precisamente, el apareamiento *polo-polar* debe ser tal que si un punto  $Q$  está contenido en un plano  $\Pi$  entonces el *plano polar* de  $Q$  contiene al *polo* de  $\Pi$ . Esta propiedad implica en abstracto que la polaridad se extiende a las líneas. Pues se define a la *línea polar* de una línea  $\ell$  como la intersección de todos los planos polares de sus puntos, que resulta coincidir con la unión de los polos de todos los planos que contienen a  $\ell$ , que habíamos denotado  $\hat{\ell}$ .

De nuevo, como en el plano y en la línea, se dice que una polaridad es *euclidiana* si no existen

parejas polares incidentes, y que es *hiperbólica* si existe algún punto contenido en su plano polar. Veremos a continuación, que las superficies regladas producen de estas últimas.

**Teorema 13** (Polaridad de superficies regladas). *Una superficie reglada,  $\mathcal{S}$ , induce una polaridad en  $\mathbb{D}^3$  que cumple:*

- i) *Para  $P \in \mathcal{S}$ , su plano polar es el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$  (y contiene a  $P$ ).*
- ii) *Si  $P \notin \mathcal{S}$ , entonces  $P$  no está en su plano polar y la reflexión armónica con centro en  $P$  y espejo en su plano polar, deja invariante a la superficie  $\mathcal{S}$ .*

La demostración, que consiste de diferentes escenas y elementos, abarcará lo que queda de este apartado y el que sigue; al final haremos un resumen de ella.

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie reglada. Para un punto  $P \in \mathcal{S}$ , ya definimos su *plano polar* como el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $P$  (el generado por las dos reglas ahí) y queda establecido el inciso (i).

**ESCENA 70.** *La polaridad de una superficie reglada.* Consideremos ahora el caso genérico en que

$$P \notin \mathcal{S}.$$

Consideremos tres líneas rojas,  $a, b, c$ , en posición general y que generan a  $\mathcal{S}$ ; es decir, tales que su reglado transversal  $\mathcal{RT}(a, b, c)$  (que consta de las líneas transversales a las tres y pintadas de azul), tiene como unión a  $\mathcal{S}$ . Sabemos además, que hay un reglado opuesto de  $\mathcal{S}$ , el rojo, que extiende

a  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$ . Convendrá cambiar la notación que usamos en el apartado anterior: denotemos por  $\mathcal{R}$  al reglado rojo que extiende (y contiene como reglas) a  $\alpha$ ,  $b$ ,  $c$  para usar primas en el reglado azul opuesto a  $\mathcal{R}$ ; es decir, sea

$$\mathcal{R}' = \mathcal{RT}(\alpha, b, c),$$

de tal manera que  $\mathcal{R}$  es el reglado transversal a cualquier terna de reglas en  $\mathcal{R}'$  y está bien definido por el Axioma del Equipal.

Vamos ahora a definir el plano polar de  $P$ .

Consideremos al plano

$$\alpha = P \vee a;$$

nótese que hemos violado nuestra convención notacional. Habíamos dicho que los planos eran letras griegas mayúsculas, pero aquí correspondería  $\mathbb{A}$  (mayúscula de  $\alpha$  en griego) y se confundiría con un punto; y lo mismo sucedería con  $b$ . Así que en esta sección las griegas minúsculas también las usaremos para planos.

Sabemos que en  $\alpha$  vive una regla azul que es

$$a' = (\alpha \wedge b) \vee (\alpha \wedge c) \in \mathcal{R}',$$

por (5.2). Y sea

$$\mathbb{A} = \alpha \wedge a' \in \mathcal{S}.$$

Obsérvese que el punto  $\mathbb{A}$  y la regla  $a'$  dependen del punto  $P$ , pues el plano  $\alpha \in \hat{\alpha}$  depende de él. Además,  $\mathbb{A} \in \mathcal{S}$  es el polo del plano tangente  $\alpha$ .

Análogamente, los planos

$$\beta = b \vee P \quad \text{y} \quad \gamma = c \vee P$$

definen otras dos reglas azules  $b', c' \in \mathcal{R}'$  por la propiedad de que

$$P \in b \vee b' = \beta \quad \text{y} \quad P \in c \vee c' = \gamma.$$

Lo cual da dos nuevos puntos en la superficie,

$$B = b \wedge b' \quad \text{y} \quad C = c \wedge c',$$

que son polos de  $\beta$  y  $\gamma$  respectivamente. Los tres puntos en  $\mathcal{S}$  que hemos nombrado, generan un plano

$$\pi = A \vee B \vee C,$$

que definimos como *el plano polar de P* respecto a  $\mathcal{S}$ .

Nótese que hemos seguido la “preservación de incidencia” que debe cumplir la polaridad, pues por ejemplo, que el plano polar de  $A \in \mathcal{S}$  pase por P implica que A está en el plano polar de P. Y

este argumento en las reglas generadoras nos dió tres puntos en el plano polar de P.

De manera dual, pudimos haber empezado con un plano  $\pi$  que no es tangente a  $\mathcal{S}$ , su intersección con las tres reglas rojas generadoras nos da tres reglas opuestas y tres puntos de  $\mathcal{S}$  cuyos planos tangentes se intersectan en el polo P. Así que *hemos establecido una biyección entre puntos y planos*.

Para concluir con el inciso (ii) del teorema debemos probar ahora que

- la reflexión armónica,  $\rho = \rho_{P,\pi}$ , con centro  $P$  y espejo  $\pi$  deja invariante a  $\mathcal{S}$ .

Las seis reglas que tenemos (3 rojas y 3 azules) definen por intersección a nueve puntos en  $\mathcal{S}$ . Con ellos —y la configuración de líneas y planos que generan— bastará para demostrar (ii).

En el plano  $\alpha = a \vee a'$  (que es el tangente a  $\mathcal{S}$  en  $A = a \wedge a'$ ) tenemos a otros cuatro de esos nueve puntos. A saber,

$$(a \wedge b'), (b \wedge a'), (a \wedge c'), (c \wedge a'),$$

que forman un cuadrángulo plano. Pero además, con este orden cíclico tiene precisamente a  $A$  como punto distinguido en su triángulo diagonal; pues sus dos diagonales son  $a$  y  $a'$ . Es decir, en  $\alpha$  tenemos lo que habíamos denominado una loseta (ver §???)

Otro de los puntos del triángulo derivado o diagonal es  $P$ . Pues  $P$  es la intersección de los planos  $\alpha, \beta, \gamma$ ; y dos de las líneas de intersección de es-

tos planos se pueden expresar

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= (a \wedge b') \vee (b \wedge a') \\ \alpha \wedge \gamma &= (a \wedge c') \vee (c \wedge a').\end{aligned}$$

Por lo tanto, éstas son rectas que pasan por  $P$ .

Para ver que la línea opuesta a  $P$  en el triángulo diagonal, es  $\alpha \wedge \pi$ , demostraremos que el vértice del triángulo diagonal que falta es  $\alpha \wedge (B \vee C)$ .

