Interactive Educational Units in Mathematics Education

by

José Luis Abreu León

Instituto de Matemáticas (IMATE), U.N.A.M.
Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa (LITE)

México

The document:

MATHEMATICS EDUCATION IN LATIN AMERICA AND THE CARIBBEAN:
A REALITY TO BE TRANSFORMED,

contains some important conclusions of which I want to point out two:

1) The role of mathematicians in education has been small or non-existent.

2) Mathematicians can play a ***greater*** role in teacher training, provided that care is taken in their approach.

I don't agree entirely with the first one, but I do agree strongly with the second one, especially if we replace ***greater*** for ***better***.

1) The role of mathematicians in education has been small or non-existent.

Unfortunately this is not completely true.

We must remember the shameful episode of the ***New Math*** in the 60s and 70s. It had some devastating effects in Math Education around the World, from which many countries have not yet fully recovered.

This is an example of how we, professional mathematicians, can do a lot of harm when we are carless and irresponsible.

As a result of this sad experience, mathematicians have been alienated from education since the seventies. And yes, they have had very little influence in Math Education ever since.

2) Mathematicians can play a ***better*** role in teacher education and training, provided that care is taken in their approach.

Yes, they can and they should, but we must emphasize the

care

I believe we should limit ourselves to providing mathematical content and resources and some help in the mathematical aspects of teacher training. What we can do is help them understand better what they must teach.

We should ***not*** tell teachers how to teach.

The document also contains some recommended steps to follow, one of which is:

• Using information and communication technologies (ICT) to make more resources available for teachers and students.

Notice that in the document there are several specific actions proposed but no one related to this recommended step.

My purpose in this presentation is to make a concrete proposal for applying ICT's in Math teacher training.

There are many ways to use ICT's in education, and particularly in Math education. The one I have explored during more than 20 years is the use of

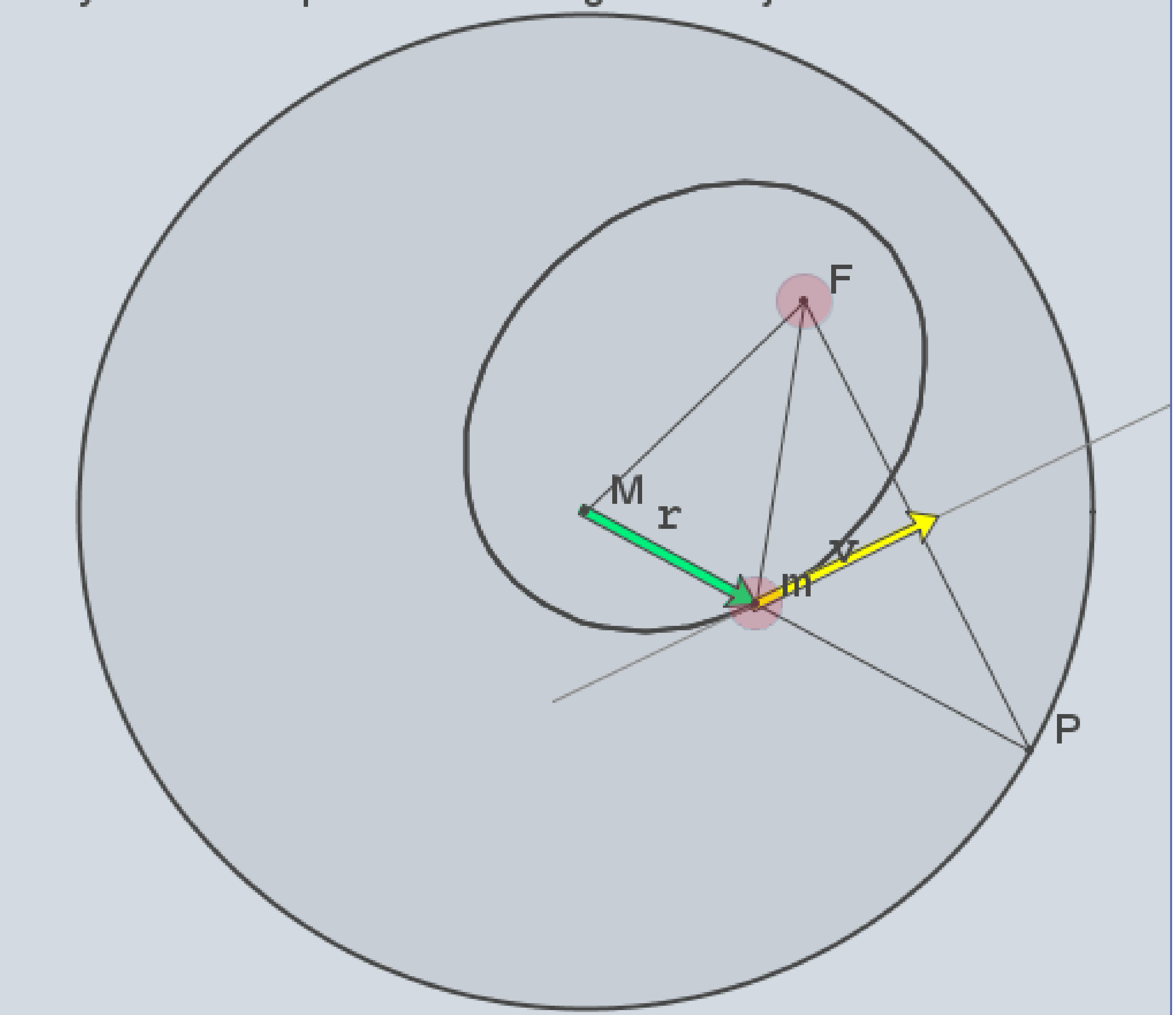
Interactive Educational Units

I'll show some examples, explain my involvement in this subject, and make a direct proposal.

First one example for all to enjoy...

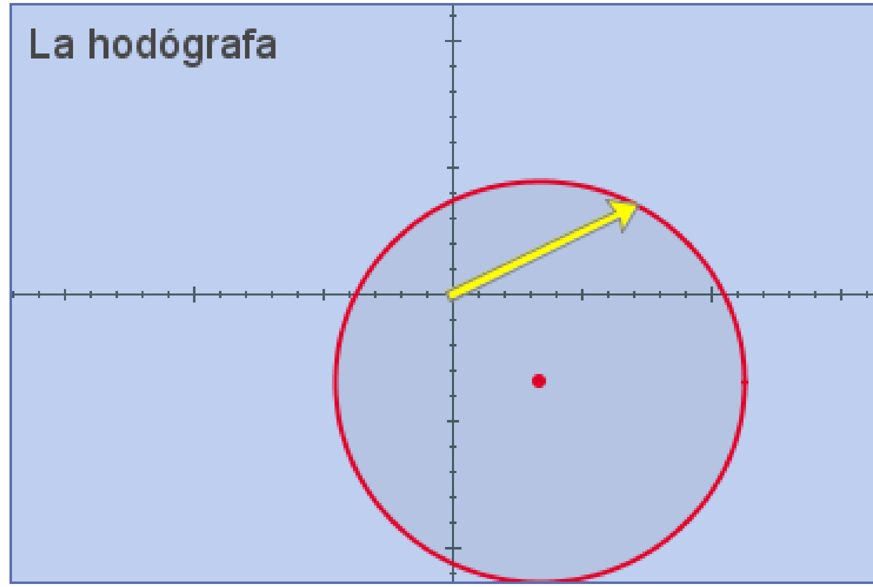
Construcción de la trayectoria dadas la posición y la velocidad

Trayectorias elípticas con energía total fija



Moviendo el foco cambia la trayectoria. Moviendo m, se recorre.

La hodógrafa



Una construcción de la elipse

Con centro en un punto M, trazamos una circunferencia de radio R. Sea F un punto cualquiera del interior de la circunferencia, distinto de M. Construyamos la elipse con focos M y F, tal que la suma de las distancias de sus puntos a los focos sea igual a R.

Teorema:

Sean:

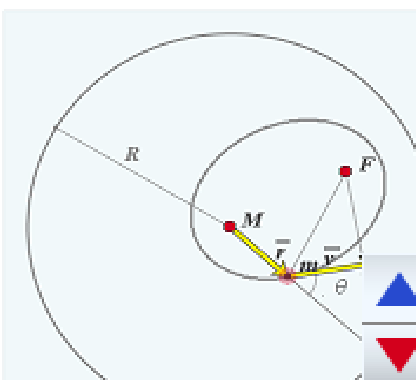
$f = |\overline{MF}|$, es decir, la distancia entre los focos de la elipse,

m un punto cualquiera de la elipse,

$\bar{r} = \overline{Mm}$ y $r = |\overline{Mm}|$,

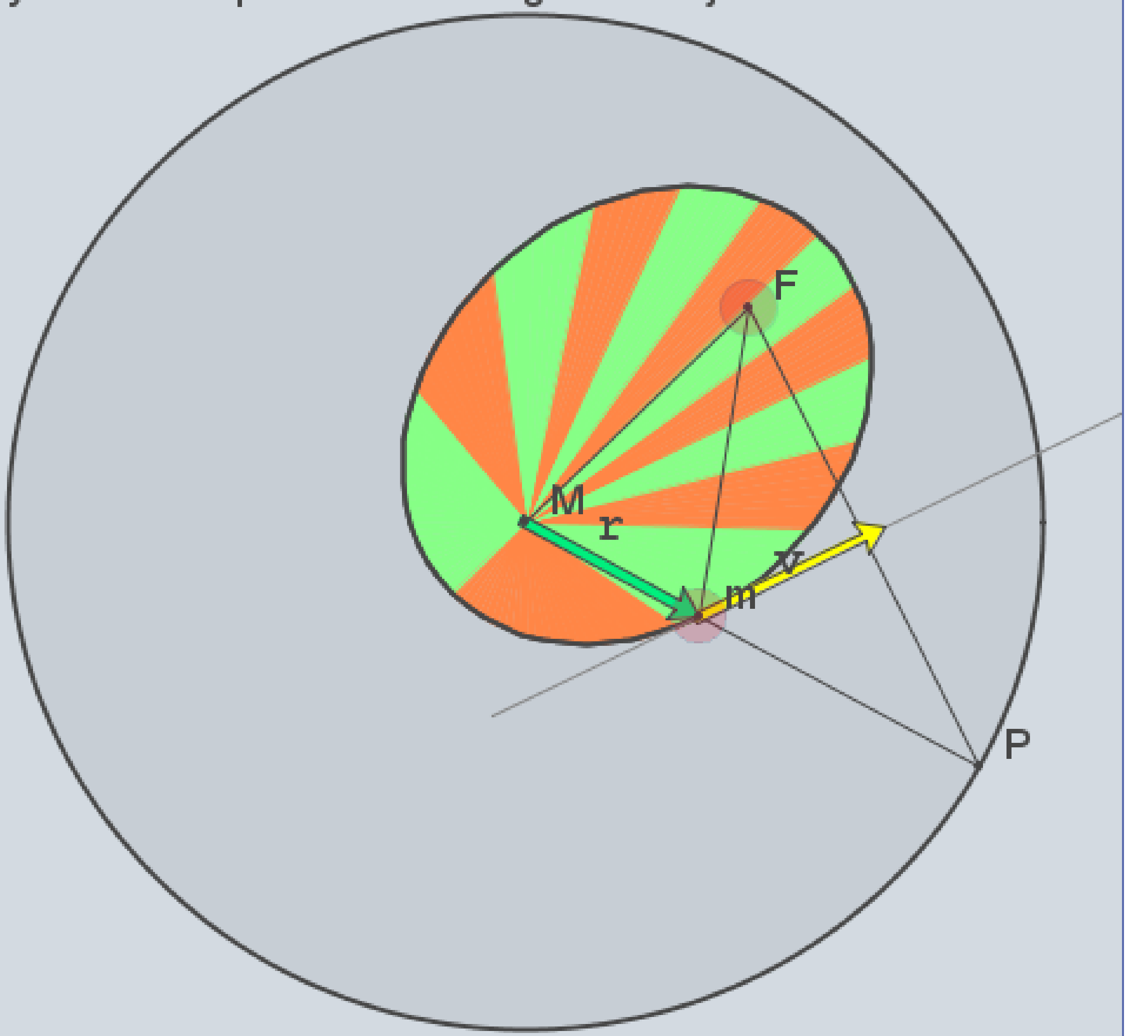
P el punto de intersección de la recta por M y m, con la circunferencia de radio R,

$\bar{q} = \overline{FP}$ y $q = |\overline{FP}|$.



