Proyección Estereográfica

José Galaviz

julio 2002

1 Contexto.

Supóngase que se posee una representación de la tierra sobre la esfera unitaria $\mathcal{S}^2$. Esta es por supuesto, una aproximación, es sabido que la tierra no es realmente esférica sino que está ligeramente achatada en los polos debido a su velocidad de rotación, sin embargo el grado de excentricidad es muy pequeño (0.003). En esta representación el polo norte de la tierra se coloca en las coordenadas (rectangulares) $(0, 0, 1)$ (sobre el eje z) y el punto de coordenadas terrestres: 0^o lat. y 0^o lon. se coloca en el punto $(1, 0, 0)$ (sobre el eje x), el ecuador es el plano xy (i.e. $z = 0$).

Los puntos sobre la superficie de la tierra y por tanto, en la representación mencionada, se especifican usando la latitud (ángulo con respecto al ecuador) y la longitud (ángulo con respecto al meridiano de Greenwich). Los valores posibles de estas coordenadas terrestres están acotados: $-90^o \leq lat \leq 90^o$, $-180^o \leq lon \leq 180^o$. Si midiéramos estos ángulos en radianes: $lat_r \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $lon_r \in [-\pi, \pi]$. La equivalencia entre las magnitudes expresadas en grados y en radianes es: $lat_r = \frac{\pi}{180} lat$ y $lon_r = \frac{\pi}{180} lon$.

2 Rotando para simplificar

Igual que la proyección cilíndrica, a la que estamos habituados, la proyección estereográfica permite trazar mapas de la tierra, aunque de aspecto posiblemente muy extraño.

Para efectuar la proyección estereográfica se requiere, además de la tierra (el objeto a proyectar), de los siguientes elementos (ilustrados en la figura 1):

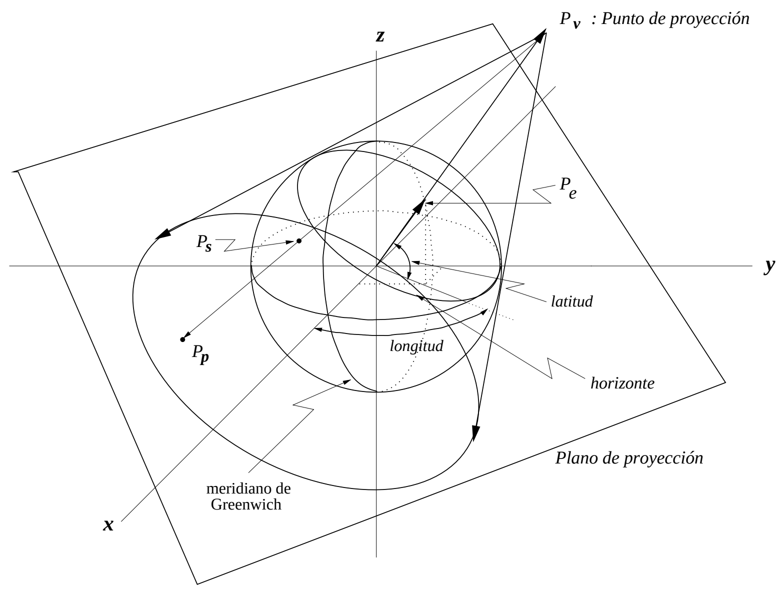

Figura 1: Proyección estereográfica.

1. Un punto exterior a la tierra, al que llamaremos en lo sucesivo el punto de proyección y denotaremos con P_v. La distancia entre este punto y el centro de la tierra, es decir el origen $(0,0,0)$, la denotaremos con d_p. La recta que pasa por P_v y el origen, atraviesa la tierra, intersecta la superficie de la esfera en dos puntos: con P_e denotaremos el más cercano a P_v y con P_e' denotaremos el opuesto (el punto antípoda de P_e). El cono con vértice P_v y tangente a $\mathcal{S}^2$, la intersecta en un círculo al que llamaremos el horizonte, todos los puntos sobre este círculo distan d_h de P_v. De hecho los puntos de $\mathcal{S}^2$ cuya distancia a P_v es mayor o igual a d_h no son visibles desde P_v, aquellos que distan menos de d_h sí lo son.