Para ello, consideremos a los planos tangentes

$$(b \vee c') \quad \text{y} \quad (c \vee b').$$

Se cortan en la línea  $B \vee C$  pues ambos planos contienen a ambos puntos. Además, sus intersecciones con  $\alpha$  dan a la otra pareja de lados opuestos de la loseta:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (b \vee c') &= (b \wedge \alpha') \vee (\alpha \wedge c') \\ \alpha \wedge (c \vee b') &= (c \wedge \alpha') \vee (\alpha \wedge b'), \end{aligned} \quad (5.3)$$

pues los dos puntos del lado derecho de las ecuaciones están en los dos planos de su correspondiente lado izquierdo.

Así que donde estas líneas se cortan (el tercer punto diagonal de la loseta en  $\alpha$ ) es la intersección de los tres planos, que es  $Q = \alpha \wedge (B \vee C)$ .

Tenemos entonces que la reflexión armónica con centro  $P$  y espejo  $\pi$  (que habíamos llamado  $\rho = \rho_{P,\pi}$  y que deja invariante al plano  $\alpha$  pues  $P \in \alpha$ ), deja fijo a  $A \in \pi$  e intercambia a las reglas  $a$  y  $a'$ , es decir,  $a \cdot \rho = a'$  pues son las diagonales de la loseta.

Como  $\rho$  también deja fijos a los puntos  $B$  y  $C$ , pues están en el espejo; podemos concluir que intercambia a los pares de líneas  $b, b'$  y  $c, c'$ , porque ya sabemos que intercambia a sus respectivos puntos de intersección con el plano  $\alpha$ .

Por lo tanto, la reflexión armónica  $\rho$  intercambia a las reglas rojas  $a, b, c$  con las reglas azules  $a', b', c'$ , respectivamente. Le traspone el color a la configuración pero la deja en su lugar. ■

Vamos a demostrar que  $\rho$  intercambia los regla-

dos de  $\mathcal{S}$ . Sea  $x \in \mathcal{R}$  una regla roja cualquiera.

Como  $x$  toca a las líneas  $a', b', c'$ , su imagen bajo  $\rho$ , es una línea que toca a las líneas  $a = a' \cdot \rho$ ,  $b = b' \cdot \rho$ ,  $c = c' \cdot \rho$ . Y por lo tanto, tiene que ser una línea del reglado azul, es decir,

$$x \in \mathcal{R} \implies x \cdot \rho \in \mathcal{R}'.$$

Ya sabemos que  $x \cdot \rho$  es una regla azul. Podemos decir cuál es, pues en una reflexión armónica el punto de intersección con el espejo se queda fijo. Así que  $x \cdot \rho$  es la regla azul que pasa por  $x \wedge \pi$  y que conviene denotar  $x' = x \cdot \rho$ .

Se tiene por definición que  $x \wedge x' \in \pi$ . Pero también que  $P \in x \vee x'$  pues el plano que generan cualquier línea y su imagen bajo una reflexión armónica, contiene al centro. Así, hemos demostrado que:

- *Todos los planos tangentes a  $\mathcal{S}$  en puntos de  $\pi$  pasan por  $P$ .*

Y de aquí podemos concluir que la definición de  $\pi$  no depende de las tres reglas con que arrancamos;

con cualquier otra terna de reglas rojas (o azules), hubiéramos obtenido al mismo plano.

Como la reflexión armónica  $\rho$  es una involución (es su propia inversa), tiene que mandar a cada regla azul en la roja de la que viene,  $x = x' \cdot \rho$ . En fin, ya tenemos lo que buscábamos, que  $\rho$  deja invariante a la superficie  $\mathcal{S}$ , pero sabemos ahora que es así porque intercambia a sus dos reglados; es un apareamiento entre  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{R}'$ .

Para remachar que la polaridad es un apareamiento (biyección) entre puntos y planos de  $\mathbb{D}^3$ , podemos reinterpretarla en abstracto. Cualquier punto  $P$  fuera de  $\mathcal{S}$  y cualquier plano  $\pi$  no tangente a  $\mathcal{S}$  (pensados ahora libres y sin relación aparente entre ellos), definen por simple incidencia una correspondencia 1-1 o apareamiento natural entre los dos reglados de  $\mathcal{S}$ :

*Dos reglas de colores opuestos se aparean según un punto  $P$  si  $P$  está en el plano que generan; y se aparean según un plano  $\pi$  si su intersección está en  $\pi$ .*

Las parejas polares punto-plano respecto a  $\mathcal{S}$  son

aquellas en las que estos apareamientos entre los dos reglados coinciden. Pero además, cuando este es el caso, la biyección entre reglados se realiza también geoméricamente como transformación de todo el ambiente: es la reflexión armónica en la pareja polar.

EJERCICIO 107. Demuestra que un plano  $\pi$  es un plano tangente de una superficie reglada  $\mathcal{S}$  si y sólo si contiene a una regla de  $\mathcal{S}$ .

EJERCICIO 108. Dada una superficie reglada  $\mathcal{S}$  y un plano  $\pi$  que no es tangente a  $\mathcal{S}$ , define el polo de  $\pi$  respecto a  $\mathcal{S}$ .

### 5.2.2. Preservación de la incidencia

Primero para los puntos de  $\mathcal{S}$  y luego para todos los demás, definimos su *plano polar* y hemos visto que esta asignación es una biyección entre puntos y planos de  $\mathbb{D}^3$ . Veremos ahora que efectivamente es una *polaridad* (aunque hayamos usado ese término desde su definición) en el sentido de que el apareamiento preserva incidencia.

Supongamos, para continuar usando la misma terminología que en la escena anterior, que *un punto P tiene como plano polar a  $\pi$* ; y queremos probar que:

- *si un punto Q está en  $\pi$  entonces el plano polar de Q contiene a P.*

Por la manera en que está definido el apareamiento, tenemos que ver tres casos según si los puntos P y Q están o no en la superficie  $\mathcal{S}$ .

**Primero**, cuando ambos están en  $\mathcal{S}$ . Uno está en el plano polar del otro, sólo cuando ambos están en una misma regla y la conclusión se cumple.

**Segundo**, el caso en que alguno de los puntos está en la superficie y el otro no. Se vio, se estudió y se uso de manera protagónica en el apartado anterior para definir la polaridad como función. Que un punto Q dentro de la superficie  $\mathcal{S}$  esté en  $\pi$  es equivalente a que el plano polar de Q pase por P.

Y **tercero**, cuando ambos puntos (P y Q) están fuera de  $\mathcal{S}$  y además  $Q \in \pi$ . Si llamamos  $\eta$  (léase “eta”) al plano polar de Q, tenemos que probar que  $P \in \eta$ .

ESCENA 71. Caso general,  $P, Q \notin \mathcal{S}$ .

Sea  $A$  un punto cualquiera en  $\mathcal{S} \cap \pi$  (existen muchos de estos pues  $\pi$  corta a cualquier regla). Y como antes, sean  $\alpha$  y  $\alpha'$  las reglas de  $\mathcal{S}$  que cumplen

$$A = \alpha \wedge \alpha' \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \alpha \vee \alpha' = \alpha.$$

Sea  $B$  el reflejado armónico de  $A$  con centro en  $Q$  y espejo  $\eta$ . Y supongamos primero que  $B \neq A$  (el caso general), que equivale a que  $A \notin \eta$ .