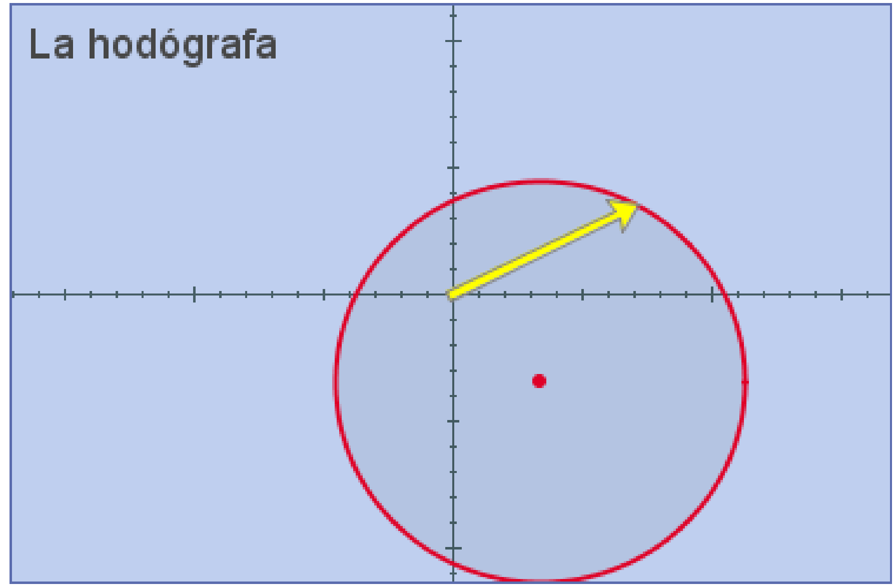
Construcción de la trayectoria dadas la posición y la velocidad

Trayectorias elípticas con energía total fija



2ª Key de Kepler, áreas iguales en tiempos iguales.

La hodógrafa



Una construcción de la elipse

Con centro en un punto M, trazamos una circunferencia de radio R. Sea F un punto cualquiera del interior de la circunferencia, distinto de M. Construyamos la elipse con focos M y F, tal que la suma de las distancias de sus puntos a los focos sea igual a R.

Teorema:

Sean:

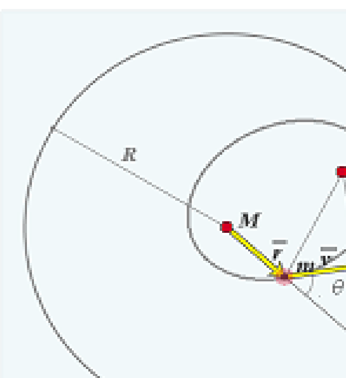
$f = |\overline{MF}|$, es decir, la distancia entre los focos de la elipse,

m un punto cualquiera de la elipse,

$\bar{r} = \overline{Mm}$ y $r = |\overline{Mm}|$,

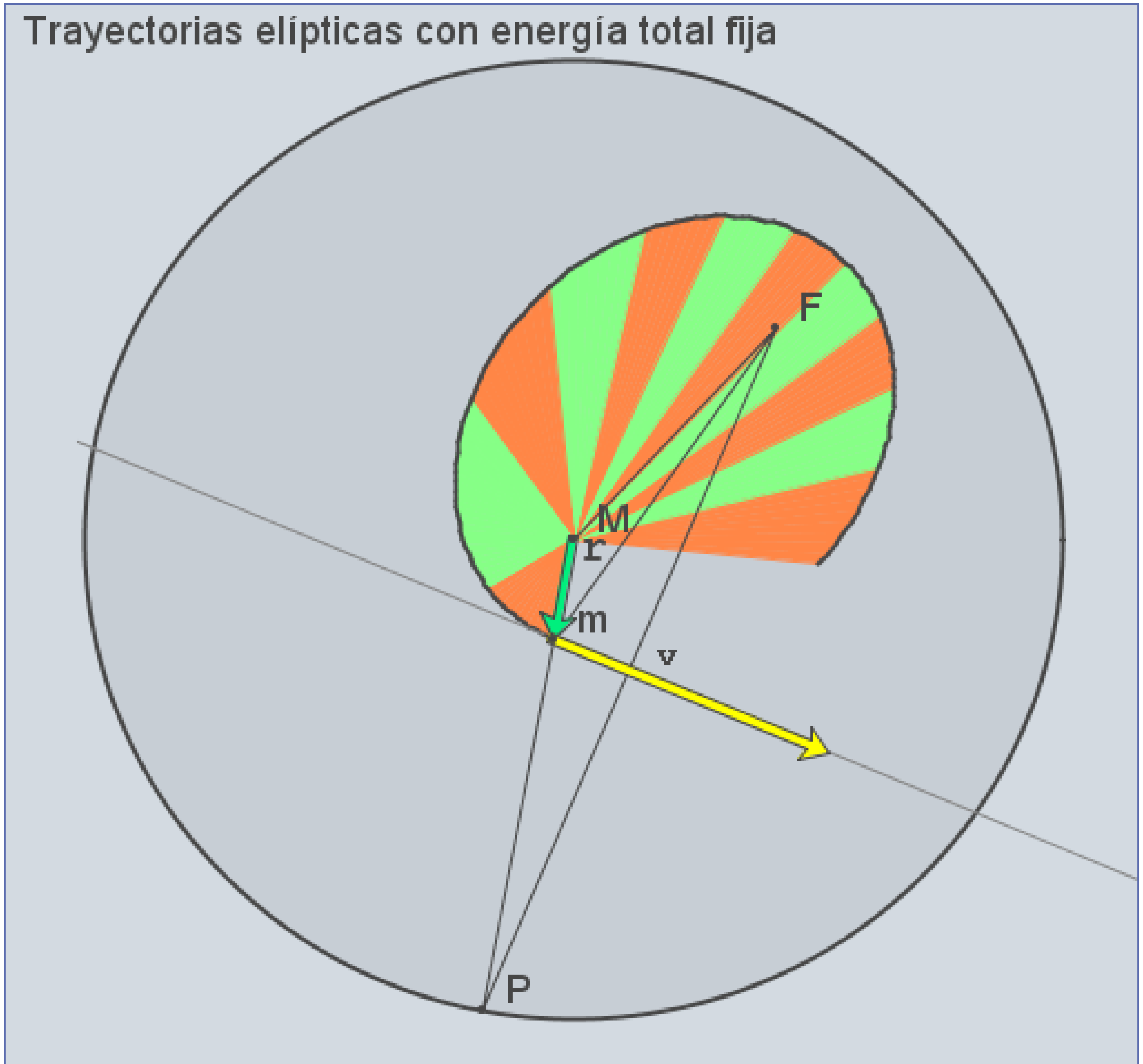
P el punto de intersección de la recta por M y m, con la circunferencia de radio R,

$\bar{q} = \overline{FP}$ y $q = |\overline{FP}|$.

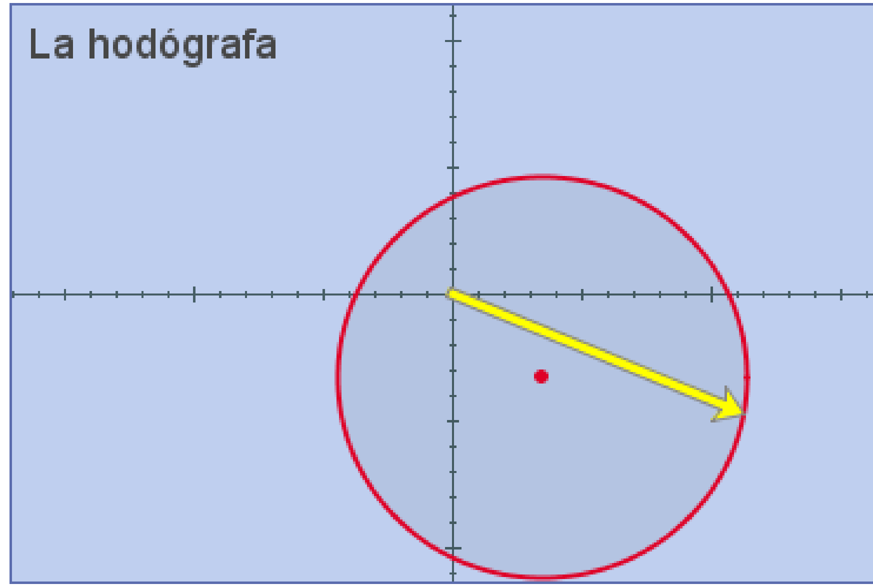


Construcción de la trayectoria dadas la posición y la velocidad

Trayectorias elípticas con energía total fija



La hodógrafa



Con centro en un punto M, trazamos una circunferencia de radio R. Sea F un punto cualquiera del interior de la circunferencia, distinto de M. Construyamos la elipse con focos M y F, tal que la suma de las distancias de sus puntos a los focos sea igual a R.

Teorema:

Sean:

$f = |\overline{MF}|$, es decir, la distancia entre los focos de la elipse,

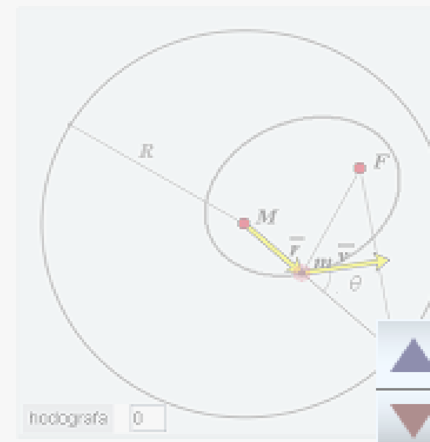
m un punto cualquiera de la elipse,

$\bar{r} = \overline{Mm}$ y $r = |\overline{Mm}|$,

P el punto de intersección de la recta por M y m, con la circunferencia de radio R,

$\bar{q} = \overline{FP}$ y $q = |\overline{FP}|$,

θ el ángulo formado por r y v.



Texto | Zonas | vel - Foco | Hodógrafa | Animar | Limpiar

Construcción de la trayectoria dadas la posición y la velocidad

Sean:

$f = |\overline{MF}|$, es decir, la distancia entre los focos de la elipse,

m un punto cualquiera de la elipse,

$\bar{r} = \overline{Mm}$ y $r = |\overline{Mm}|$,

P el punto de intersección de la recta por M y m, con la circunferencia de radio R,

$\bar{q} = \overline{FP}$ y $q = |\overline{FP}|$.

