Calculando el número π

José Luis Abreu

24 de agosto de 2015

Resumen

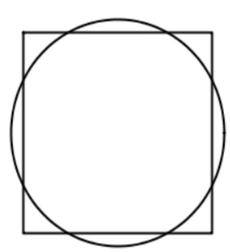
Repasamos las estimaciones del número π a lo largo de la historia, desde las que usaban los antiguos babilonios y egipcios, sin justificación formal ni cotas precisas, hasta el eficiente algoritmo, debido a Isaac Newton, que lo calcula como una serie rápidamente convergente de números racionales positivos; pasando por los trabajos de Arquímedes que ofrecen por vez primera un método claro y riguroso para, en principio, poder aproximarse al valor de π con tanta precisión como uno quiera. En el camino mostraremos una idea que permite obtener mejores aproximaciones que las que Arquímedes logró, y que solo usa algo que él demostró.

El número π en la antigüedad

Las culturas antiguas sabían que el perímetro de una circunferencia es un poco mayor que el triple de su diámetro y que el área de un círculo es algo mayor que tres veces la del cuadrado de lado igual al radio. Está más o menos claro que sabían que esas razones eran constantes, pero no que supieran que son iguales. De hecho las estimaciones que usaban para una y otra no siempre eran las mismas.

Los babilonios usaban unas veces 3 y otras $3\frac{1}{8} = 3.125$. No está claro si uno de estos valores era para la razón de los perímetros y el otro para la de las áreas o si usaban 3 en los ejercicios escolares y $3\frac{1}{8}$ cuando querían mayor precisión. No se sabe cómo obtuvieron esas aproximaciones. Nada hay que indique un intento para justificarlas. Es probable que las obtuvieran experimentalmente (por ejemplo rodeando una columna cilíndrica con una cuerda o midiendo las marcas que deja una protuberancia en el perímetro de una rueda).

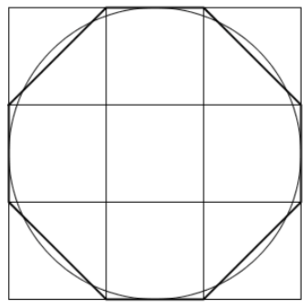
Los egipcios usaron $\frac{8}{9}d$ como el lado de un cuadrado con "casi" la misma área que el círculo de diámetro d.



La figura muestra un círculo con diámetro d y un cuadrado con lado $\frac{8}{9}d$. A simple vista puede apreciarse que la diferencia entre sus áreas es pequeña. El exceso en las esquinas del cuadrado parece compensarse con los sectores del círculo que le sobresalen. De acuerdo con esto, el área del círculo (πr^2 donde $r = \frac{d}{2}$) es "casi" igual a $(\frac{8}{9}d)^2$. Tomando $d = 2$ (o sea $r = 1$) obtenemos una estimación para π de $(\frac{8}{9}2)^2 = 256/81$, que en decimales nos da $\pi \simeq 3.16$.

Estamos ante una buena aproximación, pero no ante un razonamiento que la justifique. No hay evidencias de que los egipcios hubieran obtenido esta estimación de manera razonada. Los historiadores de las matemáticas han inventado razonamientos factibles para intentar justificar esta estimación. Uno de ellos es el siguiente.

Partimos el cuadrado circunscrito al círculo de diámetro d en nueve cuadrados, cada uno de lado $\frac{1}{3}d$, como muestra la figura.



Salta a la vista que el octágono irregular en la figura debe tener un área muy parecida a la del círculo. Los 8 excesos alrededor de sus vértices parecen compensarse con los 4 de la circunferencia sobre los lados diagonales del hexágono. El área del octágono es igual a 7 veces la de los cuadrados de lado $\frac{d}{3}$, o sea

$$7\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2$$

que es un valor muy cercano a $\frac{64}{81}d^2$. Pero $\frac{64}{81}$ es el cuadrado exacto de $\frac{8}{9}$ y proporciona una *cuadratura* aproximada del círculo que ayuda a simplificar los cálculos.