Sabemos que  $B$  está en la superficie  $\mathcal{S}$  (pues  $Q$

y  $\eta$  son polares respecto a  $\mathcal{S}$  y se cumple (ii) del teorema) y que también está en  $\pi$  (pues el centro de la reflexión,  $Q$ , está en  $\pi$ ). Por lo cual, de nuevo, existen reglas  $\beta$  y  $\beta'$  para las cuales

$$B = \beta \wedge \beta' \in \pi \quad \text{y} \quad P \in \beta \vee \beta' = \beta.$$

Como reglas de distintos colores siempre se cortan, tenemos dos nuevos puntos en  $\mathcal{S}$ :

$$C = \alpha \wedge \beta' \quad \text{y} \quad D = \beta \wedge \alpha'.$$

Nótese que  $P \in \alpha \wedge \beta = C \vee D$ , pues ambos puntos están en ambos planos.

Los respectivos planos tangentes a  $\mathcal{S}$  en  $C$  y en  $D$  son

$$\alpha \vee \beta' \quad \text{y} \quad \beta \vee \alpha',$$

y ambos contienen a  $A$  y a  $B$ . Por lo tanto, también contienen a  $Q \in A \vee B$ . Entonces se tiene que  $C$  y  $D$  están en el plano polar de  $Q$ , que es  $\eta$ . Pero  $P$  está en la línea  $C \vee D$  y por lo tanto en  $\eta$ , como queríamos demostrar. ■

Nos queda por ver el caso particular en que  $A = B$  en la demostración anterior, donde  $B$  se

definió como la imagen de  $A$  bajo la reflexión armónica con centro en  $Q$  y espejo en su plano polar  $\eta$ . Como estamos suponiendo que el centro  $Q$  no está en la superficie  $\mathcal{S}$ , que  $A = B$  sólo puede suceder cuando  $A$  está en el espejo  $\eta$ .

### ESCENA 72. En un plano tangente.

Cuando  $A \in \eta$ , tenemos el caso especial en que tanto  $P$  como  $Q$  están en el plano tangente a  $\mathcal{S}$  en  $A$ , que hemos llamado  $\alpha$ . Pero entonces  $Q \vee A$  y  $P \vee A$  tienen que ser líneas armónicas respecto a  $\alpha$  y  $\alpha'$  (pues tenemos que  $\alpha$  y  $\alpha'$  lo son respecto a  $P \vee A$  y  $\alpha \wedge \pi = Q \vee A$ ). Lo cual demuestra que  $P \in \eta$ .

Las dos reflexiones armónicas (de las parejas polares  $P, \pi$  y  $Q, \eta$ ) intercambian a  $\alpha$  y  $\alpha'$ ; pero punto a punto son muy diferentes: restringidas a estas reglas una es la proyección desde  $P$  y la otra desde  $Q$ . Los correspondientes planos polares,  $\pi$  y  $\eta$ , cortan al plano tangente  $\alpha$  en las líneas  $Q \vee A$  y  $P \vee A$ , respectivamente. ■

Esto concluye con la demostración del Teorema de Polaridad para superficies regladas. □

La prueba consistió en definir primero el apareamiento entre puntos y planos de  $\mathbb{D}^3$  al que da lugar una superficie reglada  $\mathcal{S}$ ; luego, ver que cumple con los incisos (i) y (ii) del teorema y, por último, ver que también preserva la incidencia como se les exige a las polaridades.

Vamos a ver brevemente como la polaridad respecto a la superficie reglada  $\mathcal{S}$  también se extiende a las líneas del espacio. *La línea polar de una línea* es la intersección de los planos polares a dos

de sus puntos. Que esté bien definida equivale a que al mover un punto en una línea, los planos polares correspondientes giran alrededor de su línea polar.

Hay varios casos. Las reglas de ambos reglados son líneas polares de sí mismas, pues al variar un punto en una de ellas el plano tangente correspondiente gira en torno a la regla.

Para una línea tangente (que está en un plano tangente y pasa por su polo pero no es una regla) su polar es la línea armónica respecto a las reglas como vimos en la escena anterior.

Para líneas que cortan en dos puntos a  $\mathcal{S}$  (como  $A \vee B$  en la Escena 71), su línea polar se obtiene con las reglas por ellos (es  $C \vee D$  en esa escena). Pero además, hay líneas que no tocan a  $\mathcal{S}$  y sus polares quedan en el otro lado de la superficie.

Antes de pasar a ver cómo la polaridad en reglados implica a la polaridad en curvas armónicas, vamos a interpretarla en términos visuales.

### ESCENA 73. Secciones y proyecciones.

Hemos definido a una curva armónica  $\mathcal{C}$  como la intersección de un plano  $\pi$  (verde) con una super-

ficie reglada  $\mathcal{S}$ ,...

y a su línea tangente en un punto  $A \in \mathcal{C}$  como la intersección del plano polar a  $A$ , que llamamos  $\alpha$ , con el plano  $\pi$ .

Ahora sabemos que, dentro de  $\alpha$ , la línea armónica a la tangente respecto a las dos reglas de  $\mathcal{S}$  pasa por el punto polar de  $\pi$ , que seguimos denotando  $P$  y ahora él es el que depende de  $\pi$  en la construcción (esto explica lo que se experimentó en el Ejercicio 106).

De tal manera que lo que ve P como el *contorno* de  $\mathcal{S}$  es a la curva armónica  $\mathcal{C}$  (la intersección de  $\mathcal{S}$  con su plano polar  $\pi$ ). Justo por los puntos de  $\mathcal{C}$  (anímesese a X que es un punto libre en una regla roja), es por donde pasan los *rayos visuales* que salen de P y rosan apenas, o son tangentes, a  $\mathcal{S}$ . Y es ahí donde se debe trazar un *contorno* cuando un pintor dibuja un cuerpo sólido; pero en este caso muy especial de las superficies regladas, los puntos en la superficie que forman ese contorno para el punto de vista P son también una *sección*, la intersección con su plano polar  $\pi$ .

Si pintamos esa familia de líneas, obtenemos el *cono* con ápice P que define  $\mathcal{C}$  y en esta curva plana es tangente a  $\mathcal{S}$ ; de alguna manera es el *cono visual* de  $\mathcal{S}$  desde P.

Además, a P como *voyeur* se le enciman los dos reglados. Cada regla roja se aparea con una azul de la que no la puede distinguir; y ambas reglas que se cortan en  $\mathcal{C}$  se proyectan desde P en una línea tangente a  $\mathcal{C}$  en  $\pi$ . Por eso es difícil distinguir a los dos reglados en los dibujos fijos: ambos se dibujan (o se ven) como el haz envolvente (o tangente) a  $\mathcal{C}$ .