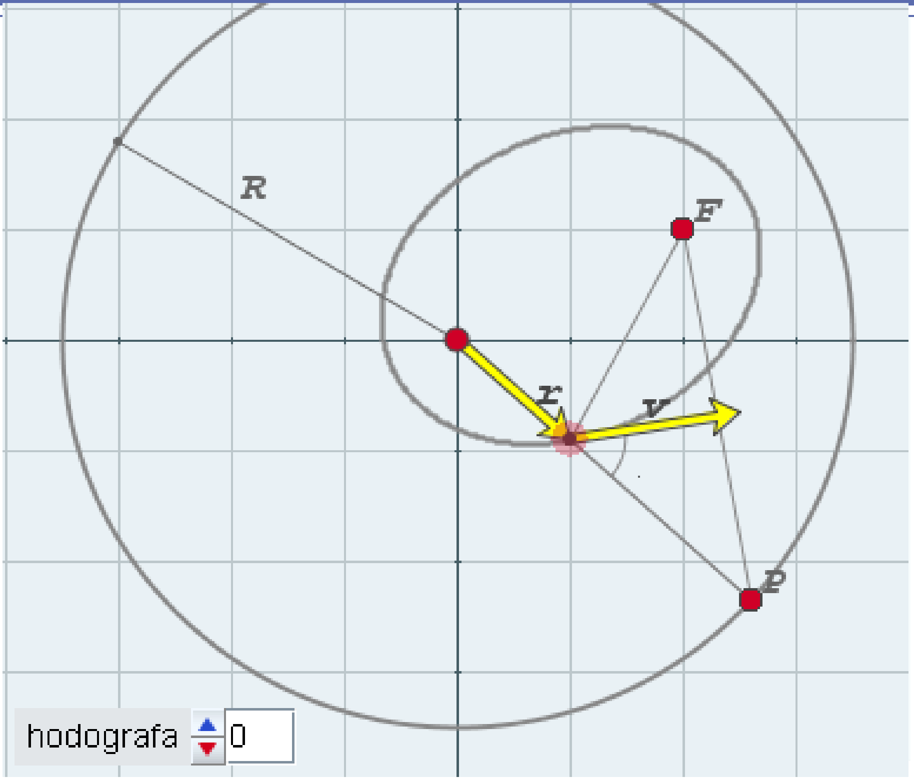
θ el ángulo formado por r y v.

Entonces:

$$q^2 = \frac{(R^2 - f^2)(R - r)}{r} \qquad (1)$$

y

$$r\, q\, \mathrm{sen}\ \theta = \frac{R^2 - f^2}{2} \qquad (2)$$



I believe the use of Technology in the classroom and for independent study, opens an important oportunity for mathematicians to help improve Mathematics education, by participating in the elaboration of high quality interactive units or lessons that can be used by teachers and students.

Teachers may clarify their concepts and deepen their understanding of the subject.

Students may use them for independent study and practice and as a form of having some contact with the way mathematicians think and explain their subject matter.

There are many ways to use ICT's in education, and particularly in Math education. The one I have explored during more than 20 years is the use of

Interactive Educational Units

I'll show some examples, explain my involvement and experience in this area, and make a concret proposal.

How can Technology help to improve Math Education?

- Atraction and Motivation
- Concept formation and formalization
- Exercises
- Autoevaluation
- Problem solving
- Concentration on specific aspects
- Exploring mathematical objects
- Mathematical simulations
- Illustrations of theorems and proofs

We will see some examples of how this is done.

Interactive Units in Math Education

Atraction and Motivation

El Capitán Bravura es un héroe de cómic en apuros. Su autor ha olvidado las normas de ortografía de la b y la v y no puede utilizar sus poderes. ¡Ayúdale!

¿Qué voy a hacer?

Ya no puedo invocar mi poder

de invisibilidad, no puedo volar,

ni inventar nuebos artilugios para luchar

contra mis adbersarios.

Me he conbertido en alguien bulnerable.

¿Es el final del Capitán Vravura?

¿Cómo sería la vida del Capitán Bravura sin dudas ortográficas?

Comprobar

Jordi y Maribel no logran entender por qué obtienen diferentes resultados. Observa sus operaciones y ayúdales a resolver este problema.

$$6 + 2 \times 7 - 45 \div 9$$

15

Si quieres ver cómo ha hecho sus cálculos Jordi o Maribel, pulsa el botón con su nombre

16

Jordi

Maribel

Interactive Units in Math Education

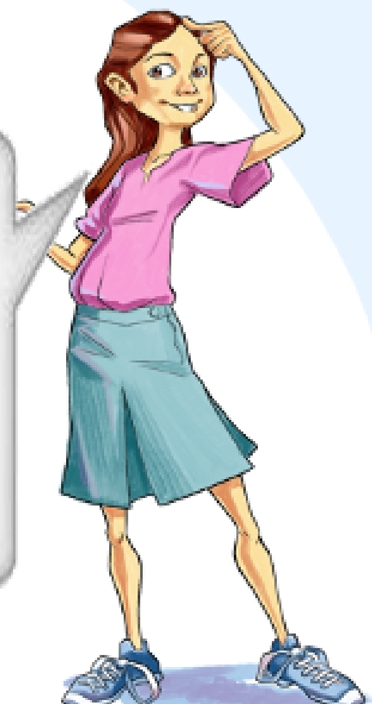
Atraction and Motivation

Jordi y Maribel no logran entender por qué obtienen diferentes resultados. Observa sus operaciones y ayúdales a resolver este problema.

$$6 + 2 \times 7 - 45 \div 9$$

15

$$6 + 2 \times 7 - 45 \div 9$$
$$6 + 14 - 45 \div 9$$
$$6 + 14 - 5$$
$$20 - 5$$
$$15$$



16

$$6 + 2 \times 7 - 45 \div 9$$
$$6 + 2 \times 7 - 5$$
$$8 \times 7 - 5$$
$$8 \times 2$$
$$16$$

Jordi

¿Qué pasa?

Maribel

Atraction and Motivation

Jordi y Maribel no logran entender por qué obtienen diferentes resultados. Observa sus operaciones y ayúdales a resolver este problema.

$6 + 2 \times 7 - 45 \div 9$

15

16

¿Se equivocó Jordi en alguna operación?
¿Se equivocó Maribel en alguna operación?
¿Hicieron las operaciones en distinto orden?
¿Alguno de los dos lo hizo bien?

Cerrar

Jordi | ¿Qué pasa? | Maribel

Ayúdale a Maribel a encontrar el orden correcto para resolver las operaciones y obtener el resultado indicado

$9 - 6 \div 3 + 1$ debe dar 8

Otro ejemplo

Otro orden

Resumen

Interactive Units in Math Education

Concept formation and formalization

Ayúdale a Maribel a encontrar el orden correcto para resolver las operaciones y obtener el resultado indicado

$9 - 6 \div 3 + 1$ debe dar 8

Restar	$3 \div 3 + 1$
Dividir	$1 + 1$
Sumar	2
✗	$2 \neq 8$

¿Hiciste primero las multiplicaciones y divisiones y luego las sumas y restas?
¿Hiciste las operaciones de izquierda a derecha?

Otro ejemplo **Otro orden** **Resumen**

Ayúdale a Maribel a encontrar el orden correcto para resolver las operaciones y obtener el resultado indicado

9 − 6 ÷ 3 + 1 debe dar 8

Dividir	9 − 2 + 1
Restar	7 + 1
Sumar	8
✓	8 = 8

Otro ejemplo | Otro orden | Resumen

Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa

Interactive Units in Math Education

Concept formation and formalization

Ayúdale a Maribel a encontrar el orden correcto para resolver las operaciones y obtener el resultado indicado

9 − 6 ÷ 3 + 1 debe dar 8

La jerarquía de operaciones son reglas que nos dicen en qué orden deben hacerse las operaciones para obtener con seguridad el resultado correcto.

Forma la regla de acuerdo a lo que exploraste.

Las [multiplicaciones] y [divisiones] se hacen antes que las [sumas] y las [restas].

Verificar

Otro ejemplo | Otro orden | Resumen

Concept formation and formalization

Ayúdale a Maribel a encontrar el orden correcto para resolver las operaciones y obtener el resultado indicado

$9 - 6 \div 3 + 1$ debe dar 8

Cuando se están haciendo las multiplicaciones y divisiones éstas deben realizarse

de izquierda a derecha ✓

Cuando sólo quedan sumas y restas éstas deben realizarse

de izquierda a derecha ✓

Cerrar

Otro ejemplo | Otro orden | Resumen

Exercises

**Jordi y Maribel compiten haciendo operaciones muy rápidamente.
Selecciona el botón que indica quién obtuvo el resultado correcto.**

$$6 + 7 \times 4 - 9 \div 3$$

13

31

¿Quién obtuvo el resultado correcto?

Jordi

Maribel

Ambos

Ninguno

Interactive Units in Math Education

Exercises

Jordi y Maribel compiten haciendo operaciones muy rápidamente. Selecciona el botón que indica quién obtuvo el resultado correcto.

$6 + 7 \times 4 - 9 \div 3$

13

31

Efectivamente, porque hizo primero todas las multiplicaciones y divisiones y luego las sumas y restas de izquierda a derecha

Cerrar

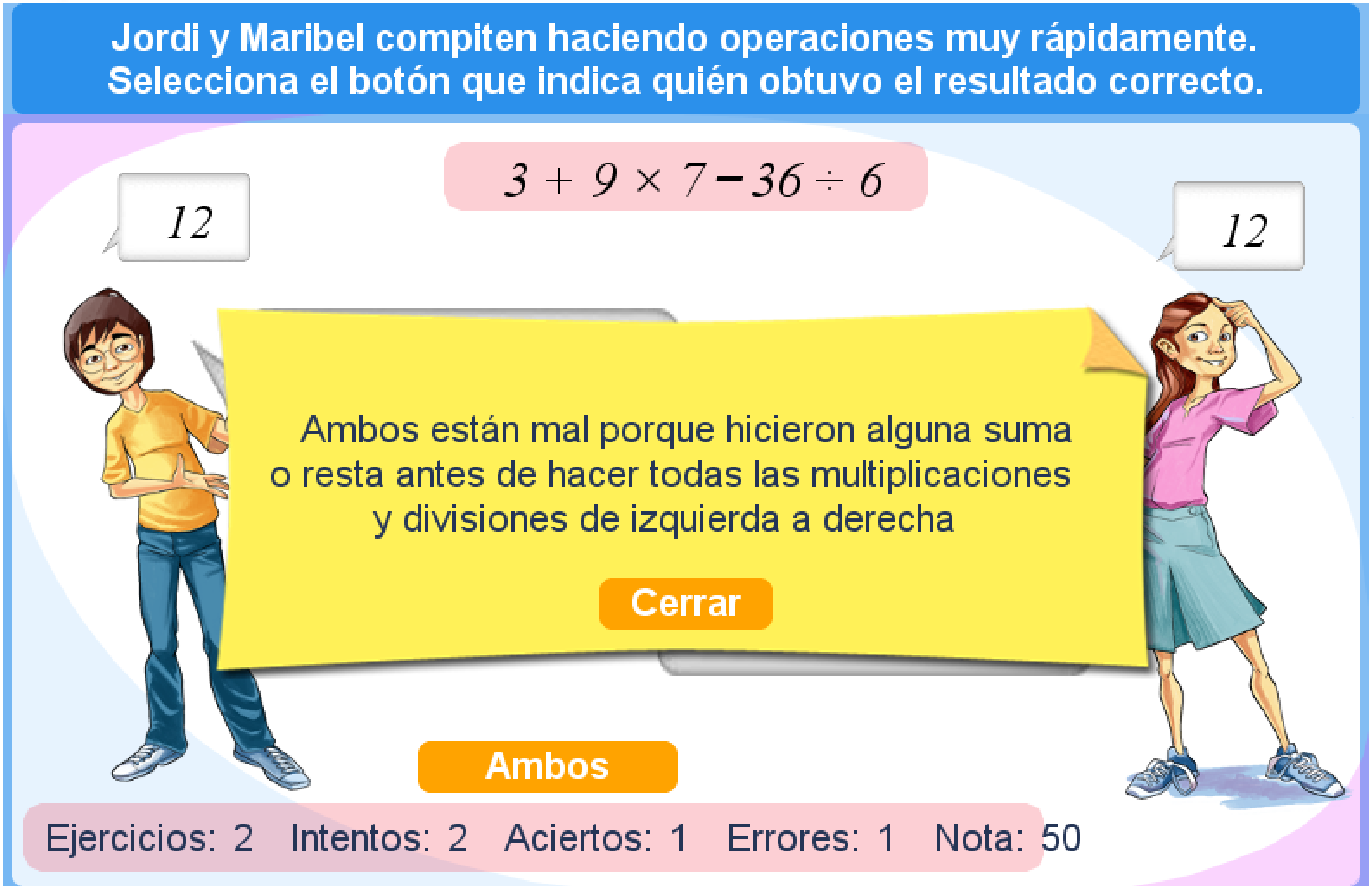
Maribel

Ejercicios: 1 Intentos: 1 Aciertos: 1 Errores: 0 Nota: 10

Otro ejercicio

Interactive Units in Math Education

Exercises



Interactive Units in Math Education

Exercises

Jordi y Maribel compiten haciendo operaciones muy rápidamente. Selecciona el botón que indica quién obtuvo el resultado correcto.

$$4 + 8 \times 5 - 21 \div 7$$

24

20

¿Quién obtuvo el resultado correcto?

