Cambiando el Polo Norte

José Galaviz

diciembre 2001

1 Contexto.

Supóngase que se posee una representación de la tierra sobre la esfera unitaria $\mathcal{S}^2$. Esta es, por supuesto, una aproximación, es sabido que la tierra no es realmente esférica sino que está ligeramente achatada en los polos debido a su velocidad de rotación, sin embargo el grado de excentricidad es muy pequeño (0.003). En esta representación el polo norte de la tierra se coloca en las coordenadas (rectangulares) $(0, 0, 1)$ (sobre el eje z) y el punto de coordenadas terrestres: 0^o lat. y 0^o lon. se coloca en el punto $(1, 0, 0)$ (sobre el eje x), el ecuador es el plano xy (i.e. $z = 0$).

Los puntos sobre la superficie de la tierra y por tanto, en la representación mencionada, se especifican usando la latitud (ángulo con respecto al ecuador) y la longitud (ángulo con respecto al meridiano de Greenwich). Los valores posibles de estas coordenadas terrestres están acotados: $-90^o \leq lat \leq 90^o$, $-180^o \leq lon \leq 180^o$. Si midiéramos estos ángulos en radianes: $lat_r \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y $lon_r \in [-\pi, \pi]$. La equivalencia entre las magnitudes expresadas en grados y en radianes es: $lat_r = \frac{\pi}{180} lat$ y $lon_r = \frac{\pi}{180} lon$.

2 Moviendo el polo norte

Dado un punto arbitrario en la esfera unitaria, especificado por sus coordenadas terrestres (lon, lat) se desea llevar este punto al polo norte, es decir se debe mover la tierra hasta que el punto especificado adquiera la posición $(0, 0, 1)$ en coordenadas rectangulares. Esto cambia la posición de todos los puntos en la superficie de la tierra y el primer problema a resolver es determinar las coordenadas de cada punto de la tierra luego de haber cambiado el polo norte.

El primer problema consiste entonces en que dadas las coordenadas (rectangulares) (x, y, z) de cualquier punto sobre $\mathcal{S}^2$, se desea obtener las coordenadas (x'', y'', z'') que le corresponden a ese punto luego de rotar la esfera tanto como sea necesario, a fin de que un punto dado arbitrario de coordenadas terrestres (lon, lat) (*longitud* y *latitud* respectivamente) quede en la posición que le correspondía al polo norte $(0, 0, 1)$.

Se ha dicho "rotar" la esfera porque justamente es eso lo que hay que hacer para llevar el punto elegido al polo norte, el centro de la esfera no cambia de posición y tampoco cambia el tamaño o la forma de la esfera. De hecho para llevar el punto (lon, lat) al polo norte se requiere hacer dos rotaciones en direcciones mutuamente ortogonales: una que lleve el punto sobre el meridiano de Greenwich[1] y otra que lo suba al polo norte.

Como lon es la magnitud del ángulo que forma el punto con el meridiano de Greenwich, entonces la primera rotación debe de ser de $-lon$ grados ($-\frac{\pi}{180}lon$ radianes) alrededor del eje z, es decir es una rotación del plano xy. Aplicar la rotación es, esencialmente, multiplicar cada vector de la esfera (x, y, z) por la matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos(-lon_r) & -\mathrm{sen}(-lon_r) & 0 \\ \mathrm{sen}(-lon_r) & \cos(-lon_r) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Donde $lon_r = \frac{\pi}{180}lon$.

Usando que $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}(\theta)$ y $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ y multiplicando la matriz 1 por el vector (columna) (x, y) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= x\,\cos(lon_r) + y\,\mathrm{sen}(lon_r) \\ y' &= y\,\cos(lon_r) - x\,\mathrm{sen}(lon_r) \\ z' &= z \end{aligned} \tag{2}$$

El punto (x, y, z), luego de la primera rotación, queda en la posición (x', y', z'). Ahora es cuando se debe aplicar la segunda rotación.

Dado que el ángulo que forma el punto original (x, y, z) (y de hecho también (x', y', z')) con el ecuador es lat, para mover el punto al polo norte se debe aplicar una rotación de $90 - lat$ grados alrededor del eje y, es decir, es

[1] Se ha elegido este por ser el más sencillo de manipular, pero esto es arbitrario.

una rotación del plano xz. La expresión en radianes del ángulo de rotación es: $\alpha_r = \frac{\pi}{180}(90 - lat)$ y la matriz que expresa dicha rotación es:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_r) & 0 & -\mathrm{sen}(\alpha_r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha_r) & 0 & \cos(\alpha_r) \end{pmatrix} \tag{3}$$

De donde se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos(\alpha_r) - z' \,\mathrm{sen}(\alpha_r) \\ y'' &= y' \\ z'' &= x' \,\mathrm{sen}(\alpha_r) + z' \cos(\alpha_r) \end{aligned} \tag{4}$$

Con esto el primer problema queda resuelto. Dado un punto cualquiera que se desea llevar al polo norte (lon, lat), las coordenadas de cualquier punto sobre la esfera unitaria (x, y, z) se transforman en las coordenadas (x'', y'', z'') dadas por el sistema de ecuaciones 4. Esto significa, por supuesto que hay que aplicar también el sistema 2, es decir, hacer la composición de las dos transformaciones lineales expresadas por las matrices 1 y 3.

3 Generando el mapa

Ahora habrá que generar el mapa que corresponde a esta nueva posición de la tierra. Para ello se utilizará la proyección cilíndrica usual. Es decir, se envuelve la tierra con un cilindro tangente en el ecuador y se proyectan todos los puntos de la esfera sobre el cilindro usando siempre rayos paralelos al plano xy (el ecuador) y que se intersectan (perpendicularmente) con el eje z. Esto se ilustra en la figura 1.