En resumen, si se proyecta a  $\mathcal{S}$  al plano  $\pi$  desde el punto P, el contorno es  $\mathcal{C}$  y ambos reglados se proyectan al haz tangente a  $\mathcal{C}$ . ■

EJERCICIO 109. Demuestra que, para una polaridad cualquiera (no necesita ser hiperbólica), la línea polar de una línea está bien definida como la intersección de los planos polares de cualesquiera dos de sus puntos.

### 5.2.3. Polaridad en curvas armónicas

Veremos ahora, que la polaridad en superficies regladas se hereda a las curvas armónicas.

Sea  $\mathcal{C}$  una curva armónica en un plano  $\pi$ . Entonces existe una superficie reglada  $\mathcal{S}$  tal que

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \pi,$$

y sea  $P$  el polo de  $\pi$  respecto a  $\mathcal{S}$ . Sabemos que  $\mathcal{S}$  define una polaridad en  $\mathbb{D}^3$  y esto determina naturalmente una polaridad en  $\pi$ , llamada la *restricción* al plano  $\pi$ , como sigue:

- Dado un punto  $Q \in \pi$ , su *línea polar* respecto a  $\mathcal{C}$  es

$$q = \eta \wedge \pi,$$

donde  $\eta$  es el plano polar de  $Q$  respecto a  $\mathcal{S}$ .

- Dada una línea  $q \subset \pi$ , su *polo* respecto a  $\mathcal{C}$  es el polo del plano  $q \vee P$  respecto a  $\mathcal{S}$  (que es un punto en  $\pi$ ).

De aquí, se sigue inmediatamente nuestro anhelado Teorema de Polaridad (??) para curvas armónicas. Veámoslo a vuelo de pájaro o a manera de repaso y conviene volver a enunciarlo.

**Teorema** (Polaridad de curvas armónicas). *Una curva armónica  $\mathcal{C}$  induce una polaridad en el plano, tal que para cualquier pareja polar  $P \leftrightarrow p$ , se cumple:*

$$\text{i) } P \in p \iff P \in \mathcal{C}.$$

ii) Si  $P \notin p$ , la reflexión armónica  $\rho_{p,p}$  deja invariante a  $\mathcal{C}$ .

**Demostración.** Siguiendo a los párrafos anteriores, que la polaridad en  $\pi$  que acabamos de definir preserva incidencia, se hereda directamente de que lo hace en el espacio.

Que distingue a la curva como los puntos incidentes en su polar (inciso (i)) es consecuencia de las definiciones de planos y líneas tangentes, así como de (i) en el Teorema 13.

Y que las reflexiones armónicas correspondientes a pares polares no incidentes en el plano  $\pi$ , preservan a la curva, se sigue de que en el espacio preservan tanto a  $\pi$  como a la superficie (incisos (ii) de ambos teoremas).  $\square$

Pero el Teorema que originalmente enunciamos y que usamos extensamente en el Capítulo IV, no es éste sino el que se refiere a curvas de armonía. Entonces lo que nos falta demostrar es que las dos acepciones de *curva armónica* que hemos empleado son la misma.

**Teorema 14.** *Las curvas armónicas (como secciones de superficies regladas) coinciden con las curvas de armonía (definidas por una cuarteta de puntos en un plano).*

**Demostración.** Para ver que una curva de armonía  $\mathcal{C}$  es la sección plana de una superficie reglada (una curva armónica) usaremos una construcción-A (Escena ??) que la defina y de ahí, con dos puntos auxiliares, produciremos un doble reglado.

**ESCENA 74. Reglados para una curva de armonía.**

Supongamos que tenemos los datos  $A, B, C, L$  (donde  $L$  es la intersección de las tangentes en  $A$  y  $B$ ) para trazar a la curva de armonía  $\mathcal{C}$  con la construcción-A en un plano  $\pi$ .

Escogemos un punto  $P$  fuera de  $\pi$  que jugará el papel de su polo y, en la línea  $\ell = P \vee L$ , un punto  $S$

por donde pasará la superficie reglada. Y con esta información, todo queda determinado.

De  $S$  y su armónico,  $S'$ , respecto a  $P$  y  $L$ , debemos trazar líneas a  $A$  y a  $B$ , y colorearlas con dos colores rojo y azul como corresponde; éstas serán reglas de la superficie. Entonces, ya determinan los planos tangentes a ella en los puntos  $A$  y  $B$  (y que además, se intersectan en  $\ell$ ).

Por el punto  $C$  pasa una única línea que toca a las dos reglas azules, la pintamos de rojo; y una

única línea azul que corta a las dos rojas.

Ya tenemos tres reglas rojas y tres azules que se tocan como deben. Con la construcción de Hilbert-CohnVossen se obtiene una superficie reglada  $\mathcal{S}$  que, aunque depende elegantemente de los puntos  $P$  y  $S$  alineados con  $L$ , siempre corta a  $\pi$  en  $\mathcal{C}$  como veremos con detalle a continuación.

En la Escena 50 de la Construcción-A, vimos que la reflexión armónica del punto  $C$  con respecto a la pareja polar con espejo  $X \vee L$  (con  $X \in (A \vee B)$  como punto variable) daba al punto  $Z$  que recorre la curva  $\mathcal{C}$ ; y había que tener cuidado con los puntos  $A, B$ . A esa reflexión armónica la podemos expresar ahora usando a la superficie  $\mathcal{S}$ . Primero notemos que  $X \in (A \vee B)$  también parametriza a los planos que contienen a  $\ell$  (línea polar de  $A \vee B$ ), que habíamos llamado  $\hat{\ell}$ : sea  $\eta_X = \ell \vee X \in \hat{\ell}$ .

Para encontrar la imagen de  $C$  bajo la reflexión de  $\mathcal{S}$  con espejo  $\eta_X$ , hay que trazar las dos reglas por  $C$ ; intersectarlas con  $\eta_X$  y ahí trazar la regla de color opuesto: estas dos reglas se cortan en  $Z$  (que está en  $\pi$  pues el polo de  $\eta_X$  está en  $A \vee B$ ). Pero esta última definición coincide con la de la

curva armónica (como sección de  $\mathcal{S}$ ) pues al correr  $\eta_X \in \hat{\ell}$  se obtienen todos los puntos en una de las reglas por  $C$ , digamos que la azul, y entonces se están considerando a todas las reglas rojas e intersectándolas con  $\pi$ ; y eso es  $\mathcal{S} \cap \pi$ . ■

Falta probar que una curva armónica es de armonía, pero acabamos de ver como obtenerla por la construcción-A. □

### 5.3. Teoremas clásicos

En esta última sección, demostramos dos teoremas clásicos siguiendo la idea de Germinal Pierre de Dandelin (Francés, 1794–1847), que influyó de manera crucial en la demostración de la polaridad de las curvas cónicas que hemos presentado aquí.

El objetivo principal del artículo de Dandelin, [5], era demostrar el Teorema del Hexágono de Pascal. Una buena parte del trabajo se enfoca a construir, en el espacio euclidiano, una superficie reglada que tenga a una curva cónica dada como sección plana. Y una vez logrado esto (que para nosotros se facilitará gracias a la construcción de Hilbert-Cohn Vossen que data de un siglo después), las hipótesis del teorema dan lugar a una configuración de seis líneas en el espacio, que es justo la que ya usamos con éxito en la demostración de la polaridad. Así que empezamos dándole su lugar a esta configuración notable en sí misma y para hacer énfasis en lo que se usa una y otra vez de ella.