2. Un plano de proyección Π sobre el que se proyectan los puntos de $\mathcal{S}^2$ cuya distancia a P_v es *mayor* que d_h. Este plano contiene a P_e' y la recta que pasa por P_e', el origen, P_e y P_v es normal a él.

Dado un punto arbitrario en $\mathcal{S}^2$ $P_s = (x_s, y_s, z_s)$, tal que $d(P_s, P_v) \geq d_h$, lo primero que se requiere es encontrar el punto $P_p = (x_p, y_p, z_p)$ en Π que resulta de proyectar a P_s. Esto consiste en encontrar las ecuaciones del plano, de la recta que pasa por P_v y P_s y hallar la intersección de ambos. Pero esto tiene el inconveniente de que, en el futuro, cuando queramos calcular al factor de escalamiento necesario para generar un mapa de tamaño arbitrario no sabremos exactamente como enviar P_p al mapa; necesitaríamos definir un orden parcial en el conjunto de puntos proyectados, para lograr esto lo más fácil es enviar Π al plano xy para así saber exactamente, para cada punto, que tan "lejos de la orilla del mapa" está. Pero podemos simplificar el problema si de antemano rotamos la esfera completa de tal forma que el punto P_v quede sobre el eje z; así ya sabemos muchas cosas y las ecuaciones de Π y las rectas son mucho más sencillas, lo que facilita calcular las intersecciones y evita el problema mencionado a la hora de enviar los puntos proyectados al mapa final.

Ahora bien ¿cuanto hay que rotar la esfera para hacer que P_v quede sobre el eje z? P_v está definido por tres elementos, de hecho la entrada del algoritmo que estamos construyendo, a saber: las coordenadas del punto sobre la tierra que está directamente "abajo" de P_v, es decir las coordenadas terrestres de P_e y la distancia entre P_v y el centro de la tierra, es decir d_p. Las coordenadas terrestres de P_e son una pareja (lon, lat) como las descritas anteriormente, la distancia d_p, por conveniencia, la especificaremos en *radios terrestres*, es decir $d_p = 1$ significa que $P_v = P_e$, $d_p = 2$ significa que P_e dista lo mismo del centro de la tierra que de P_v (P_v está a dos radios terrestres del centro de la tierra).

Si lo que deseamos es llevar el punto P_v al eje z entonces también $P_e = (lon, lat)$ quedará sobre el eje z y de hecho sus coordenadas rectangulares serán $(0, 0, 1)$. Esto significa rotar la tierra hasta que P_e quede donde antes estaba el polo norte. Para lograr esto debemos aplicar dos rotaciones: una sobre el eje z y la otra sobre el eje y.

Entonces dado un punto arbitrario en la esfera unitaria, especificado por sus coordenadas terrestres $P_e = (lon, lat)$ se desea llevar este punto al polo norte, es decir se debe mover la tierra hasta que el punto especificado adquiera la posición $(0, 0, 1)$ en coordenadas rectangulares. Esto cambia la posición de todos los puntos en la superficie de la tierra y el primer problema a resolver es determinar las coordenadas de cada punto de la tierra luego de haber cambiado el polo norte.

El primer problema consiste entonces en que dadas las coordenadas (rectangulares) $P_s = (x, y, z)$ de cualquier punto sobre $\mathcal{S}^2$, se desea obtener las coordenadas (x'', y'', z'') que le corresponden a ese punto luego de rotar la esfera tanto como sea necesario, a fin de que un punto dado arbitrario de coordenadas terrestres $P_e = (lon, lat)$ (*longitud* y *latitud* respectivamente) quede en la posición que le correspondía al polo norte $(0, 0, 1)$.