Que la razón entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todos los círculos parecía ser conocimiento común en Babilonia y Egipto. La primera demostración documentada de que la razón del área del círculo al cuadrado de su radio es constante corresponde a Euclides en el libro XII de sus Elementos. Sin embargo Euclides no proporciona el valor de dicha razón. Y es que esta constante fundamental de la naturaleza que denotamos por π[1] es muy difícil de calcular.

Arquímedes

Arquímedes (Siracusa (Sicilia), 287 – 212 a.e.c.) fue físico, ingeniero, inventor, astrónomo y, sobre todo, matemático. Se le considera uno de los científicos más importante de la antigüedad clásica. Pero por lo que más se le admira es por sus trabajos matemáticos, que son los únicos que él mismo consideró suficientemente importantes como para escribirlos y legarlos a la posteridad.

Arquímedes murió durante el sitio de Siracusa (214–212 a.e.c.), ejecutado por un soldado romano. Se dice que el soldado le ordenó levantarse y seguirlo, pero Arquímedes se mantuvo absorto en sus pensamientos dibujando en la arena, lo cual irritó al soldado que, enfadado, le asestó un golpe de espada, a pesar de que tenía órdenes de no hacerle daño.

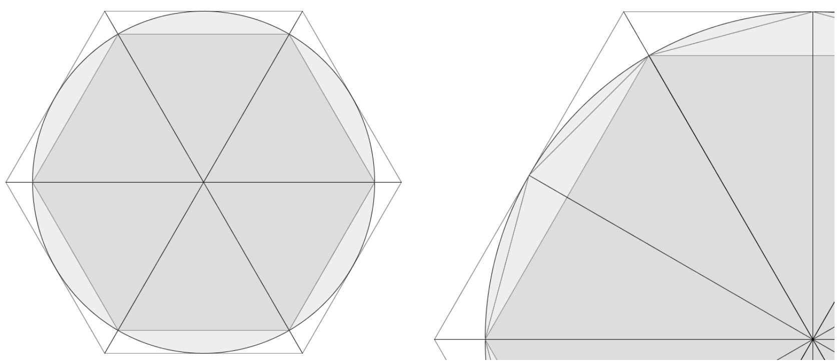
[1] Los primeros en usar la letra π para denotar esta constante fueron los matemáticos ingleses Oughtred (1647), Isaac Barrow (1664) y David Gregory (1697).

«Cara de la medalla Fields, Archimedes» de Stefan Zachow.
Original uploader was Ianmacm at en.wikipedia - Transferred from en.wikipedia;
transfer was stated to be made by User: OhanaUnited.
Disponible bajo la licencia Dominio público vía Wikimedia Commons
- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FieldsMedalFrontArchimedes.jpg
#/media/File:FieldsMedalFrontArchimedes.jpg

Sus ideas, sus métodos y el rigor de sus demostraciones siguen siendo hoy motivo de asombro y admiración, la cual ha quedado patente por el hecho de que la medalla Fields, que es el premio más importante de las matemáticas, lleva su efigie.

La primera estimación razonada de π, con cotas bien definidas, la realiza precisamente Arquímedes. Para ello calcula el perímetro de los polígonos regulares inscritos y circunscritos al la circunferencia de radio $r = 1$, con 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Utiliza un proceso recursivo para obtener las medidas de los lados y los apotemas de esos polígonos. Veamos cómo lo hizo.

Sea l_n el lado del polígono inscrito de $6 \cdot 2^n$ lados y a_n el apotema correspondiente. Entonces, usando el Teorema de Pitágoras, obtenemos



$$a_n = \sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} \tag{1}$$

$$l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (1 - a_n)^2} \tag{2}$$

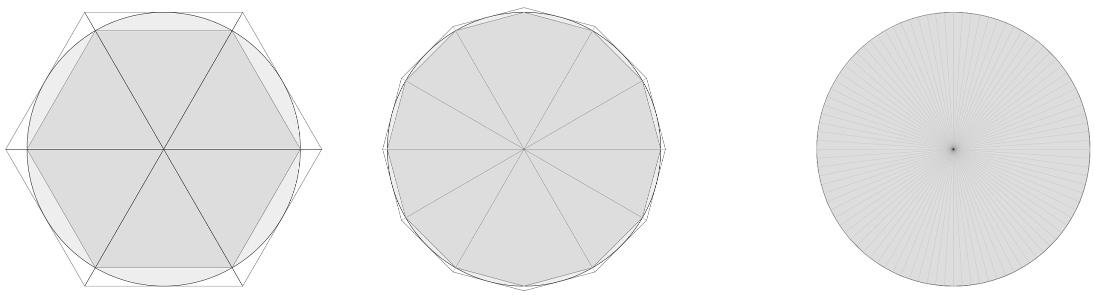
El lado L_n del polígono circunscrito de $6 \cdot 2^n$ lados puede hallarse por triángulos semejantes a partir de l_n y a_n:

$$L_n = \frac{l_n}{a_n} \tag{3}$$

Sumando la mitad de los lados de los polígonos, Arquímedes obtiene estas cotas para π que permiten aproximase a su valor tanto como uno quiera:

$$3 \cdot 2^n \cdot l_n < \pi < 3 \cdot 2^n \cdot L_n$$

Sin embargo las fórmulas recursivas (1) y (2) involucran raíces cuadradas, que son difíciles de calcular manualmente, y aún con los excelentes algoritmos de nuestro sistema de decimal, hoy no haríamos estos cálculos sin contar al menos con una calculadora. Las raíces cuadradas de números racionales suelen ser irracionales y sólo podemos expresarlos de manera aproximada en nuestro sistema decimal.



6 lados 12 lados ··· 96 lados

A pesar de estas dificultades, Arquímedes, con algoritmos aritméticos menos eficientes que los nuestros, logró obtener buenas cotas racionales para el número π. Usando los polígonos inscrito y circunscrito de 96 lados obtuvo

$$3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} < \pi < \frac{220}{70} = 3 + \frac{10}{70}$$

Estas cotas dan 2 cifras decimales de precisión

$$3.1408 < \pi < 3.1429 \tag{4}$$

Con una calculadora hoy podemos obtener

$$3.1410 < \pi < 3.1428 \tag{5}$$

Observemos que el promedio pesado con $\frac{2}{3}$ de la cota inferior y $\frac{1}{3}$ de la superior es 3.1416, que es una excelente aproximación para π con cuatro cifras decimales de precisión. Esto no es una casualidad, como veremos más adelante.

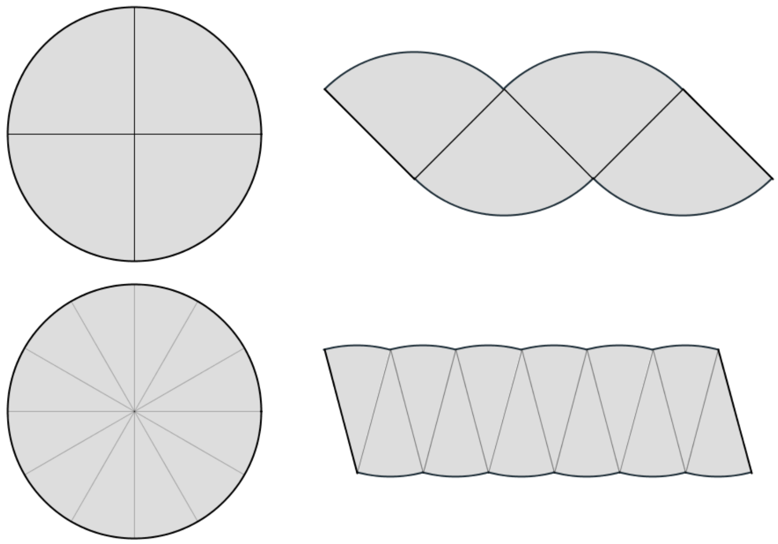
El método de Arquímedes fue aplicado por Ptolomeo alrededor del año 100, hasta alcanzar un polígono de $1536 = 6 \cdot 2^8$ lados, obteniendo la estimación $\pi \simeq 317/120 \simeq 3.1416$ que es el valor que usamos todavía en las escuelas.