Convenientemente se supondrá que la longitud (circunferencia) del cilindro es 2π y que su altura es 2. Sobre la superficie del cilindro se tendrá un punto de origen, aquel donde convergen el meridiano de Greenwich y el ecuador, los puntos por arriba del origen (hemisferio norte) tendrán coordenada y (sobre la superficie del cilindro) positiva, los de abajo negativa. Los puntos a la derecha del origen (hemisferio oriental) tendrán coordenada x positiva y los que estén a la izquierda (hemisferio occidental) la tendrán negativa. Evidentemente la continuidad se pierde en el punto antípoda del origen.

La coordenada horizontal sobre la superficie del cilindro (con el cilindro extendido) que corresponde a un punto sobre $\mathcal{S}^2$ de coordenadas (x, y, z) es,

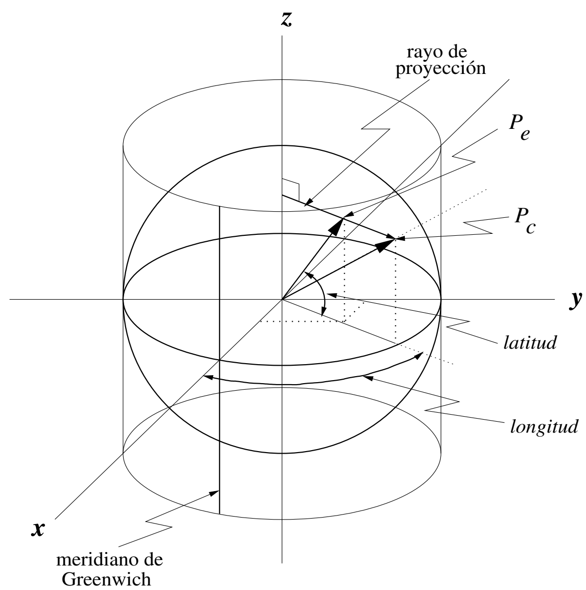

Figura 1: Proyección cilíndrica convencional.

de hecho, la longitud de dicho punto en coordenadas terrestres, es decir, la longitud del arco que va del origen hasta el meridiano que pasa por el punto (véase figura 2).

Considerar todo como vectores facilitara la manipulación. Se debe calcular la longitud del arco (es decir la medida del ángulo en radianes) que forma el punto (x, y, z) sobre la esfera (realmente el meridiano que pasa por el), con el origen. Para esto primero se debe calcular la proyección del vector (x, y, z) sobre el plano xy. La magnitud de esta proyección es $\cos(\text{asen}(z))$. Esta es la magnitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo que se forma en el plano xy con catetos x y y, así que la longitud del arco es el tamaño del ángulo en radianes que forma esta hipotenusa con la componente x del punto, es decir: $\text{acos}(\frac{x}{\cos(\text{asen}(z))})$. En síntesis, la coordenada horizontal sobre el cilindro h es:

$$h = \text{acos}\left(\frac{x}{\cos(\text{asen}(z))}\right) \tag{5}$$

Para determinar la coordenada vertical sobre el cilindro habrá que considerar lo que ocurre en el plano determinado por el rayo de proyección y el vector del punto (véase figura 3). Este caso es muy sencillo, la coordenada vertical sobre el cilindro es exactamente la misma que la coordenada

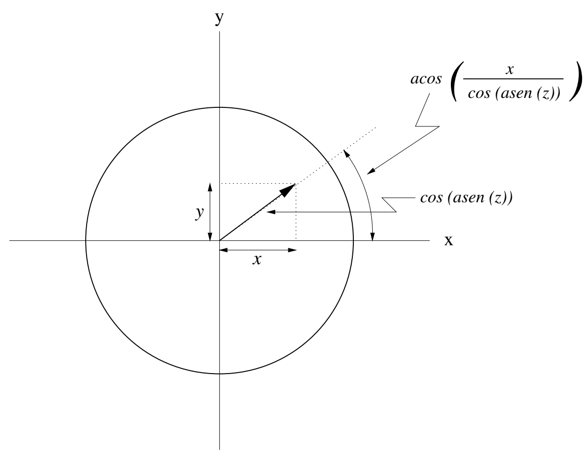

Figura 2: Proyección en el plano xy.

z del punto. Así que, si se denota con v a la altura sobre el cilindro que le corresponde al punto:

$$v = z \tag{6}$$

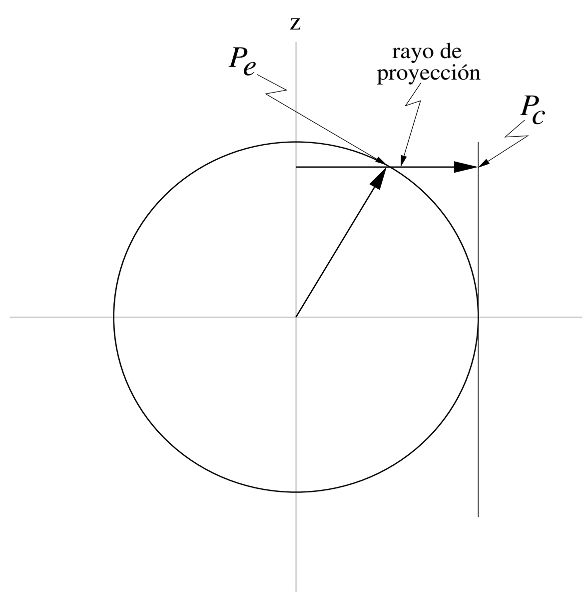

Figura 3: Determinación de la coordenada vertical sobre el cilindro.