Después, damos la demostración de Dandelin al Teorema de Pascal y una aplicación de éste. Por úl-

timo, veremos que se relaciona naturalmente con el Teorema de Pappus como un interesante caso límite al pasar de un plano general a un plano tangente de una superficie reglada. Pero este resultado, muy lejos de ser un caso particular o especial, es sobresaliente y notable en sí mismo.

Pappus (o Papo) de Alejandría (290–350) lo enunció y demostró más de un milenio antes de que apareciera la perspectiva. Tiene la particularidad de que es el primer teorema geométrico que se refiere únicamente a cuestiones de incidencia. De tal manera que históricamente es el primer resultado de la geometría proyectiva (o de incidencia) que se enuncia y demuestra —aunque las demostraciones clásicas siempre usan nociones métricas. Quedó como un resultado aislado; sin compañeros aparentes. Pero resultó ser un enunciado fundamental pues, como pronto veremos, es equivalente al Axioma del Equipal. Con el paso del tiempo, ha cobrado tal magnitud que John Stillwell, en [9], lo propone como enunciado embajador de la humanidad ante el cosmos. Es decir, que si hemos de mandar en sondas espaciales algo que indique

nuestro avance intelectual a posibles seres inteligentes, el enunciado del Teorema de Pappus —que se puede expresar en lenguaje gráfico— es un candidato idóneo. Veremos hacia el final del libro más razones para tan alta distinción.

### 5.3.1. La configuración de Dandelin

Llamaremos *configuración de Dandelin* a seis líneas en  $\mathbb{D}^3$ , llamadas sus *reglas*, pintadas de dos colores (rojo y azul) de tal manera que dos reglas del mismo color son generadoras y dos de color distinto se tocan.

Dicho de otra manera, una configuración de Dandelin consiste en escoger tres reglas de cada reglado de una superficie (doblemente) reglada. Pues, como la definimos arriba, el Axioma del Equipal asegura que las dos ternas se extienden a reglados únicos, y además opuestos, de la misma superficie.

Nótese que parte sustancial de la demostración del Teorema 13 (de Polaridad en Reglados) consistió en encontrar una configuración de Dandelin y estudiarla. Sin embargo, estábamos enfocados en

la polaridad y ahora queremos ver a la configuración en sí, con más libertad para apreciar su simetría.

#### ESCENA 75. Configuración de Dandelin.

Se puede armar una configuración de Dandelin a partir de dos triángulos en perspectiva y tomando como las seis líneas de la configuración a las diagonales de los cuadriláteros en los lados de la pirámide triangular que se forma. Y, por supuesto, coloreadas adecuadamente.

Visto así, el Teorema de Desargues nos da un eje de perspectiva axial para los dos triángulos “*tapa*” de la pirámide.

Resulta que el plano por los tres puntos “*diagonales*”, el del triángulo “*de en medio*”, también pasa por ese eje; pero además, los lados de ese triángulo inciden en los tres puntos distinguidos del eje (en la demostración vimos esto para uno de ellos).

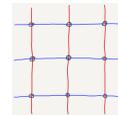
De tal manera que cada una de las tres parejas de triángulos (las dos *tapas* y el *de en medio*) están en perspectiva axial. De nuevo por el Teorema de Desargues, ahora en la otra dirección, tenemos que el triángulo *de en medio* está en perspectiva con las dos *tapas*...

y esto da dos nuevos puntos de perspectiva (verdes); que resultan estar alineados con el original. Y por ese nuevo eje (verde) pasan los otros tres *planos transversales* que se pueden formar con puntos de la configuración.

Los dos ejes son un par de líneas polares respecto a la superficie reglada y que no la tocan, caso que no habíamos visto en las figuras. ■

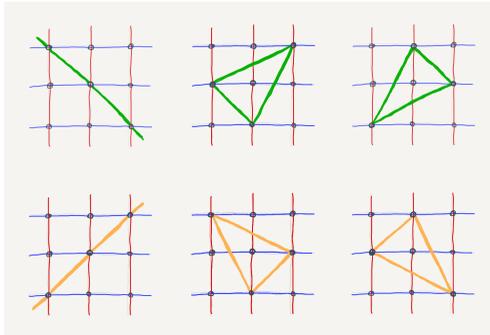
También conviene pensar a una configuración

de Dandelin en abstracto como una matriz de  $3 \times 3$ ; las columnas y los renglones son las líneas. Entonces, las nueve entradas dan lugar a 9 puntos y 9 planos (por intersección y generación de las reglas, respectivamente) que son parejas polares.



Llamemos *terna transversal* a tres de las entradas que cubran a todos los renglones y todas

las columnas. Entonces, correspondiendo a los sumandos de un determinante, tenemos que hay 6 ternas transversales que se parten naturalmente



en dos clases de equivalencia. Dos ternas de la misma clase no se intersectan y dos de clases distintas tienen una entrada en común.

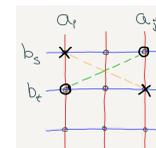
Cada terna transversal da lugar a un nuevo plano y a un nuevo punto de la configuración al pensar a las entradas como puntos y tomar el plano que generan o, respectivamente y de manera dual, al pensarlas como planos y tomar su intersección. El punto y el plano que surgen de una misma terna son polares según la superficie reglada.

Lo que vimos en la escena es que los tres planos de una clase de equivalencia tienen una línea en común (que es el *eje* de perspectiva axial de las parejas de triángulos) y que contiene a los tres puntos que surgen de la otra clase de equivalencia.

En las demostraciones se usa una y otra vez un hecho sobre las configuraciones de Dandelin, que es que las líneas que se obtienen como intersección de dos planos tangentes, se obtienen también como líneas entre dos puntos de la configuración.

**Lema 4** (de Dandelin). *Dadas reglas  $a_i, a_j$  en uno de los reglados de una superficie doblemente reglada, y  $b_s, b_t$  en el reglado opuesto, se tiene que*

$$(a_i \vee b_s) \wedge (a_j \vee b_t) = (a_i \wedge b_t) \vee (a_j \wedge b_s).$$



La demostración —que ya hemos usado— es que los dos puntos del lado derecho de la igualdad están en los dos planos del lado izquierdo; si ambos lados son líneas, tiene que ser la misma.  $\square$

### 5.3.2. El Teorema de Pascal

Cuenta la historia que Blaise Pascal (Francés, 1623–1662) demostró su famoso Teorema del Hexágono a la edad de 16 años. Sin embargo, sólo trascendió el enunciado pues su prueba se perdió. De tal manera que era muy natural buscar nuevas pruebas del teorema a principios del siglo XIX. En este contexto histórico es en el que Dandelin publica la demostración que damos a continuación.