Algunos siglos más tarde y de manera independiente, los chinos usaron el mismo método para obtener una aproximación aún más precisa $\pi \simeq 355/113$, que en decimales corresponde a $\pi \simeq 3.141592$ y es exacta en seis cifras decimales. Este resultado constituye una hazaña extraordinaria de cálculo, dadas las limitaciones aritméticas de aquella época, y se puede considerar que dio a los chinos el récord mundial durante mil años, hasta que el uso de los números arábigos hacia finales de la edad media europea permitió mejorar los métodos aritméticos. Como veremos más adelante, Arquímedes pudo haber obtenido la misma aproximación que los chinos y con casi las mismas operaciones aritméticas con que logró la suya, que fue mucho más modesta.

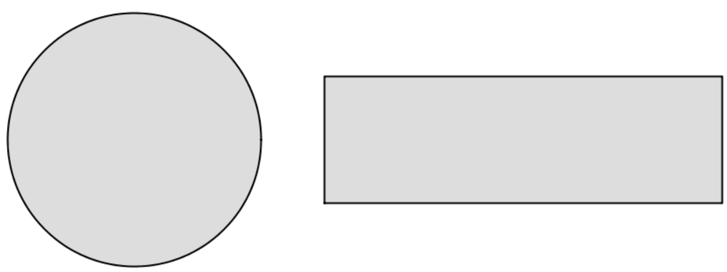
El área del círculo

Euclides demostró que la razón entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro es constante y también que la razón entre el área del círculo y el cuadrado de su radio es constante. Sin embargo no demostró que ambas constantes son iguales. Quien logra demostrarlo es, para no variar, Arquímedes. Lo hace unos 50 años después de que Euclides escribiera sus *Elementos*. Este resultado es el que nos permite escribir las fórmulas $2\pi r$ para el perímetro de la circunferencia y πr^2 para el área del círculo, donde en ambos casos r es el radio.

Las siguientes figuras ilustran el método que usó Arquímedes para obtener el área de un círculo en términos del número π.



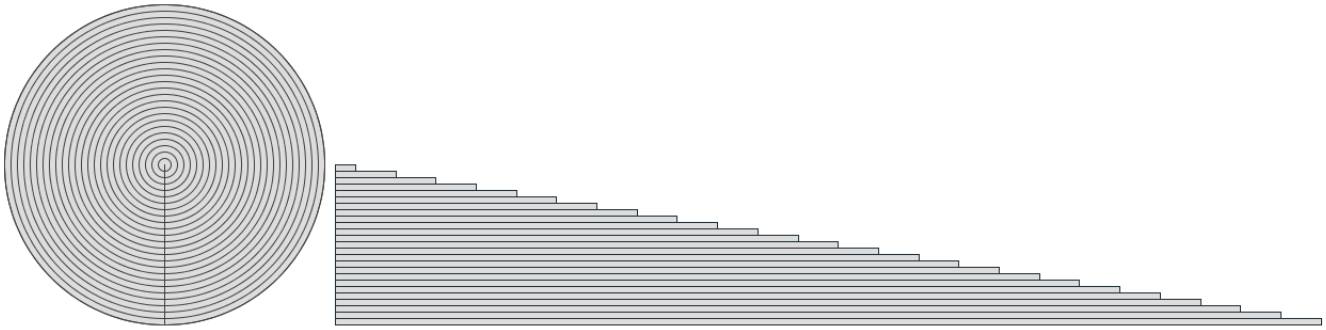
Lo que hizo fue dividir el círculo en un número par de sectores y acomodar la mitad de ellos alineados y paralelos, tocándose por un punto, y la otra mitad de la misma manera, pero invertidos, encajados exactamente en los primeros. Luego fue aumentando el número de sectores y observó que la figura que se obtiene, y que por construcción siempre tiene la misma área que el círculo, se va convirtiendo en un rectángulo cuyo lado es la mitad del perímetro y cuya altura es el radio.



Así, resulta claro que el área del círculo es la mitad del perímetro por el radio. Dado que el perímetro, por definición del número π, es $2\pi r$, esto demuestra que el área del círculo es πr^2.

Otra manera de demostrarlo es partiendo el círculo de radio r en muchos anillos concéntricos del mismo espesor y desenrollarlos, sin estirarlos ni encogerlos, hasta dejarlos rectos y horizontales. Se forma así una figura muy cercana al triángulo de base $2\pi r$ y altura r, cuya área es, por supuesto, πr^2. Cuantos más anillos se usen, mejor es la aproximación.

Así se obtiene una demostración de que el área del círculo de radio r es πr^2.