Jordi

Maribel

Ambos

Ninguno

Ejercicios: 5 Intentos: 5 Aciertos: 4 Errores: 1 Nota: 80

Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa

Interactive Units in Math Education

Autoevaluation

Resuelve los siguientes ejercicios, respetando la jerarquía de las operaciones, al terminar presiona el botón Verificar

1) Realiza las operaciones indicadas en la expresión respetando la jerarquía de las operaciones.

$7 - 3 \div 1 \times 2 =$ 8 ✗

$9 - 8 \div 4 + 6 =$ 13 ✓

$3 \times 7 - 4 + 2 =$ 19 ✓

2) Selecciona los operadores necesarios para que el resultado sea el valor indicado.

10	$6 + 6 \div 3 + 2 =$ 10	✓
5	$5 \times 4 \div 2 \div 2 =$ 5	✓

Verificar

Otra evaluación

Evaluaciones: 1
Media= 80

Buenas= 4 Malas= 1
Nota= 80

Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa

Interactive Units in Math Education

Autoevaluation

Resuelve los siguientes ejercicios, respetando la jerarquía de las operaciones, al terminar presiona el botón Verificar

1) Realiza las operaciones indicadas en la expresión respetando la jerarquía de las operaciones.

$9 \times 9 - 3 + 4 = 82$ ✓

$5 + 3 \div 1 \times 9 = 32$ ✓

$9 \times 7 - 4 + 1 = 60$ ✓

2) Selecciona los operadores necesarios para que el resultado sea el valor indicado.

48	$6 \times 9 - 4 - 2 = 48$	✓
15	$8 + 4 - 4 + 7 = 15$	✓

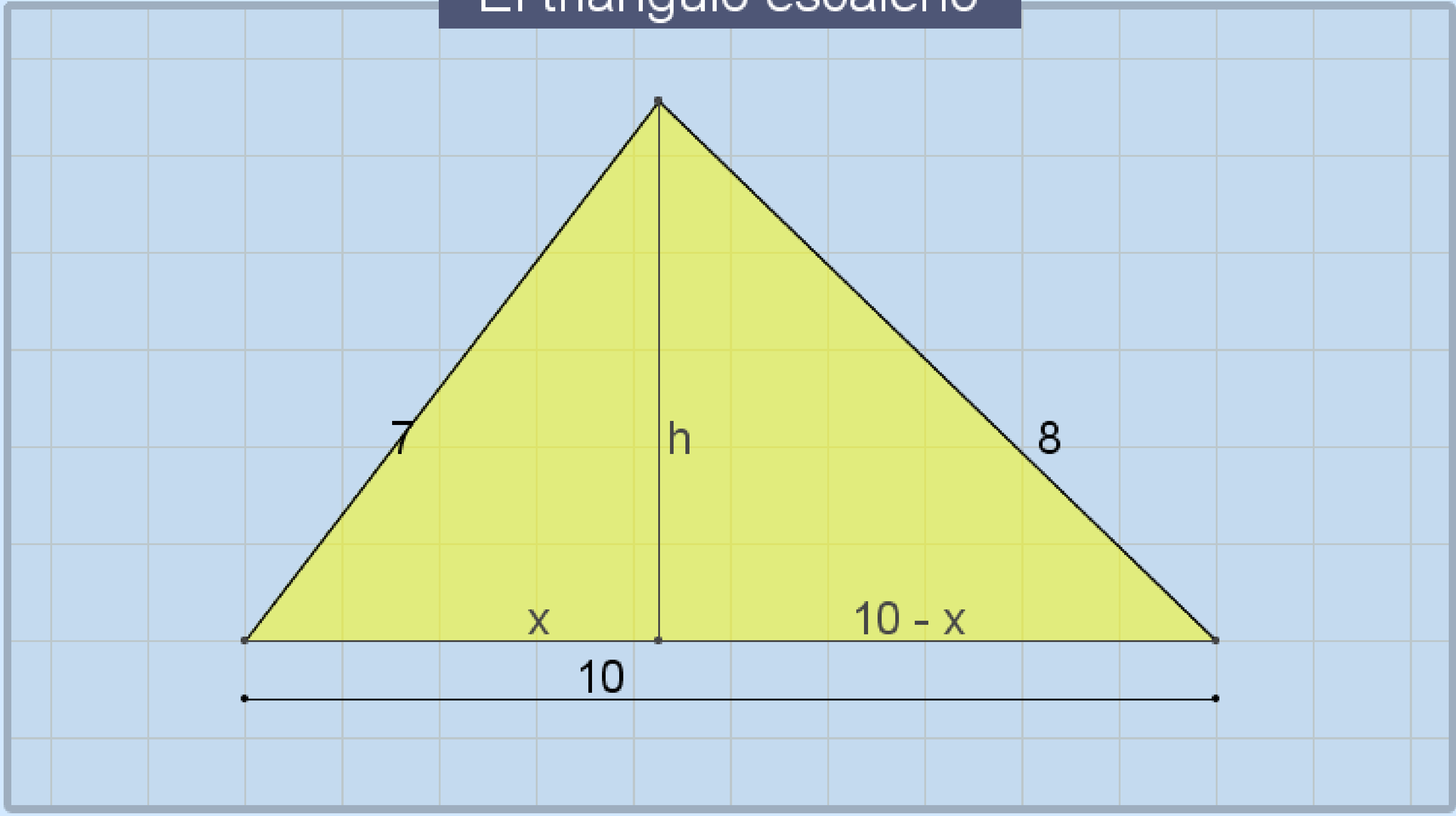
Verificar

Otra evaluación

Evaluaciones: 2
Media= 90

Buenas= 5 Malas= 0
Nota= 100

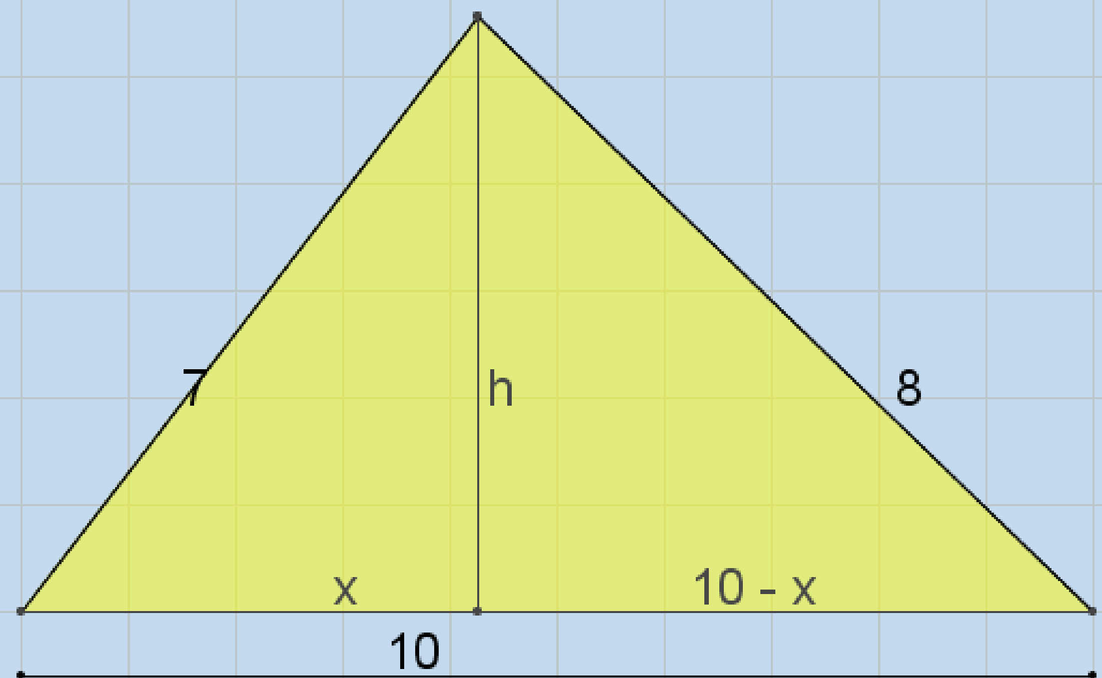
El triángulo escaleno



Para calcular el área del triángulo de lados 10, 8 y 7 se puede proceder de varias maneras. Pero la que requiere de matemáticas más simples y menos cálculos es ésta:

Partimos el triángulo por su altura h perpendicular al lado que mide 10. Sea x el cateto adyacente a la hipotenusa que mide 7. Esto nos da dos triángulos rectángulos, uno con

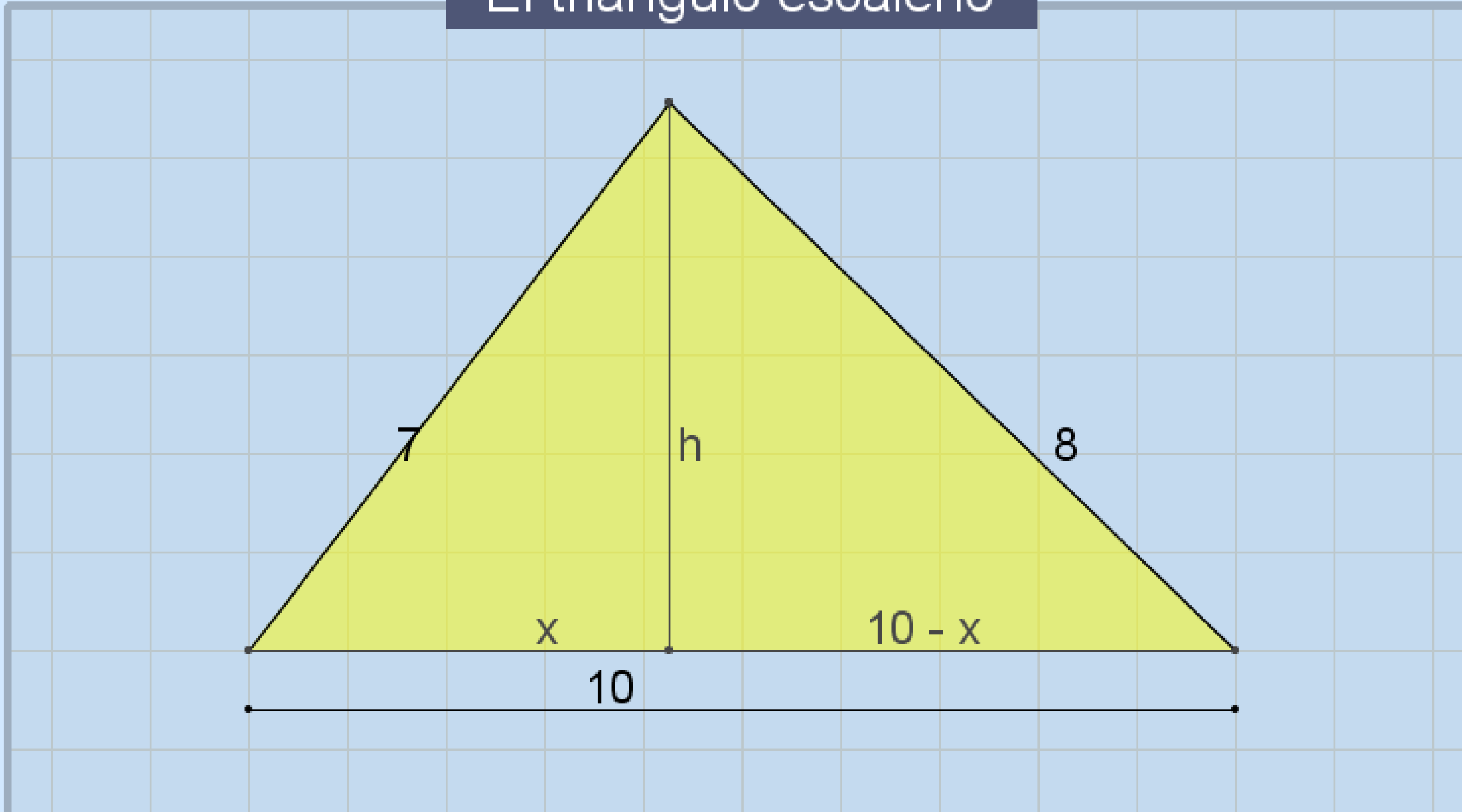
El triángulo escaleno



Para obtener los valores de x y h, planteamos un sistema de dos ecuaciones:

$$x^2 + h^2 = 7^2$$
$$(10 - x)^2 + h^2 = 8^2$$

El triángulo escaleno

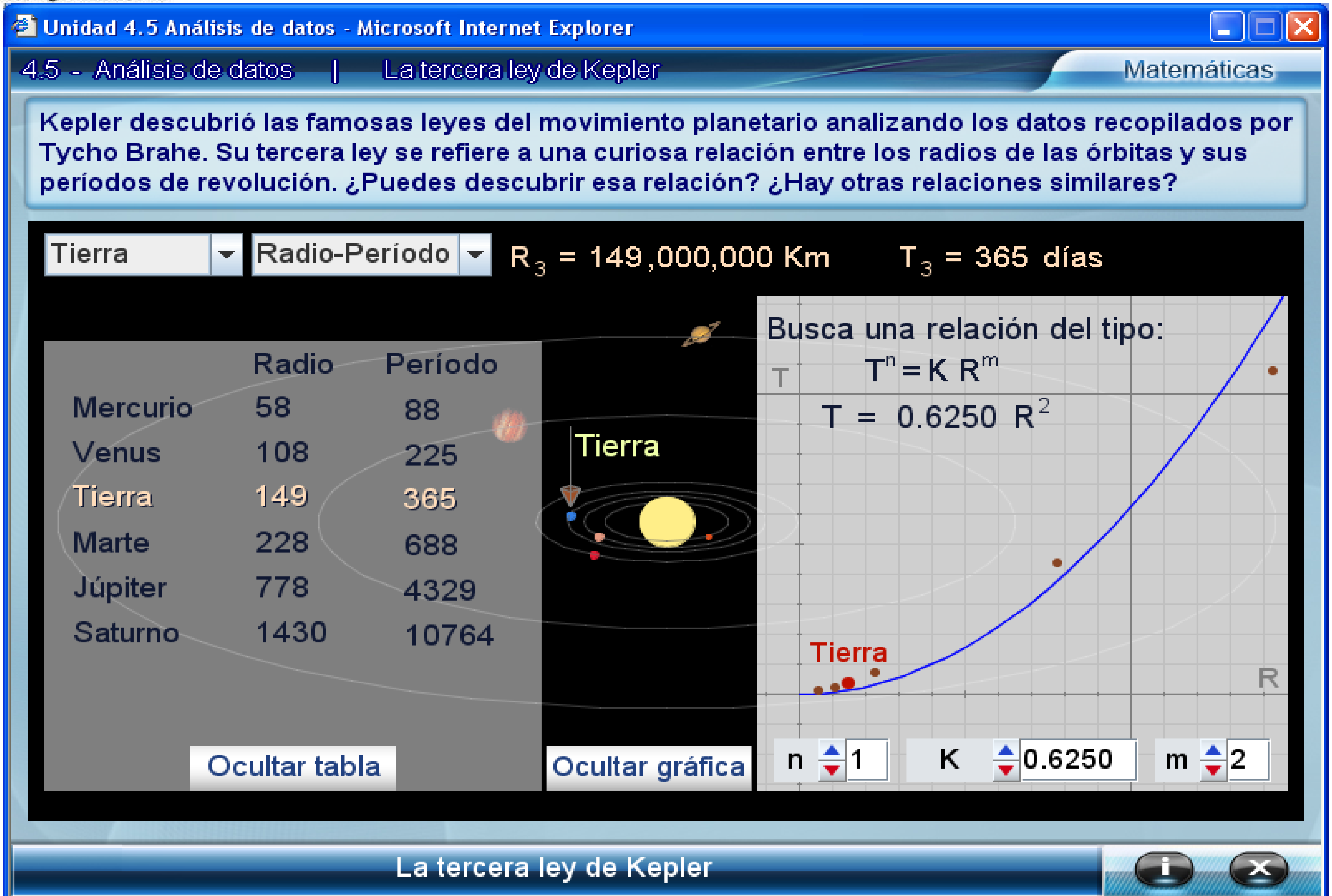


Restando la primera ecuación de la segunda y simplificando, obtenemos:

$$100 - 20x = 8^2 - 7^2$$

Interactive Units in Math Education

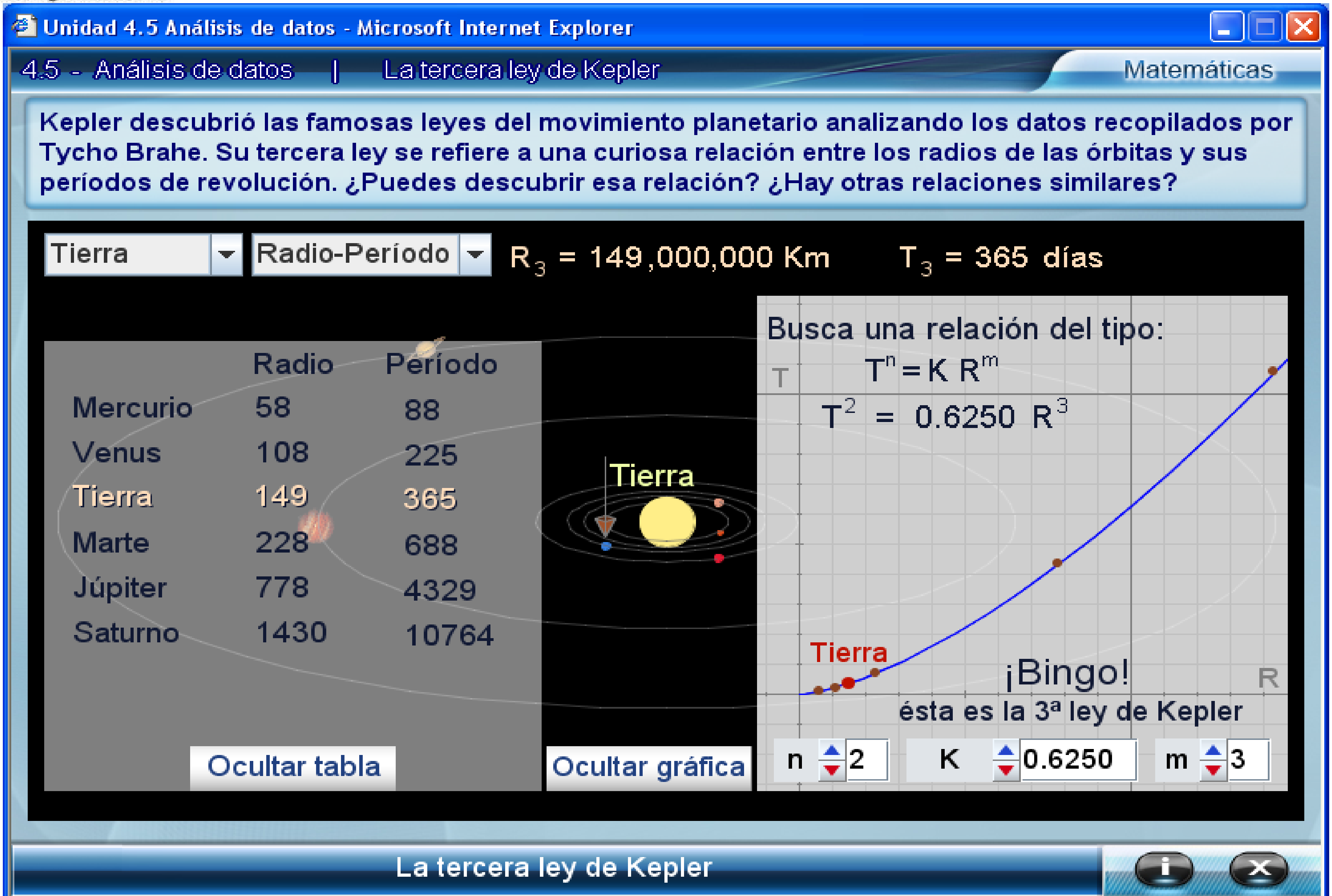
Concentration on specific aspects



Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa

Interactive Units in Math Education

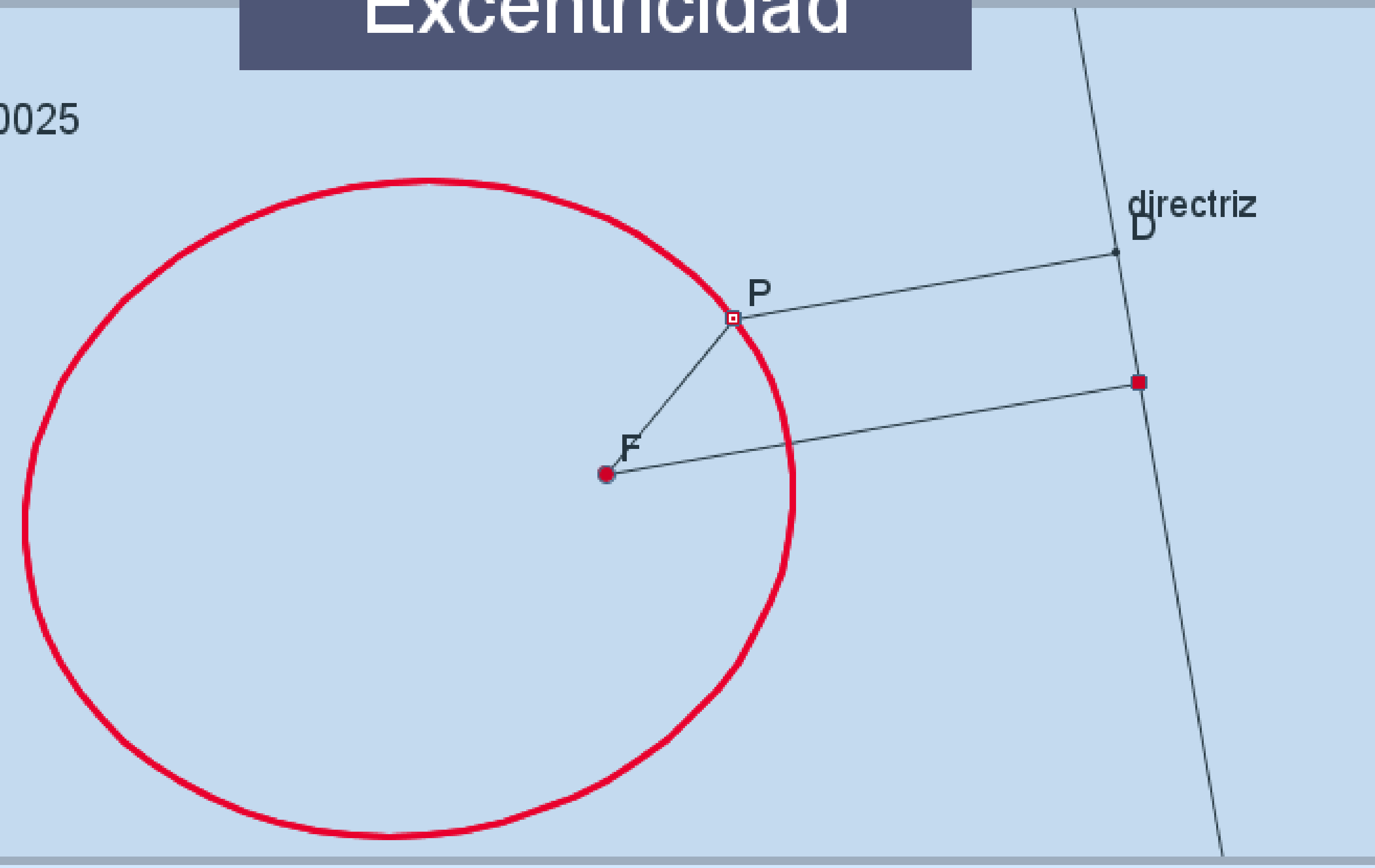
Concentration on specific aspects



Exploring Mathematical Objects

Excentricidad

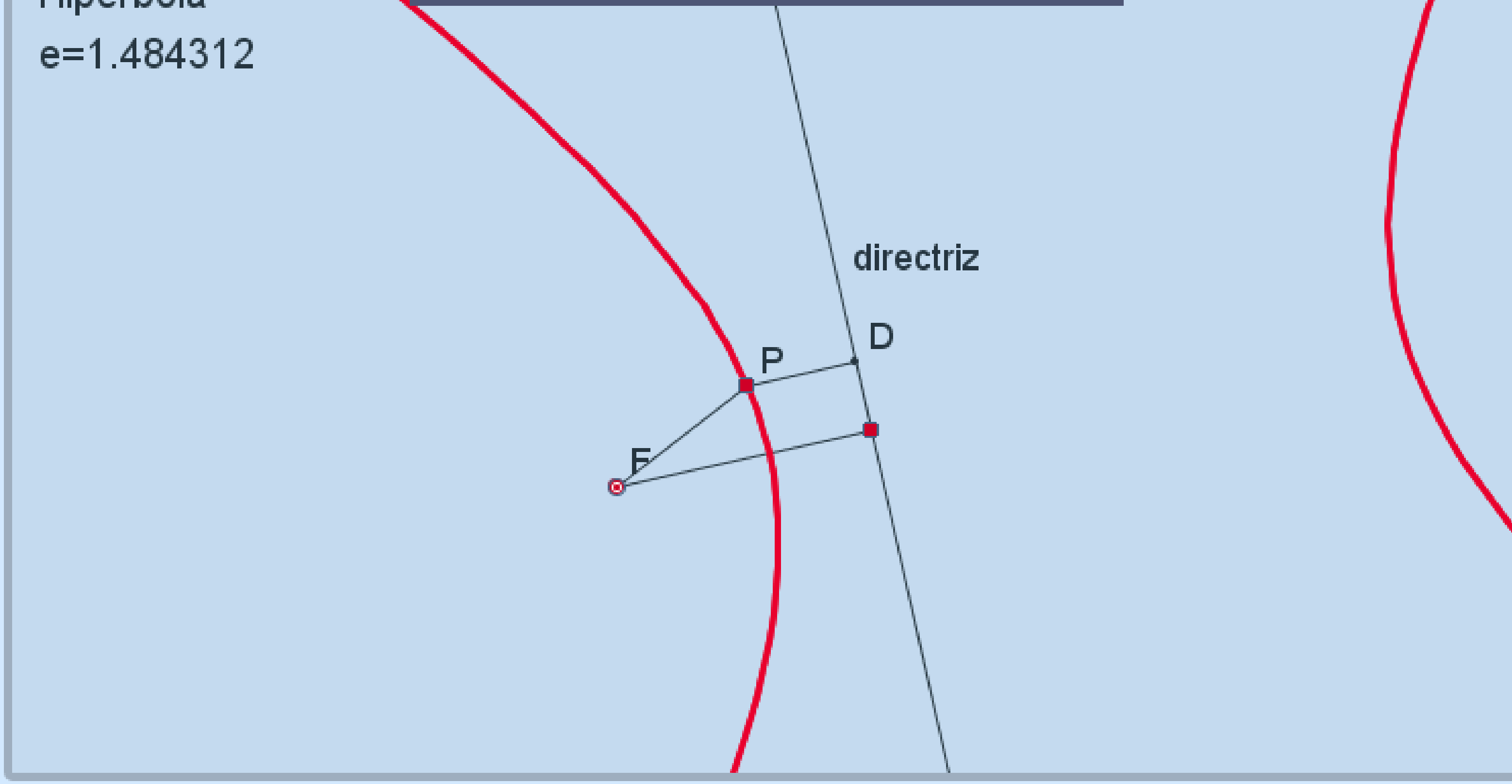
Elipse
e=0.520025



Si $e < 1$ entonces la curva es una elipse
Si $e = 1$ entonces la curva es una parábola
Si $e > 1$ entonces la curva es una hipérbola

Excentricidad

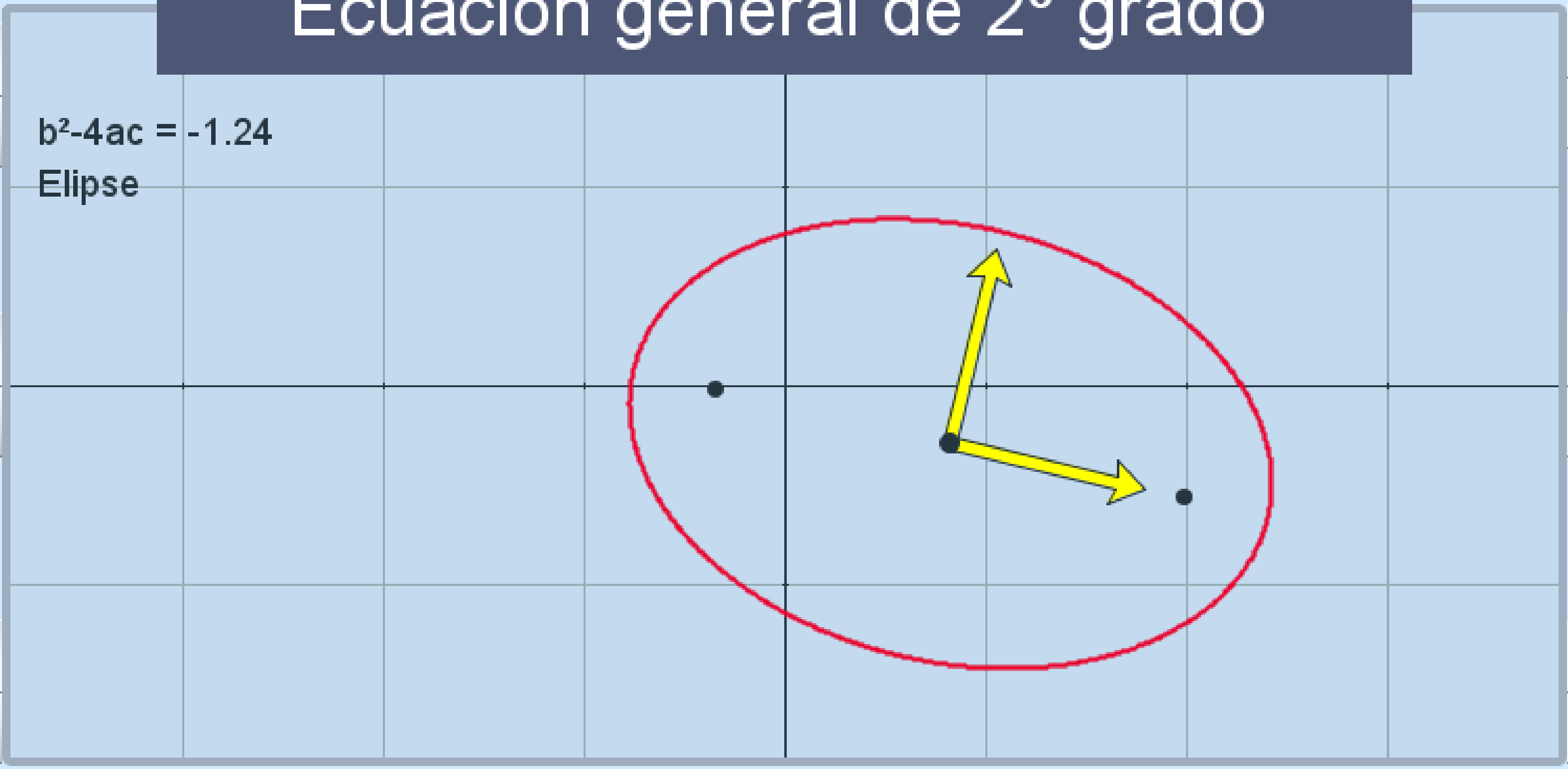
Hipérbola
e=1.484312



Si e < 1 entonces la curva es una elipse
Si e = 1 entonces la curva es una parábola
Si e > 1 entonces la curva es una hipérbola

Exploring Mathematical Objects

Ecuación general de 2º grado



La ecuación general de segundo grado en dos variables tiene la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