**Teorema 15** (del Hexágono de Pascal). *Los lados opuestos de un hexágono inscrito en una curva armónica se cortan en tres puntos colineales.*

#### ESCENA 76. Presentación del Teorema de Pascal.

Nótese primero, que el enunciado no hace referencia alguna al orden cíclico que en la geometría real induce la curva en los seis puntos. Júéguese con ellos trastocando este orden cíclico; el teorema funciona siempre, aunque la *línea de Pascal* (la verde) y sus tres puntos se salgan con frecuencia de la pantalla. En particular, llevar la figura a un hexágono convexo (el más tradicional) manda a la

línea verde cerca de la línea ideal al infinito.

Lo que el enunciado nos da con la palabra *hexágono* es la estructura combinatoria de un ciclo: distinguir a seis parejas de puntos o *vértices*, que dan los *lados* o *aristas* del hexágono (y que definen seis líneas), de tal manera que cada vértice aparece justo en dos aristas y que al seguir el camino natural que esto produce: brincando de un vértice a otro usando las aristas como puentes... se circula por los seis vértices antes de retornar al del princi-

pio. Por ser seis un número par, se pueden pintar los vértices con dos colores que se alternan y... se pueden nombrar con dos ternas ordenadas de tal manera que los vértices opuestos se correspondan por el orden; conviene así, pues las aristas opuestas ya fueron distinguidas en el enunciado.

Además, esta notación de dos letras ( $A$  y  $B$ ) con subíndices para los vértices del hexágono que es la hipótesis del teorema, nos da nombres y fórmulas muy agradables para los tres *puntos de Pascal*:

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2), \\ P_2 &= (A_3 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_3), \\ P_3 &= (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Y lo que debemos demostrar es que éstos tres puntos están alineados. ■

Como ya dijimos, Dandelin trabaja duro en la construcción de una superficie doblemente reglada que tenga como sección a la cónica general de la hipótesis (y pensada a la antigüita); pero aquí, por nuestra definición de curva armónica (que en buena medida se inspiró en aquel trabajo), esto es

inmediato: existe una superficie reglada  $\mathcal{S}$ , tal que la curva armónica  $\mathcal{C}$  en la que está inscrito el hexágono es

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \Pi,$$

donde  $\Pi$  es el plano implícito en el que vive  $\mathcal{C}$ . Entonces, podemos considerar a la configuración de Dandelin a la que da lugar el hexágono bicolorado en  $\mathcal{C}$ . Por los puntos  $A_1, A_2, A_3$  de la curva  $\mathcal{C}$ , pasan reglas rojas  $a_1, a_2, a_3$ ; y los puntos  $B_1, B_2, B_3$ , están en las reglas azules  $b_1, b_2, b_3$

respectivamente. Hemos cambiado la notación para referirnos a las líneas de los dos reglados de  $\mathcal{S}$  con dos letras diferentes y usando subíndices para reglas distintas; así, conviene denotar  $\mathcal{R}_a$  al reglado rojo a cuyas reglas nos referimos como  $a_i$ , y como  $\mathcal{R}_b$  al reglado opuesto azul, con  $b_j \in \mathcal{R}_b$ .

### ESCENA 77. Demostración del Teorema de Pascal.

Regresando a la demostración del teorema, conviene cambiar a una imagen 3D que capture la estructura abstracta de la configuración de Dandelin

que nos dió la hipótesis.

Las líneas que se generan por vértices de distinto color en la curva, se pueden expresar ahora como la intersección con  $\Pi$  de un plano tangente a  $\mathcal{S}$ :

$$A_i \vee B_j = (a_i \vee b_j) \wedge \Pi,$$

para cualquier par de índices  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Veremos ahora que entonces los puntos de Pascal se pueden expresar como la intersección de una línea con el plano  $\Pi$ . Para el primero se tiene:

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2) \\ &= ((a_2 \vee b_3) \wedge \Pi) \wedge ((a_3 \vee b_2) \wedge \Pi) \\ &= ((a_2 \vee b_3) \wedge (a_3 \vee b_2)) \wedge \Pi \\ &= ((a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \Pi, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde se usa al Lema de Dandelin (4) en la última igualdad. Análogamente, se obtiene que

$$\begin{aligned} P_2 &= ((a_3 \wedge b_3) \vee (a_1 \wedge b_1)) \wedge \Pi, \\ P_3 &= ((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge \Pi. \end{aligned}$$

El teorema se sigue al considerar al plano genera-

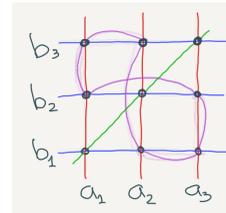
do por la terna transversal “diagonal” de la configuración de Dandelin; pues sus expresiones anteriores implican que los puntos de Pascal  $P_1, P_2, P_3$  están en la línea:

$$((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \Pi,$$

que es la línea de Pascal deseada. □

Es interesante señalar que la demostración usa a toda la configuración inicial (o “timbiriche”) de Dandelin. El hexágono de la hipótesis se “levanta”

a un hexágono “dual”, en el sentido de que por cada vértice, hay ahora una arista (la regla del mismo color) y por cada arista hay arriba un punto (cuyo plano asociado corto a  $\Pi$  en la línea correspondiente). Y al ser este levantamiento un ciclo bicolorado de tamaño seis dentro del timbiriche  $3 \times 3$ , deja una terna transversal libre que es la que produjo el plano para el corte decisivo.



Vamos a usar ahora al Teorema de Pascal para obtener un resultado muy socorrido y práctico sobre curvas armónicas.

### 5.3.2.1. La cónica por cinco puntos

La herramienta más común en los programas de geometría dinámica para definir cónicas, como en

*ProGeo3D*, es en la que se seleccionan 5 puntos y ¡pum! aparece una curva que pasa por ellos.

**Teorema 16** (Por 5 puntos ...). *Por cinco puntos en posición general en un plano pasa una única curva armónica.*

**Demostración.** Dados 5 puntos en un plano  $\Pi$ , debemos primero construir una superficie reglada que los contenga.

ESCENA 78. Curva armónica por 5 puntos.

Pintamos tres puntos de rojo y dos de azul. ... Por los azules, consideramos líneas generadoras (azules) que corten al plano  $\Pi$  en ellos.

Entonces, por los puntos rojos pasan líneas únicas que tocan a las dos azules y son generadoras dos a dos pues las azules lo son. Las pintamos de rojo y consideramos a la superficie reglada  $\mathcal{S}$  que generan éstas tres líneas.

Por definición,  $\mathcal{S}$  contiene a las dos líneas azules como reglas (tocan a las tres rojas); y tiene a las tres rojas en el reglado opuesto. Además, el plano  $\Pi$  no es un plano tangente pues al colocar 5 puntos en dos líneas, tres quedan en una y lo que *posición*

*general* quiere decir es que ninguna terna de puntos es colineal. Por lo tanto, la curva armónica

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \Pi$$

pasa por los cinco puntos.

Esto demuestra la existencia. ■

La unicidad tiene dos vertientes. La combinatoria que se resuelve fácil. No depende  $\mathcal{C}$  de qué par de puntos se escogieron como azules; pues para cualquier otro par, podemos escoger a las reglas

azules de  $\mathcal{S}$  que pasan por ellos y obtendremos a la misma superficie reglada. Y la unicidad geométrica: no depende de qué reglas azules se escojan en el espacio. Esto se sigue de que se puede construir la curva sin salirse nunca del plano y el Teorema de Pascal nos provee de una construcción tal.