Este argumento aparece en un texto medieval del matemático y astrónomo judío-catalán Abraham Bar Hiyya (o Abraham Iudaeus Savasorda) (Barcelona, siglo XII, 1065-1070 – 1136 ó 1145), precursor de la escuela de Toledo.

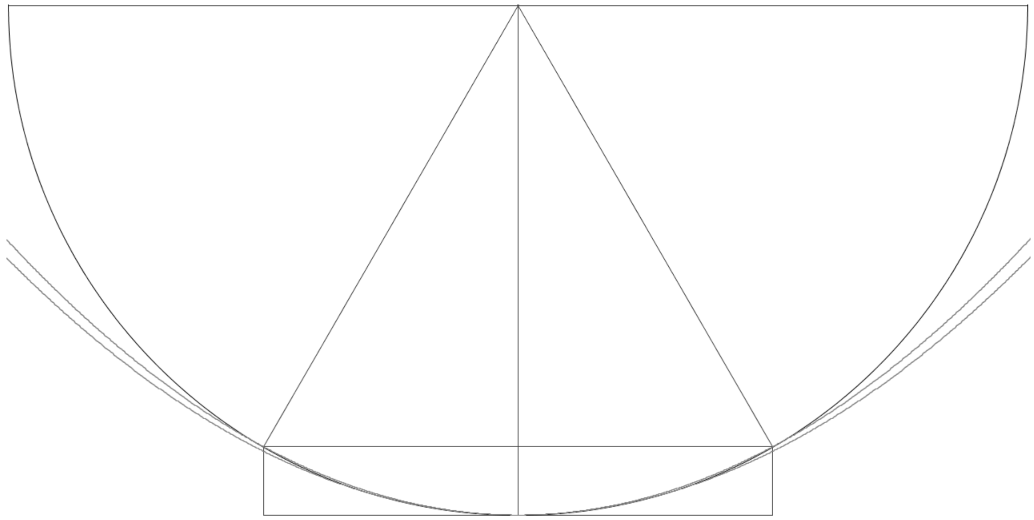
«Sefer tzuret, abraham bar»
Photo of Exhibit at the Diaspora Museum, Tel Aviv - en:Beit Hatefutsot.
Disponible bajo la licencia Dominio público vía Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sefer_tzuret,_abraham_bar.jpg #media/File:Sefer_tzuret,_abraham_bar.jpg

Ya que que π puede obtenerse como la razón del área del círculo al cuadrado de su radio, resulta que es igual al área del círculo unitario (el de radio 1). Así calcularemos π de aquí en adelante.

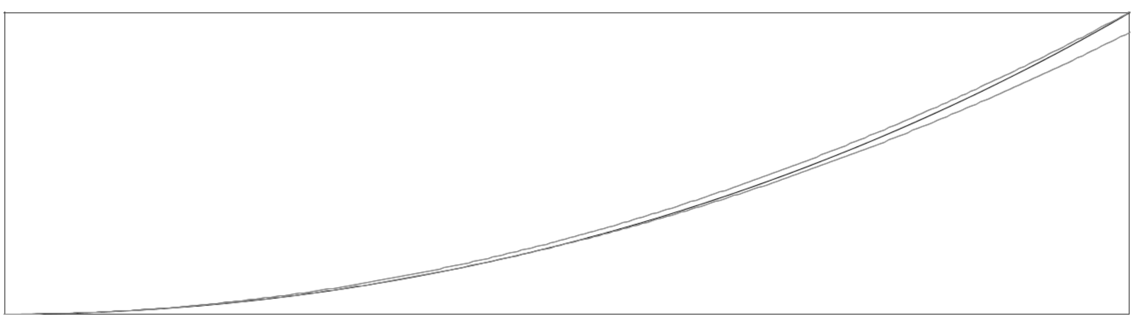
Cálculo de π como el área del círculo unitario

Usando la misma idea de Arquímedes de los polígonos de $6 \cdot 2^n$ lados, pero ahora buscando cotas para sus áreas en lugar de sus perímetros, se llega a estimaciones similares a las que se obtienen con perímetros. Pero usar áreas tiene ventajas. Nos permite aprovechar otro de los importantes resultados de Arquímedes: *la cuadratura de la parábola*, esto es, que el área de un sector de parábola es igual a $\frac{2}{3}$ de la del mínimo paralelogramo o rectángulo que la contiene. El promedio pesado con

$\frac{2}{3}$ de la cota inferior más $\frac{1}{3}$ de la exterior, que como antes vimos da una estimación muy buena de π, nos sugiere usar parábolas para obtener mejores resultados.