Se ha dicho “rotar” la esfera porque justamente es eso lo que hay que hacer para llevar el punto elegido al polo norte, el centro de la esfera no cambia de posición y tampoco cambia el tamaño o la forma de la esfera. De hecho para llevar el punto (lon, lat) al polo norte se requiere hacer dos rotaciones en direcciones mutuamente ortogonales: una que lleve el punto sobre el meridiano de Greenwich[1] y otra que lo suba al polo norte.

Como lon es la magnitud del ángulo que forma el punto con el meridiano de Greenwich, entonces la primera rotación debe de ser de $-lon$ grados ($-\frac{\pi}{180}lon$ radianes) alrededor del eje z, es decir es una rotación del plano xy. Aplicar la rotación es, esencialmente, multiplicar cada vector de la esfera (x, y, z) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(-lon_r) & -\mathrm{sen}(-lon_r) & 0 \\ \mathrm{sen}(-lon_r) & \cos(-lon_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donde $lon_r = \frac{\pi}{180}lon$.

Usando que $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}(\theta)$ y $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y multiplicando la matriz 1 por el vector (columna) (x, y) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(lon_r) + y\,\mathrm{sen}(lon_r) \\ y' &= y\cos(lon_r) - x\,\mathrm{sen}(lon_r) \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2}$$

El punto (x, y, z), luego de la primera rotación, queda en la posición (x', y', z'). Ahora es cuando se debe aplicar la segunda rotación.

Dado que el ángulo que forma el punto original (x, y, z) (y de hecho también (x', y', z')) con el ecuador es lat, para mover el punto al polo norte se debe aplicar una rotación de $90 - lat$ grados alrededor del eje y, es decir, es una rotación del plano xz. La expresión en radianes del ángulo de rotación es: $\alpha_r = \frac{\pi}{180}(90 - lat)$ y la matriz que expresa dicha rotación es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_r) & 0 & -\mathrm{sen}(\alpha_r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha_r) & 0 & \cos(\alpha_r) \end{pmatrix} \tag{3}$$

[1] Se ha elegido este por ser el más sencillo de manipular, pero esto es arbitrario.

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x'' &= x' \cos(\alpha_r) - z' \operatorname{sen}(\alpha_r) \\
y'' &= y' \\
z'' &= x' \operatorname{sen}(\alpha_r) + z' \cos(\alpha_r)
\end{aligned} \tag{4}
$$

Con esto el primer problema queda resuelto. Dado un punto cualquiera que se desea llevar al polo norte $P_e = (lon, lat)$, las coordenadas de cualquier punto sobre la esfera unitaria $P_s = (x, y, z)$ se transforman en las coordenadas (x'', y'', z'') dadas por el sistema de ecuaciones 4. Esto significa, por supuesto que hay que aplicar también el sistema 2, es decir, hacer la composición de las dos transformaciones lineales expresadas por las matrices 1 y 3.

3 Preliminares

Para simplificar lo que sigue llamaremos ahora P_s al punto de la esfera ya rotado, P_e al polo norte $(0, 0, 1)$, $P_e' = (0, 0, -1)$ a su punto antípoda, $P_v = (0, 0, d_p)$ al punto de proyección y Π al plano $z = -1$. Es decir conservaremos los nombres aunque las coordenadas hayan cambiado. La situación sobre el plano yz es mostrada en la figura 2.