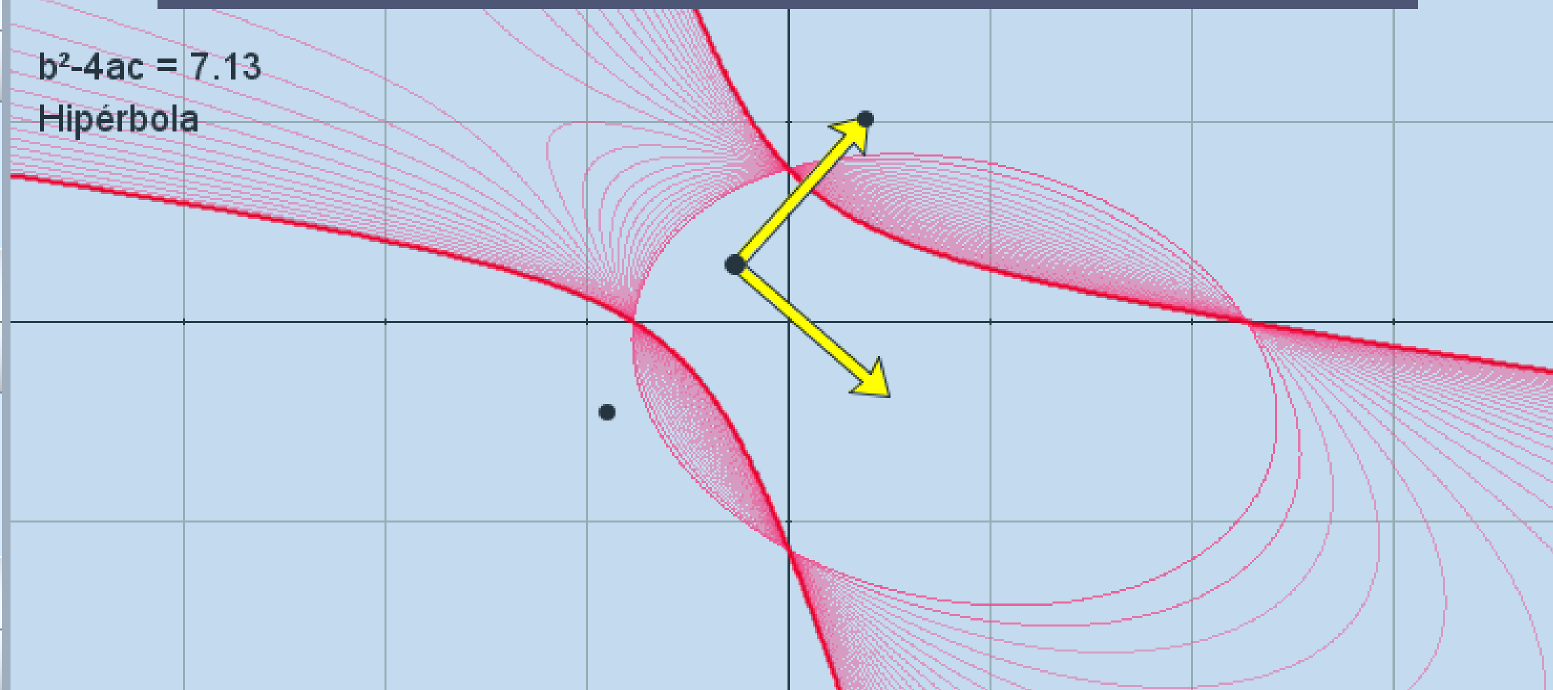
a	0.4	b	0.2	c	0.8	d	-0.6	e	0.3	f	-0.7

Laboratorio de Innovación en Tecnología Educativa

Interactive Units in Math Education

Exploring Mathematical Objects

Ecuación general de 2º grado

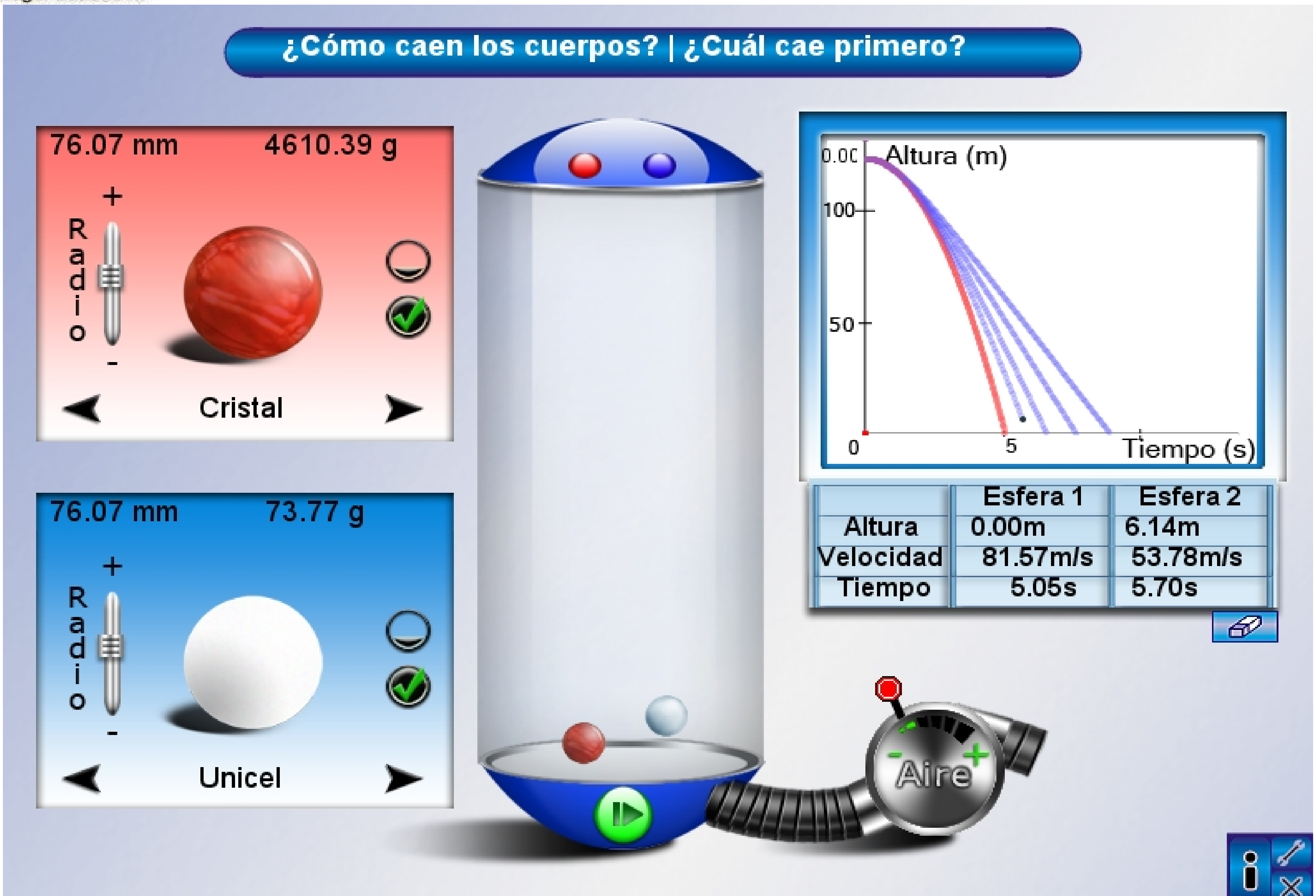


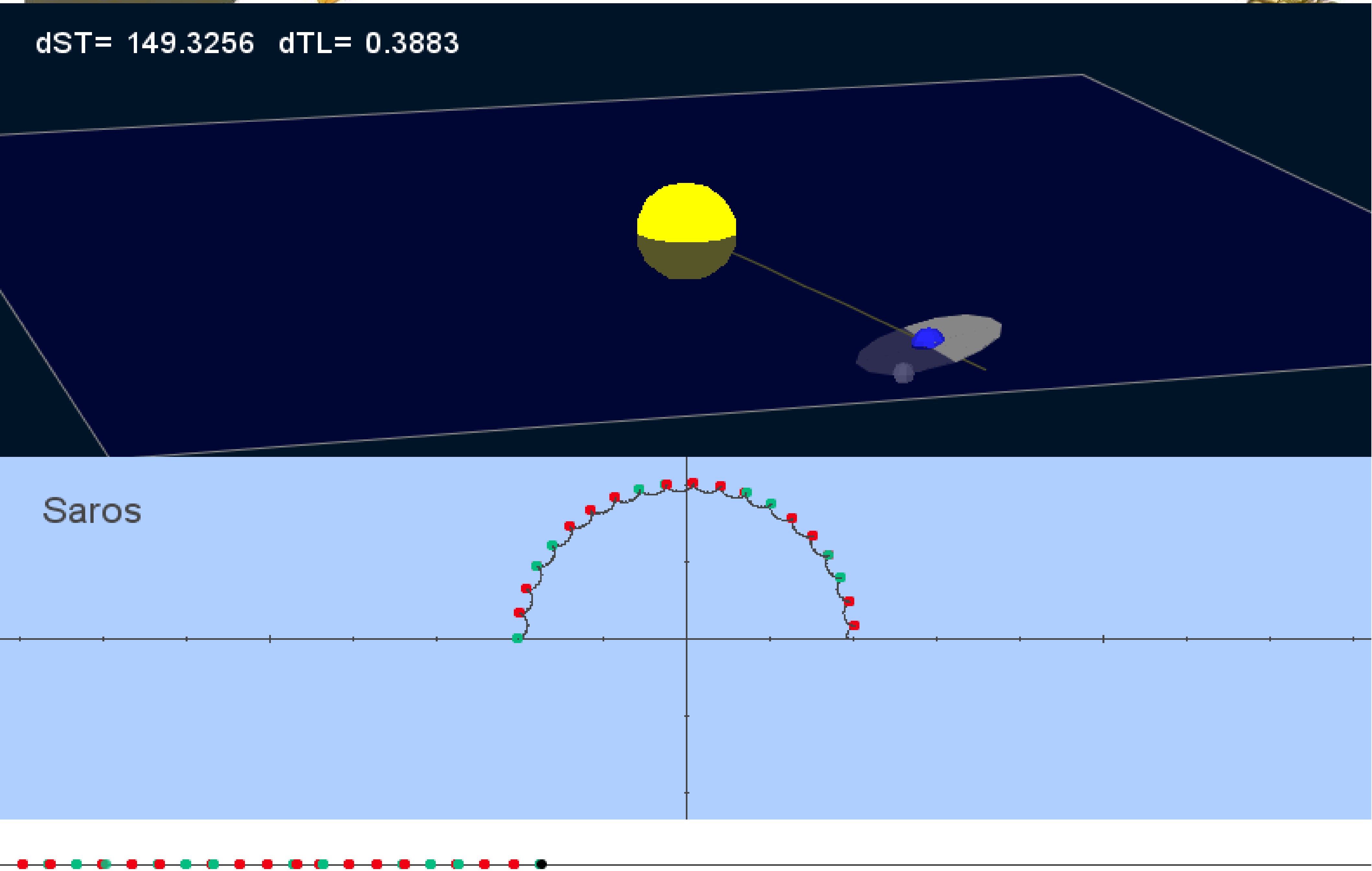
La ecuación general de segundo grado en dos variables tiene la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

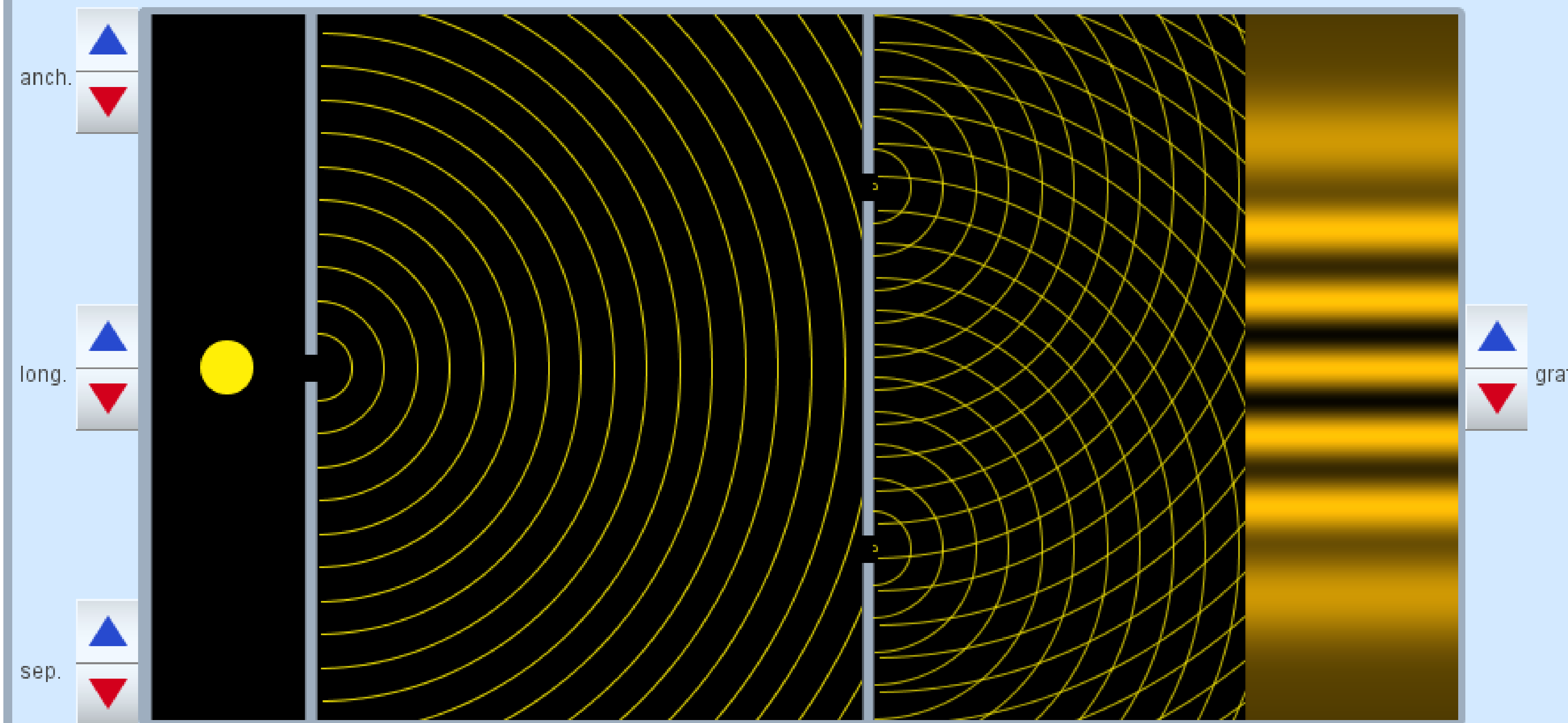
a 0.4 b 2.9 c 0.8 d -0.6 e 0.3 f -0.7

Interactive Units in Math Education
Mathematical Simulations




dST= 149.3256 dTL= 0.3883
Saros

Experimento de Young o de la doble rendija



Se hace pasar luz monocromática por dos rendijas.