Consideremos dos parábolas con sus ejes sobre la mediatriz del triángulo formado por el centro del círculo y los extremos de uno de los hexágonos incritos, ambas con vértice en la intersección de la mediatriz con la circunferencia. Sea la primera de ellas la que corta a la circunferencia en los extremos del lado elegido del hexágono y sea la segunda la que tiene el foco en el punto medio del radio que coincide con la mediatriz. Se puede demostrar que la segunda es exterior al círculo y la primera es interior, entre los extremos del lado del hexágono. Las tres curvas coinciden en el vértice de las parábolas.



Se puede obtener una cota inferior para el área del círculo unitario como 6 veces el área del triángulo de base 1 y apotema $a = \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ más $\frac{2}{3}$ del rectángulo de base 1 y altura $1-a$. O sea que

$$\pi > 6\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3}(1-a)\right) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) > 3.141104 \tag{6}$$

Si colocamos el origen en el vértice de las parábolas y hacemos coincidir el eje y con los ejes de las parábolas de manera que el centro del círculo quede en el punto $(0,1)$, la ecuación de nuestra parábola exterior resulta ser $y = \frac{x^2}{2}$. Sumando las áreas del triángulo y el rectángulo y restando la que está bajo la parábola, obtenemos

$$\pi < 6\left(\frac{a}{2} + (1-a) - \frac{1}{3}\left(\frac{0.5^2}{2}\right)\right) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{0.5^2}{2}\right)\right) < 3.142603 \tag{7}$$

Reuniendo (6) y (7) llegamos a

$$3.141104 < \pi < 3.142603$$

Esta estimación es ligeramente mejor que la de Arquímedes correspondiente al polígono de 96 lados, pero ésta se obtuvo con muchas menos operaciones aritméticas y, entre ellas, sólo una raíz cuadrada, la de 3.

La misma idea se puede aplicar a los polígonos de $6 \cdot 2^n$ lados aprovechando las fórmulas recursivas (1) y (2) para a_n y l_n que se usaron en el método de Arquímedes. Con esos valores las cotas para π son

$$6 \cdot 2^n \left(\frac{a_n}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{l_n^2}{2} \right) \right) < \pi < 6 \cdot 2^n \left(\frac{a_n}{2} + (1 - a_n) - \frac{1}{3} \left(\frac{l_n^2}{2} \right) \right)$$

En el caso $n = 4$, que corresponde al polígono de 96 lados, esto da 7 dígitos de precisión

$$3.14159264 < \pi < 3.14159267$$

(5 más que los 2 que dio el método de Arquímedes).

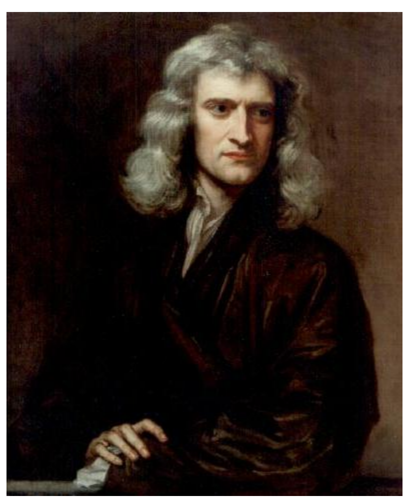
Resulta bastante extraño que Arquímedes no haya usado esta idea, siendo que él mismo obtuvo la cuadratura de la parábola. Tal vez su trabajo sobre la cuadratura de la parábola haya sido posterior al de π.

Aunque este camino nos permite calcular muchos decimales de π, tiene el gran inconveniente de las raíces cuadradas, que nos obligan a realizar operaciones complejas con resultados inexactos.