Conviene ahora calcular la distancia al horizonte d_h. Pero d_h es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es d_p (conocido) y cuyo segundo cateto es 1, así que:

$$d_h = \sqrt{d_p^2 - 1} \tag{5}$$

Ahora resulta sencillo calcular el tamaño que tendrá la proyección sobre al plano $\Pi : z = -1$. Si observamos los triángulos rectángulos semejantes que se forman (fig. 2). Resulta que:

$$\frac{\frac{1}{2}T}{1} = \frac{d_p + 1}{d_h}$$

de donde:

$$T = \frac{2\,(d_p + 1)}{d_h} \tag{6}$$

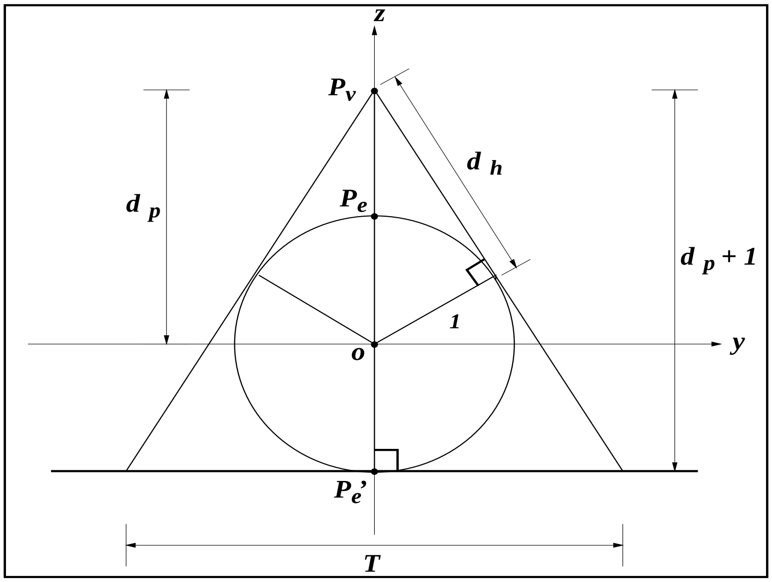

Figura 2: Situación en el plano yz.

4 La proyección

Ahora bien, la ecuación de la recta que pasa por un punto arbitrario (ya rotado) de $\mathcal{S}^2$ $P_s = (x_s, y_s, z_s)$ y por el punto de proyección $P_v = (0, 0, d_p)$ es:

$$\ell : (x, y, z) = (0, 0, d_p) + r\,(x_s - 0, y_s - 0, z_s - d_p) \tag{7}$$

La ecuación del plano de proyección es:

$$\Pi : z - 1 = 0 \tag{8}$$

La intersección de ℓ y Π se dá entonces en el punto de ℓ determinado por el factor r_i:

$$r_i = \frac{(P_e - P_v) \cdot P_e}{(P_s - P_v) \cdot P_e} \tag{9}$$

donde el símbolo $\cdot$ denota el producto interior de los vectores. 9 se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{(P_e - P_v) \cdot P_e}{(P_s - P_v) \cdot P_e} \\ &= \frac{1 - d_p}{z_s - d_p} \end{aligned} \tag{10}$$

Basta reemplazar r con r_i en la ecuación 7 para determinar el punto $P_p = (x_p, y_p, -1)$ que resulta de proyectar P_s.

5 Generando el mapa

Ahora que tenemos P_p debemos obtener un par de coordenadas discretas (ren, col) (renglón y columna respectivamente) que le corresponden a P_p en el mapa (imagen hecha de pixeles). El mapa medirá lo mismo de ancho que de alto (porque la proyección siempre será un circulo), digamos N pixeles. En esos N pixeles deben caber T unidades reales del plano de proyección, así que el factor de escalamiento será:

$$\frac{N}{T} \tag{11}$$

Las coordenadas máximas y mínimas de los puntos en el plano deben ser:

$$\begin{aligned} x_{max} &= \frac{T}{2} \\ x_{min} &= -\frac{T}{2} \\ y_{max} &= \frac{T}{2} \\ y_{min} &= -\frac{T}{2} \end{aligned}$$

Así que el renglón ren y la columna col serán:

$$\begin{aligned} ren &= (y_{max} - y_p)\frac{N}{T} && (12) \\ col &= (x_{max} - x_p)\frac{N}{T} && (13) \\ & && (14) \end{aligned}$$

con lo que terminamos nuestra labor.