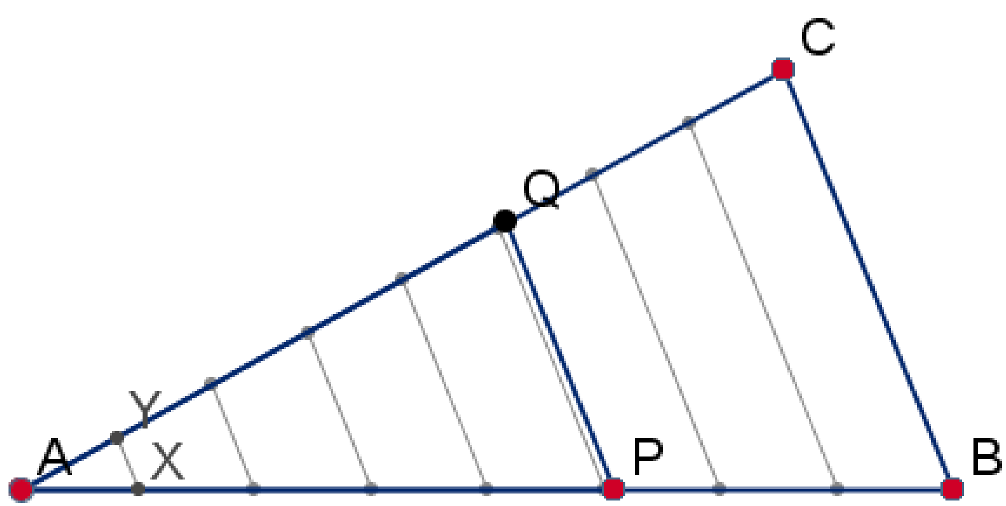
- anch. es el ancho de las rendijas
- long. es la longitud de onda
- sep. es la separación de las rendijas

scrl.

La ley de las proporciones. Eudoxio, en Elementos de Euclides, Libro V. *Geometría*

$5\ AX \le AP < 6\ AX \quad 5\ AY \le AQ < 6\ AY$

$8\ AX \le AB < 8\ AX \quad 8\ AY \le AC < 8\ AY$



$$\frac{5}{8} \le \frac{AP}{AB} < \frac{6}{8}$$

$$\frac{5}{8} \le \frac{AQ}{AC} < \frac{6}{8}$$

$$\left|\frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right| < \frac{1}{8}$$

Teorema

Si ABC y APQ son triángulos semejantes, entonces

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

Demostración

Sea n un entero positivo y X un punto sobre AB, tales que $AB = n\,AX$. Sea Y el punto sobre AC tal que AXY es semajante a ABC. Sea m otro entero positivo tal que

$$m\,AX \le AP < (m+1)\,AX.$$

Entonces

$$\frac{m}{n} = \frac{m\,AX}{n\,AX} \le \frac{AP}{AB} < \frac{(m+1)AX}{n\,AX} = \frac{m+1}{n}$$

Análogamante,

$$\frac{m}{n} = \frac{m\,AY}{n\,AY} \le \frac{AQ}{AC} < \frac{(m+1)AX}{n\,AX} = \frac{m+1}{n}$$

All these examples were developed with Descartes.
What is Descartes?

Proyecto Descartes

is about Developing interactive
Educational Units in Mathematics

It started in 1998 in the Spanish Ministry of Education and has continued alive until now.

Teachers develop the interactive units, which are published on-line for the use of everybody.

The web address of Proyecto Descartes is:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/index.html

The project is based in an authoring tool or set of tools refered to as ***applet Descartes***, ***nippe Descartes*** or simply ***Descartes***

Descartes is open source. The tool, the Technical Documentation and the Java source code may be downloaded from the same address.

The most recent developments can be downloaded and tested in beta versions, from:

http://arquimedes.matem.unam.mx

This site contains most of the examples shown above.

For thirteen years now Proyecto Descartes has produced hundreds of Interactive Educational Units in Math. The authors are teachers who are active as such in Spanish high schools (12 to 17 years old students). The site receives around a million visits per month.

There are many reports of actual use of these materials that can be consulted on the web page of the project. In particular Proyecto EDA (Experimentación Didáctica en el Aula)

http://recursostic.educacion.es/eda/web/

In some countries of Latin America, especially in Mexico, similar resources have been developed, notably in the ***Enciclomedia*** and the ***Telesecundaria*** projects.

However in these cases the authors have been mostly professional developing teams, instead of teachers., with some exceptions: See Calculus DGEE.

Some of these materials have been tested in specialized labs and their effects on the cognitive process in teachers and students have been analysed.

There are already clear indications of some positive effects to be expected when using these resources, and on how they should be designed and developed in order to obtain better results.

Contains many detailed reports from teachers that have used these resources in class.

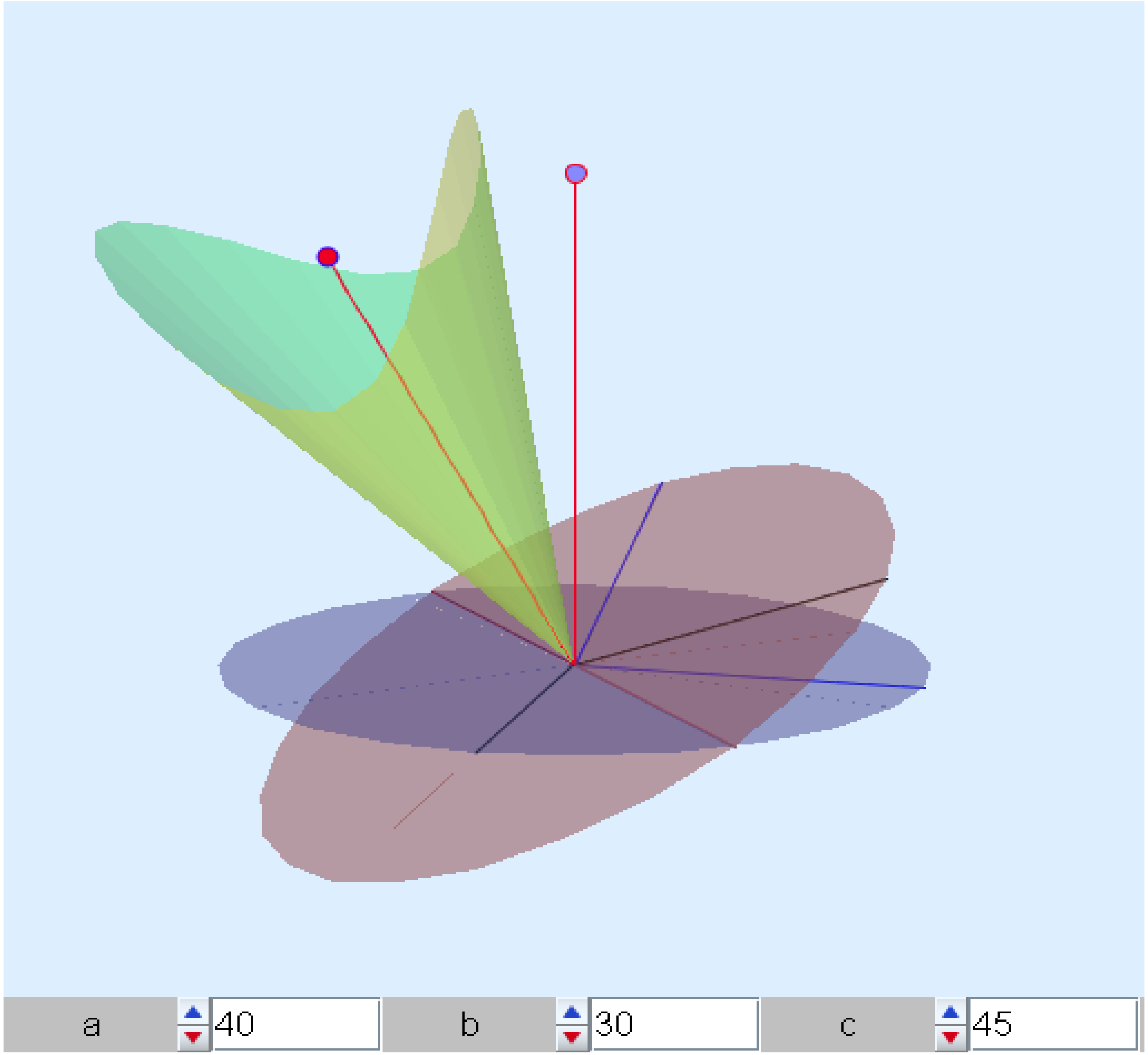
The main findings are:
1) Most students prefer learning with the resources than in class
2) There is a slight improvement in student performance
3) Conflictive students get hooked on them more than others
4) The best students don't like this very much

The best results are with teachers that get involved in developing materials with Descartes. In general they become fans of the tool and are very enthusiastic and productive. Also, they obtain a deeper understanding of the subject and in general it seems they become better teachers.

The resources they produce tend to be very imaginative, well adapted to the academic level they address, and not very “flashy”. They make the point and offer interactive reinforcing of the concepts. I think they are in general quite good.

A word of caution: Spanish Mathematics high school teachers in general have a College degree, mostly in Math.

Interactive Units in Math Education
3D constructions



Our experience in Mexico in trying to adapt Proyecto Descartes has not been very succesful. Why?

We have found few junior high school teachers proficient enough in Math to develop their own resources. High school teachers don't have the time because they have a steep academic load and this represents a lot of work.

So... it seems that the best candidates for doing this sort of thing in Mexico (and pressumably in other LAC) are we, the professional mathematicians.

And this is my proposal that we do it and publish the resources in a collaborative web site. We organize an editorial board for these materials, with referees, and make it into a prestigious activity that has a clear social purpose.

If we do this as an international effort we might obtain financial support to offer teachers and students a good academic advisory service We can act put hundreds of high quality resources on-line, which they could use as a reference or for direct study.

Notice that P.U.E.M.A.C., Proyecto Universitario de Enseñanza de las Matemáticas Asistida por Computadora, organized by Dr. José Antonio De La Peña, is a kind of antecesor to this proposal. However it has been limited to the mathematicians of the Institute of Mathematics of UNAM.

At present there are other similar initiatives, but one is needed that gathers and organizes the work of LAC mathematicians around this subject.

So, the **proposal** consists of the following three points:

•To form a group of professional mathematicians and teachers, interested in producing high quality interactive educational units.

•To create and maintain a public web site, where all these resources are to be published.

•To organize a mixed editorial board, of Teachers and Mathematicians, that will make sure the published resources have the necessary quality, both in the mathematical and the educational sense.

Interactive Units in Math Education