Si se hacen promedios pesados con $\frac{3}{5}$ de las cotas inferiores y $\frac{2}{5}$ de las superiores, se obtienen aproximaciones con un 50 % más de cifras decimales correctas. Esto sugiere que debe haber métodos aún mejores. Uno de ellos lo descubrió Isaac Newton. En la siguiente sección lo redescubriremos nosotros mismos usando argumentos geométricos y del cálculo diferencial e integral.

Cálculo de π según Newton

El gran científico Sir Isaac Newton (1643 - 1727) encontró un método para calcular π que es mucho más eficiente que cualquiera de los que le precedieron.



«Sir Isaac Newton (1643-1727)» de Sir Godfrey Kneller

- http://www.phys.uu.nl/ vgent/astrology/images/newton1689.jpg].
Disponible bajo la licencia Dominio público vía Wikimedia Commons -
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg
#/media/File:Sir_Isaac_Newton_(1643-1727).jpg

Su resultado puede escribirse así

$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n+1)} \tag{8}$$

Esta fórmula expresa π en términos de una serie rápidamente convergente de números racionales en la que cada término tiene una expresión explícita. De ella podemos obtener un algoritmo recursivo muy sencillo para cada término de la serie a partir del que le precede. Efectivamente, definiendo

$$c_n = \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2}$$

la fórmula (8) se puede escribir así

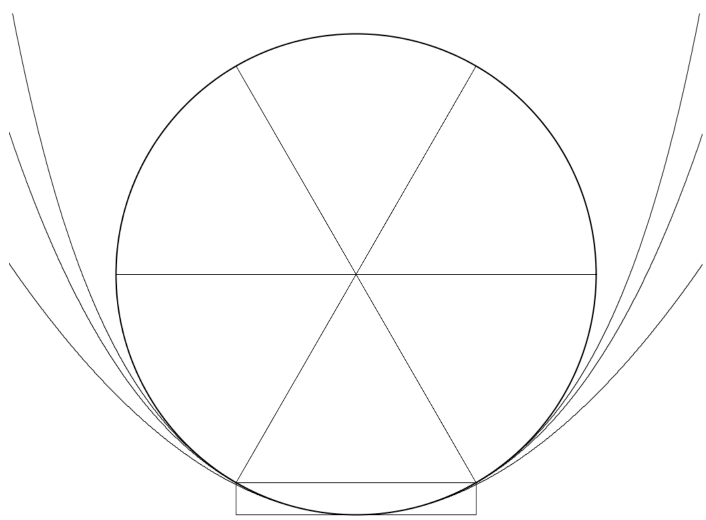
$$\pi = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2n+1} \tag{9}$$

donde $c_0 = 1$ y, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$c_n = c_{n-1}\frac{(2n-1)(2n)}{16n^2} = c_{n-1}\frac{(2n-1)}{8n} \tag{10}$$

La serie (9) brinda una manera sencilla y muy rápida de obtener buenas aproximaciones de π. De hecho, con este método se pueden obtener 16 decimales de π con sólo 22 términos. Manualmente este cálculo puede hacerse en una hora, en minutos usando una calculadora y en fracciones de segundo con una computadora.

Para obtener este resultado calcularemos π como el área del círculo unitario y usaremos el hexágono inscrito y la aproximación a una función mediante una serie de potencias, concepto que surgió apenas en el siglo XVII gracias, entre otros, al propio Newton.



Aproximando $1 - \sqrt{1-x^2}$ por $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, $N = 1, 2, 3, \ldots$