#### ESCENA 79. Construcción de Pascal.

Dados cinco puntos en posición general en el plano...

se toma una trayectoria de longitud 4 con líneas

como aristas y ellos como vértices. Se le colorea y nombra de acuerdo a la demostración del Teorema de Pascal. Hemos escogido al punto rojo  $A_1$  como centro de la trayectoria; el azul (y opuesto en el hexágono por armarse)  $B_1$ , es quien falta y al que le tocará recorrer con brocha a la curva.

El primer punto de Pascal ya está determinado:

$$P_1 = (A_2 \vee B_3) \wedge (A_3 \vee B_2).$$

Del siguiente,  $P_2$ , sabemos que está en la línea  $A_1 \vee B_3$  y será el punto variable. Pues de él se obtiene la “línea de Pascal” y su tercer punto

$$P_3 = (A_1 \vee B_2) \wedge (P_2 \vee P_1),$$

y con esto ya obtenemos al sexto vértice que cierra al hexágono:

$$B_1 = (A_3 \vee P_2) \wedge (A_2 \vee P_3),$$

que al correr con parámetro  $P_2 \in (A_1 \vee B_3)$  dibuja la curva armónica deseada.  $\square$

EJERCICIO 110. Al dual del Teorema de Pascal se le conoce como el Teorema de Brianchon (lo demostró Charles Julien Brianchon (Francés, 1783–1864)). Enúncialo.

EJERCICIO 111. Demuestra el Teorema de Brianchon.

EJERCICIO 112. Haz la construcción dual de la Construcción de Pascal (Escena 79), a partir de cinco líneas (te conviene dibujarlas como pentágono convexo) para obtener el haz armónico que las contiene.

### 5.3.3. El Teorema de Pappus

**Teorema 17** (Pappus). *Los lados opuestos de un hexágono cuyos vértices caen alternadamente en dos líneas, se cortan en tres puntos colineales.*

#### ESCENA 80. Configuración de Pappus.

Por veteranía histórica, es claro que Pappus inspiró a Pascal. Y si además, etiquetamos a los puntos involucrados para hacer la similitud más evidente, veremos que las pruebas también son tan cercanas

como los enunciados. ■

La idea de la demostración será la misma que la del Teorema de Pascal. Primero, salir al espacio y construir una configuración de Dandelin cuyas líneas corten al plano en el que vive el hexágono de la hipótesis, en sus seis vértices y con los colores correspondientes. Pero como estos vértices ya no están en posición general, sino que ahora son dos ternas colineales, se deben incorporar a esas dos líneas como reglas de la superficie reglada.

#### ESCENA 81. Demostración del Teorema de Pappus.

Sean  $A_1, B_2, A_3, B_1, A_2, B_3$  los vértices del hexágono en su orden cíclico para que vértices opuestos en el hexágono reciban el mismo índice. Llamemos  $b_0$  y  $a_0$  a las líneas que contienen a las ternas alternadas de puntos del hexágono; de tal manera que  $A_1, A_2, A_3 \in b_0$  y  $B_1, B_2, B_3 \in a_0$ . Además, pintamos a los puntos  $A_i$  y a la línea  $a_0$  de rojo y a los  $B_j$  y a  $b_0$  de azul. Nótese que aparece un nuevo punto que hemos llamado  $O$  de “origen” ( $O = a_0 \wedge b_0 = A_0 = B_0$ ), y sea  $\Pi$  el plano en el que vive la configuración ( $\Pi = a_0 \vee b_0$ ).

Lo que debemos demostrar es que los tres pun-

tos “de Pappus-Pascal”:

$$P_i = (A_j \vee B_k) \wedge (A_k \vee B_j)$$

con  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  son colineales.

Pensando a  $\Pi$  como plano de  $\mathbb{D}^3$ , sean  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dos líneas rojas generadoras y que corten a  $\Pi$  en los puntos  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

Sea  $\mathcal{R}_b$  el reglado transversal azul a las líneas  $a_0, \alpha_1, \alpha_2$ ; es decir,

$$\mathcal{R}_b = \mathcal{RT}(a_0, \alpha_1, \alpha_2).$$

Tiene reglas  $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{R}_b$  que pasan por  $O = B_0, B_1, B_2, B_3 \in a_0$ , respectivamente.

Por último, sea  $\mathcal{R}_a$  el reglado que extiende a las líneas  $a_0, a_1, a_2$  —bien definido por el Axioma del Equipal—, y sea  $a_3 \in \mathcal{R}_a$  la regla que pasa por  $A_3 \in b_0$ . Vale la pena hacer notar que por la construcción de Hilbert-CohnVossen, se puede asegurar una línea por  $A_3$  que toque a otras dos de las reglas  $b_1, b_2, b_3 \in \mathcal{R}_b$ , pero en principio no estamos seguros de que también toque a la tercera; esto es lo que proporciona el Axioma del Equipal.

Ya tenemos una configuración de Dandelin relacionada con el hexágono de la hipótesis, y a partir de aquí, la demostración es *verbatim* la del Teorema de Pascal, pues si  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , el Lema de Dandelin nos da que

$$\begin{aligned} P_i &= (A_j \vee B_k) \wedge (A_k \vee B_j) \\ &= ((a_j \vee b_k) \wedge \Pi) \wedge ((a_k \vee b_j) \wedge \Pi) \\ &= ((a_j \vee b_k) \wedge (a_k \vee b_j)) \wedge \Pi \\ &= ((a_j \wedge b_j) \vee (a_k \wedge b_k)) \wedge \Pi. \end{aligned}$$

Y entonces, los tres puntos de Pappus-Pascal,  $P_1, P_2, P_3$  están en la línea

$$((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2) \vee (a_3 \wedge b_3)) \wedge \Pi;$$

porque de hecho, son donde los lados del triángulo “diagonal”  $((a_1 \wedge b_1)(a_2 \wedge b_2)(a_3 \wedge b_3))$  de la configuración de Dandelin, cortan al plano  $\Pi$ .  $\square$

### 5.3.3.1. El Teorema de Pappus y el Axioma del Equipal

Ya demostramos el Teorema de Pappus suponiendo válido al Axioma del Equipal. Por último, veremos lo que nos falta para probar que

**Teorema 18.** *El Axioma del Equipal es equivalente al Teorema de Pappus.*

Y por tanto, que la misma teoría se puede desarrollar suponiendo a este teorema clásico como axioma, y hay aún otros dos enunciados importantes con esta misma propiedad, que se refieren a las temáticas que abordaremos en los Capítulos 6 y 7.

Lo que nos queda por demostrar es:

- *Si el Teorema de Pappus vale en los planos, entonces se cumple el Axioma del Equipal.*

**Demostración.** La demostración consiste de dos partes, la primera es traducir el Axioma del Equipal a un enunciado más técnico y preciso, íntimamente relacionado con la configuración de la escena anterior, y entonces sí: usar el Teorema de Pappus.