El área puede calcularse así
$$\pi = 6(T + R - 2C) \tag{11}$$
donde:
T es el área del triángulo equilátero de lado 1: $T = \frac{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}{2}$,
R es el área del rectángulo de base 1 y altura $1 - \sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}$ y
C es el área bajo la gráfica[2] de la función $1 - \sqrt{1-x^2}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$.
Entonces
$$T = \tfrac{1}{2} - \frac{1-\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}{2} \quad R = 1 - \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} \quad C = \textstyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1 - \sqrt{1-x^2}dx$$
Definiendo $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, estas fórmulas pueden escribirse así
$$T = \tfrac{1}{2} - \tfrac{f(\frac{1}{2})}{2} \quad R = f(\tfrac{1}{2}) \quad C = \textstyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$
Sustituyendo en (11) obtenemos
$$\pi = 6\Big(\frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{2} + f\Big(\frac{1}{2}\Big) - 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\Big)$$
que se simplifica a
$$\pi = 3\Big(1 + f\Big(\frac{1}{2}\Big) - 4\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\Big) \tag{12}$$
La función $f(x)$ se puede escribir como
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} \tag{13}$$
donde los coeficientes a_n, que más adelante obtendremos usando la serie binomial, son positivos.
Sustituyendo (13) en (12)
$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n} - 4\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}dx\Big)$$
Calculando la integral término a término
$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\frac{1}{2})^{2n+1}}{2n+1}\Big)$$
Reuniendo las dos sumas y sacando como factores comunes a $a_n(\frac{1}{2})^{2n}$
$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n}\Big(1 - 4\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}\Big)\Big)$$
Lo cual podemos reescribir así
$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{2^{2n}}\Big(1 - \frac{2}{2n+1}\Big)\Big)$$

[2] El origen se colocó una unidad abajo del centro para que la gráfica coincida con la circunferencia.

Usando $2n+1$ como denominador común, podemos simplificar y escribir

$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{2n-1}{4^n \cdot (2n+1)}\Big) \tag{14}$$

Para obtener los coeficientes a_n desarrollamos $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ en serie binomial

$$f(x) = 1 - (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}x^6 + \dots$$

Simplificando

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}x^4 + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{3!}x^6 + \dots$$

De lo cual se puede ver que $a_1 = \frac{1}{2}$ y, para $n > 1$

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n! \cdot (2n-1)}$$

Multiplicando numerador y denominador por $2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n$ obtenemos

$$a_n = \frac{(2n)!}{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)\cdot 2^n \cdot n! \cdot (2n-1)} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n! \cdot 2^n \cdot n! \cdot (2n-1)}$$

y finalmente

$$a_n = \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n-1)} \tag{15}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Sustituyendo (15) en (14)

$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2 \cdot (2n-1)} \cdot \frac{(2n-1)}{4^n \cdot (2n+1)}\Big)$$

Lo cual puede escribirse finalmente como

$$\pi = 3\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{16^n \cdot (n!)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)}\Big) \tag{16}$$

Como la fórmula para los coeficientes en (16) es válida para $n = 0$ y da 1, esto nos lleva a (8), que es lo que queríamos demostrar.

Calculando π con muchos decimales

Utilizando (9) y (10) en una computadora con aritmética de alta precisión se puede obtener la siguiente aproximación de π con 600 cifras decimales de precisión.

$\pi = 3.$
141592 653589 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944
592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513282 306647
093844 609550 582231 725359 408128 481117 450284 102701 938521 105559
644622 948954 930381 964428 810975 665933 446128 475648 233786 783165

271201 909145 648566 923460 348610 454326 648213 393607 260249 141273
724587 006606 315588 174881 520920 962829 254091 715364 367892 590360
011330 530548 820466 521384 146951 941511 609433 057270 365759 591953
092186 117381 932611 793105 118548 074462 379962 749567 351885 752724
891227 938183 011949 129833 673362 440656 643086 021394 946395 224737
190702 179860 943702 770539 217176 293176 752384 674818 467669 405132

El cálculo tarda unos 25 segundos.

Para obtener 1,200 decimales se requieren unos 3 minutos, para 7,200 decimales, 4 horas y para 12,000 decimales, 22 horas.

Actualmente se conocen métodos aún más eficientes con los que se han llegado a calcular miles de millones de cifras decimales de π. Esos cálculos tardan meses en realizarse. En realidad no tienen ninguna utilidad, se trata de un mero deporte. Para la mayoría de los cálculos que hay que realizar, basta conocer unos 16 decimales de π, que es lo que ofrece la aritmética de una PC. Para cálculos más delicados, un centenar de decimales serían más que suficientes.

La irracionalidad de π

Durante siglos los matemáticos se preguntaron si π sería o no racional. Si lo fuera habría una periodicidad en sus decimales. Esto fomentó el interés de obtener muchos decimales de π. A medida que se calculaban más y más se iban buscando patrones que se repitieran. Pero nunca se encontró uno. En el siglo XVIII se demostró que nunca se encontraría tal patrón, es decir, que π es un número irracional.