Sean  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  tres líneas rojas en posición general. Para ver que el Axioma del Equipal es válido, debemos demostrar que se extienden a un único reglado. Sea

$$\mathcal{R}_b = \mathcal{RT}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$$

su reglado transversal; consiste de todas las líneas que tocan a las tres, y las pintamos de azul. Tenemos que demostrar que si tomamos dos ternas de reglas en  $\mathcal{R}_b$ , los reglados transversales que generan son el mismo (ésto es el Axioma del Equipal). Para lo cual, consideremos una terna fija  $b_0, b_1, b_2 \in \mathcal{R}_b$ , y sea

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{RT}(b_0, b_1, b_2);$$

es un reglado de reglas rojas que extiende a  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_a$ .

Afirmamos que basta probar que

$$b_3 \in \mathcal{R}_b \text{ y } \alpha_3 \in \mathcal{R}_a \Rightarrow \alpha_3 \wedge b_3 \neq \emptyset, \quad (5.6)$$

para que  $\mathcal{R}_a$  sea único. Pues al variar  $\alpha_3$  en  $\mathcal{R}_a$ , este último enunciado (5.6) implica que

$$\mathcal{R}_a = \mathcal{RT}(b_0, b_1, b_2) = \mathcal{RT}(b_0, b_1, b_3),$$

ya que ambos reglados están parametrizados por los puntos en  $b_0$ . Y si podemos cambiar arbitrariamente una de las reglas azules sin alterar el reglado transversal (que extiende a  $a_0, a_1, a_2$ ) entonces en tres pasos podemos cambiar de  $b_0, b_1, b_2$  a cualquier terna de reglas azules en  $\mathcal{R}_b$  sin que se altere su reglado transversal; es decir, éste se mantiene igual en cada paso.

Así que, el escenario que armamos para la demostración del Teorema de Pappus es justo el que ahora debemos considerar:

#### ESCENA 82. T. Pappus implica A. Equipal.

Nos queda por demostrar (5.6), es decir, que si

$$\begin{aligned} b_0, b_1, b_2, b_3 &\in \mathcal{RT}(a_0, a_1, a_2) = \mathcal{R}_b \\ \text{y } a_0, a_1, a_2, a_3 &\in \mathcal{RT}(b_0, b_1, b_2) = \mathcal{R}_a \\ \text{entonces } a_3 &\text{ toca a } b_3. \end{aligned}$$

Sean  $O = a_0 \wedge b_0$ ; y para  $i = 1, 2, 3$ , sean:

$$A_i = a_i \wedge b_0 \quad \text{y} \quad B_i = a_0 \wedge b_i.$$

Podemos entonces aplicar el Teorema de Pappus en el plano  $\Pi = a_0 \vee b_0$ , para obtener que

$$\begin{aligned} P_i &= (A_j \vee B_k) \wedge (A_k \vee B_j) \\ &= ((a_j \vee b_k) \wedge (a_k \vee b_j)) \wedge \Pi, \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, 3$  y  $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ , son puntos colineales. Llamemos  $p \subset \Pi$  a la “línea de Pappus” que los contiene ( $p = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ ).

Sea

$$\ell_3 = (a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2).$$

Por el Lema de Dandelin (4), se tiene que

$$\begin{aligned}\ell_3 \wedge \Pi &= ((a_1 \wedge b_1) \vee (a_2 \wedge b_2)) \wedge \Pi \\ &= ((a_1 \vee b_2) \wedge (a_2 \vee b_1)) \wedge \Pi \\ &= (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) = P_3.\end{aligned}$$

Y por lo tanto el plano “diagonal”

$$\Delta = p \vee \ell_3$$

está bien definido pues  $P_3 = p \wedge \ell_3$ .

Sean  $\ell_1 = P_1 \vee (a_2 \wedge b_2)$ ,  $\ell_2 = P_2 \vee (a_1 \wedge b_1)$  y  $W = \ell_1 \wedge \ell_2$  que es un punto pues  $\ell_1$  y  $\ell_2$  están en el plano  $\Delta$  (ésta es la gran aportación del Teorema de Pappus).

Vamos a probar que  $W \in a_3$  y  $W \in b_3$  para concluir que estas dos líneas también se tocan y con eso, se completa la demostración del teorema.

Consideremos los planos  $\Delta$ ,  $a_3 \vee b_1$ ,  $a_3 \vee b_2$ . Se cortan por pares en las líneas:

$$\begin{aligned}\Delta \wedge (a_3 \vee b_1) &= P_2 \vee (a_1 \wedge b_1) = \ell_2 \\ (a_3 \vee b_1) \wedge (a_3 \vee b_2) &= a_3 \\ \Delta \wedge (a_3 \vee b_2) &= P_1 \vee (a_2 \wedge b_2) = \ell_1;\end{aligned}$$

y como tres planos tienen un punto en común, este tiene que ser  $W = \ell_2 \wedge \ell_1$ . Por lo tanto  $W \in a_3$ .

Análogamente, los planos  $\Delta$ ,  $a_1 \vee b_3$ ,  $a_2 \vee b_3$ , tienen como intersecciones a  $\ell_2$ ,  $b_3$ ,  $\ell_1$  y como vértice común a  $W$ ; por lo tanto  $W \in b_3$ .  $\square$

Con esto se cierra el ciclo de formalidad en la Parte II del libro. Todo ha quedado debidamente demostrado y la suposición extra que se hizo ya tiene dos enunciados que a primera vista no parecían estar relacionados.

# Bibliografía

- [1] J. L. Abreu, J. Bracho, ProGeo3D; a dynamic geometry system.  
<https://descartes.matem.unam.mx/ejemplos/pg3d/index.html> (2016-2022).
- [2] L. B. Alberti, Della Pittura (1434); On Painting, *Penguin Classics* (1972) ISBN 978-0-14-043331-9.
- [3] Apollonius of Perge: T.L. Heath, Treatise on Conic Sections, *Cambridge University Press* (1896).
- [4] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry, (2nd ed.), *Springer New York* (1987), ISBN 978-0-387-40623-7.
- [5] G. P. Dandelin, Memoire sur l'hyperboloïde de révolution, et sur les hexagones de Pascal et de M. Brianchon, *Nouveau memoires de l'Académie Royale de Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, T II, p. 3-16, (1826).
- [6] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, *AMS Chelsea Publishing* (1952, 1983, 1990).
- [7] D. N. Lehmer, An Elementary Course in Synthetic Projective Geometry, *CRC Press* (2018).

- [8] A. Radillo, J.L. Abreu, J. Bracho, J. Espinosa, Documentación de ProGeo3D.  
<https://descartes.matem.unam.mx/doc/pg3d/pg3d.pdf>
- [9] J. Stillwell, *Yearning for the impossible: the surprising truths of mathematics*, AK Peters (2006); CRC Press (2018).
- [10] O. Veblen, J. W. Young, *Projective Geometry*, Ginn and Company, Boston (1910-1918).
- [11] K. G. C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Verñag der Fr. Korn'schen Buchhandlung, Nürnberg (1847).
- [12] Hermann Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.